

# Kinematical Element Method 를 이용한 Carsington Dam 의 안정해석

이 상 덕 ( LEE SANG DUK ) \*

## Abstract :

The stability of the Carsington dam at Derbyshire in middle England is analysed using the Kinematical Element Method ( Program LSDKSLOP ). The thin yellow clay layer and the pore pressure at the failure surface, which goes through the core and boot, are considered. The influence of the pre-existing shears of the yellow clay on the stability of the Carsington dam is studied. Comparisons with the calculated and the observed failure surface are presented.

## 1. 서론

일반적으로 흙댐은 몇개의 토층으로 구성되며 각 토층의 강성도에 따라 안전율이 달라진다. 따라서 흙댐의 안정을 해석할 때는 각 지층의 강성도 및 간극수압을 고려하고 파괴면을 예측하는 일이 중요하다.

KEM은 기초의 지지력, 토압 및 사면안정해석에 적용되는 지반공학 분야의 새로운 이론이며, 극한해석의 Upper Bound 쪽에서 완전해에 가까운 해를 구하는 방법이다.

Program LSDKSLOP 은 GUSSMANN (1982a, b)의 KEM 이론을 사면안정 해석에 적합하도록 확장한 프로그램으로 복잡한 형상의 단면과 특수한 지층구조 및 여러 개의 층상구조를 갖는 사면의 해석이 가능하도록 프로그램 되어 있어서, 지하수를 고려할 수 있고, 파괴모양 및 파괴시의 변위를 구할 수 있다.

본 예제의 Carsington 댐의 단면은 Boot, Fill, Slope Protection, Core 및 황색 점토로 구성되어 있으며, Boot 와 Core 에서는 간극수압이 존재한다. 처음 설계시에 고려되지 않았던 황색 점토층이 파괴후 정밀조사 과정에서 발견 되었으므로 황색 점토층이 댐의 파괴에 주된 역할을 했을 가능성을 배제할 수 없으며 이를 규명할 필요가 있다.

따라서 LSDKSLOP 프로그램으로 먼저 황색점토가 없을 때와 있을때 각각 간극수압을 고려하여 안정을 해석하고 서로 비교하여 황색 점토층의 유무에 따른 안전율의 변화와 파괴모양을 구하고, 황색 점토층이 있을 때는 황색 점토층의 토질정수를 변화시키면서 안정해석하여 황색 점토층의 응력상태에 의한 영향 및 파괴후의 변위를 구하여 측정치와 비교하고자 한다.

---

\* 정회원, 아주대학교 토목과 조교수

## 2. 예제 해설

Carsington 댐은 영국 잉글랜드 중부의 Derbyshire 에 위치한 토사댐으로 길이 1200 m, 최고 높이 37 m 로 계획되었으나 1984 년 6 월 1 일에 계획고 - 1 m 까지 성토가 끝난 상태에서 주말에 내린 폭우로 6 월 4 일에 상류측 190 m 정도가 활동을 일으키기 시작하여 6 월 7 일에는 파괴연장이 500 m 정도 최대 수평변위가 15 m 에 이르렀다. Carsington 댐의 파괴 전후의 단면은 그림 1 과 같으며 설계시 사용한 토질특성은 표 1 과 같다.

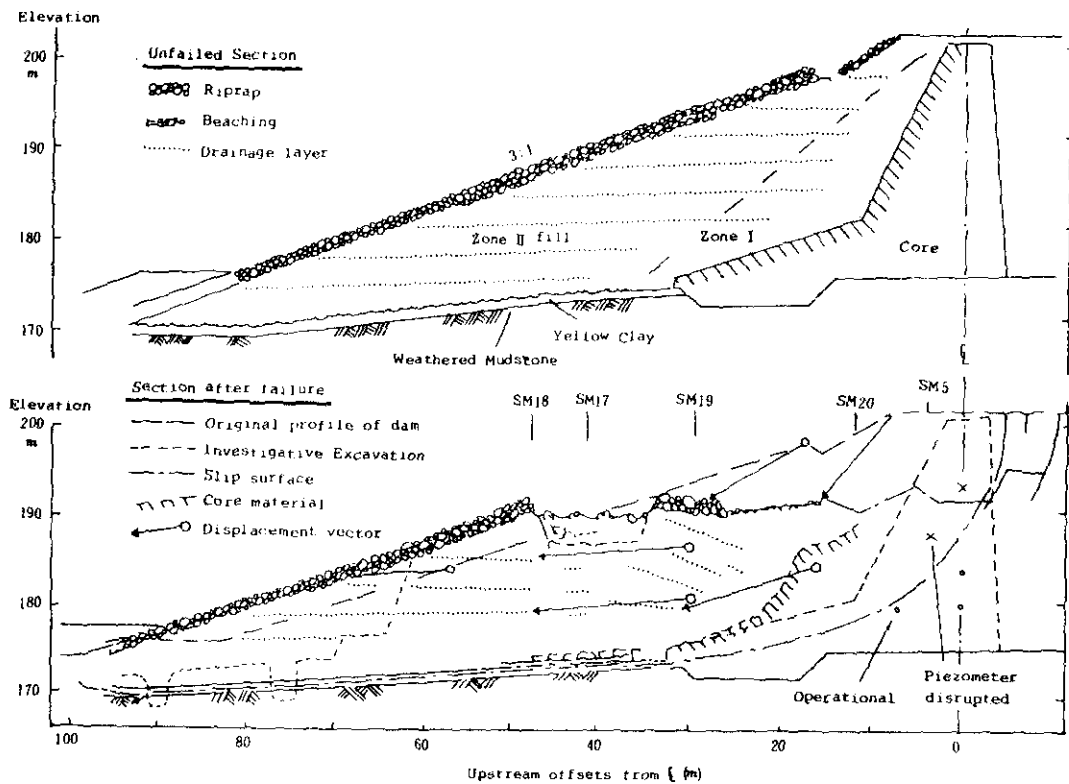


그림 1. 파괴전후의 Carsington Dam 의 단면

표 1. Carsington Dam 의 설계시 토질특성

Material	Unit Weight (kN/m <sup>3</sup> )	c' (kPa)	$\phi'$ (deg)	Pore Pressure Ratio **
Core	18.5	0	22	0.4
Zone I & II Filled	21.0	0	25	0
' Boot ' **	18.5	0	22	0.5
Slope Protection	18.5	0	35	0
Weathered Mudstone	18.0	100	30	0

\* The 'boot' is the upstream protection of the core.  
 \*\* The Pore pressure ratio,  $r_u$  is given by  $r_u = \gamma_{wh} / \gamma_z$  where h is the piezometric level above the failure plane.

파괴후의 조사에서 황색 점토층이 발견되었고, 광범위한 실험결과 코아와 황색점토의 강도는 표 2 와 같이 이미 존재하던 전단변위의 영향을 받은 것으로 판명되었다. 또한 활동 파괴면에서의 간극수압비는 표 3 과 같다.

표 2. 코아와 황색 점토의 강도

Condition	Core		Yellow Clay	
	c' (kPa)	$\phi'$ (deg)	c' (kPa)	$\phi'$ (deg)
Peak, intact	15	21	10	20
Peak, with pre-existing shears	6	20	5	17
Critical State	0	20	0	18
Residual	0	13	0	12

표 3. 활동 파괴면에서의 간극수압비

Material	Pore Pressure Ratio, $r_u = \gamma_{wh} / \gamma_z$
Core	0.42
Boot	0.53
Yellow Clay	0

### 3. 프로그램 LSDKSLOP 해설

LSDKSLOP 은 GUSSMANN ( 1982a,b) 의 KEM (Kinematical Element Method) 이론을 여러개의 층으로 이루어진 지반에 맞도록 확장한 프로그램이다. KEM 에서는 해석대상지반을 여러개의 Rigid Element 로 나누고 이들 Rigid Element 들이 극한 평형상태일때 내부에서 소산된 에너지와 외력이 행한 일이 같다고 가정하고 Object Function 을 구한다.

KEM 에서 구한 안전율은 다른 Kinematical Method 에서와 마찬가지로 Upper Bound 에 속하므로, 최적치를 찾기 위해서는 파괴모양을 변화시켜야 한다. 이때 Numerical Optimization Technique 을 도입하여 많은 계산을 실행하지 않고도 짧은 시간에 최적치를 구할 수 있게 되며, LSDKSLOP 에서는 COMPLEX Strategy를 채택하였다. 따라서 LSDKSLOP 은 4개 부분, 즉 Kinematics, Statics, Object Function 및 Optimization 으로 이루어져 있다.

#### a) Optimization

LSDKSLOP 에서는 Numerical Optimization 과정이 가장 큰 비중을 차지하며, 지반공학에서는 인장이 허용되지 않으므로 계산도중에 인장이 발생하는 것을 감지하고 효과적으로 이를 회피하여 계산을 진행할 수 있도록, Optimization Technique 의 Algorithm 이 간명하고, 계산과정이 안정된 것이라야 한다. 현재 까지 KEM 에 적용된 Optimization Technique 은 대체로 다음과 같은 것이 있다.

- EVOLUTION Strategy by SCHWEFEL (1977)
- SIMPLEX Strategy by NELDER/MEAD (1965)
- COMPLEX Strategy by BOX (1965)
- QUASI-NEWTON-Method by DAVIDON/NAZARETH (1977)

위의 각 방법들과 KEM의 접합 가능성 및 그 성과는 OCHMANN, STURM 등이 검토한 결과, 사면의 안정해석에는 COMPLEX - Strategy가 가장 적합하다고 하였다. 따라서 LSDKSLOP에서는 BOX의 COMPLEX (Constrained Simplex) 방법을 채택하였다. 특히 COMPLEX Strategy에서는 Geometry 변화시에 범위를 지정해 주기 때문에 부분적으로 인장이 발생하더라도 쉽게 벗어날 수 있어서 계산과정이 매우 안정된 편이다.

### b) Geometry

Kinematical Element System에 작용하는 힘은 작용 외력과 요소의 자중 및 활동면에 작용하는 점착력과 마찰력이 있으며, 외력은 일정한데 비하여 자중과 점착력 및 마찰력은 요소의 크기 및 요소의 면적과 변의 길이에 따라 변한다. 따라서 KEM의 Geometry 부분에서는 요소의 면적과 변의 길이를 구하며, Optimization 과정에서 절점의 좌표가 변할 때마다 새로이 면적과 길이를 구한다.

LSDKSLOP에서는 3각형, 4각형 및 5각형 요소가 가능하며, 임의의 모양의 지층을 고려할 수 있다. 지층경계면은 곡선인 경우에도 계산이 가능하며, 두께 5cm 이상인 지층은 20개 까지 고려할 수 있다.

### c) Kinematics

Kinematical Element System에서 서로 접하고 있는 요소간의 상대변위는 공유접촉면과 평행으로 작용하며, 그림 2와 같은 Hodograph를 그려서 구하거나, Global Equation System을 풀어서 구한다. 두 개의 요소 e와 f간의 상대변위의 x-, z- 성분은

$$\begin{aligned} V_{e/f,x} &= V_{e/f,x} * \cos \alpha_{e/f,x} = -V_{f/e,x} \\ V_{e/f,z} &= V_{e/f,z} * \sin \alpha_{e/f,z} = -V_{f/e,z} \end{aligned}$$

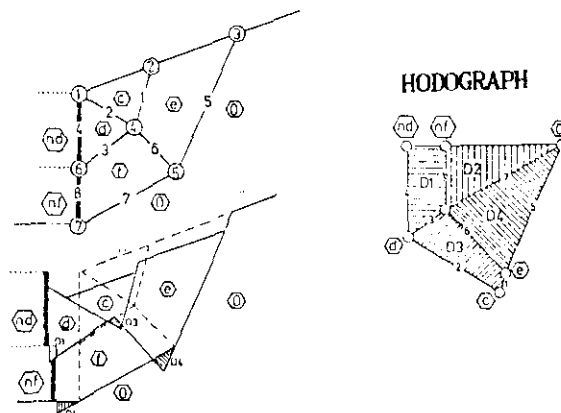


그림 2. 변위 전후의 KEM 시스템과 이때의 Hodograph

요소 d, e, f, g 가 변위를 일으키기 전에 공유하였던 점 i 에 대한 적합조건은

$$\begin{aligned} V_{c/d,x} + V_{d/e,x} + V_{e/f,x} + V_{f/g,x} &= 0 \\ V_{c/d,z} + V_{d/e,z} + V_{e/f,z} + V_{f/g,z} &= 0 \end{aligned}$$

여기에 위의 상대변위의 x-, z- 성분을 대입하면 모든 공유점에 대해서 미지의 상대변위  $V_s$  를 구할 수 있는 다음의 선형방정식을 얻게 된다.

$$K_s V_s + V_a = 0$$

여기에서 계수  $K_s$  는 공유점 i 를 지나는 변들의 Sine, Cosine 값으로 나타내어진다. 상대변위  $V_s$  는 요소에 대해서 반시계방향을 양으로 나타내며, 사면에 대해서는 그림 3 과 같다. 변위  $V_a$  는 외부에서 가해진 변위를 나타낸다.

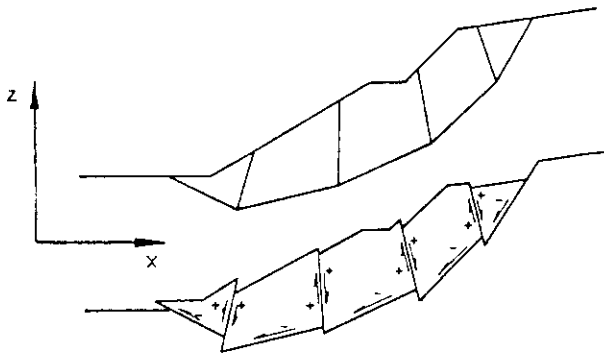


그림 3. 사면에서 상대변위의 부호

#### d) Statics

Kinematical Element System 에서 각 요소들은 서로 접하고 있는 면에서 활동만 일으키고 회전하지 않는다. 각 면에서 상대변위  $V_s$  를 알고 있으면 그 면에 작용하는 힘들의 작용방향이 정해지며, 면에서는 COULOMB 의 파괴식  $\tau = (\sigma - u) * \tan \phi' + C'$  을 적용한다.

임의의 변 s 에 작용하는 힘은 유효 수직응력  $N_s'$ , 수압  $U_s$ , 점착력  $C_s$  및 내부 마찰각에 의한 마찰력  $R_s$  가 있다. 그림 4 는 임의의 요소에 작용하는 힘들을 나타내며  $C_s$  와  $R_s$  는 상대변위  $V_s$  에 따라 작용방향이 결정된다.

$R_s$  와  $N_s$  의 합력은  $Q_s$  라 하고, 압축력을 양이라 하면,  $Q_s$  가 변 s 에 작용하는 유일한 미지의 힘이 된다.

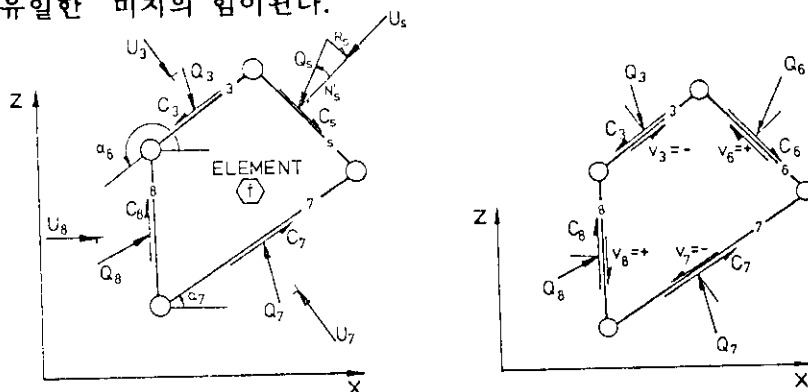


그림 4. Kinematical Element 와 상대변위에 따른 힘의 작용방향

임의의 요소  $f$  의 변  $s$  에 작용하는 힘들의 합력을  $S$  라하고, 그림 5 와 같이  $x$ -,  $z$ - 성분으로 분력하면

$$\begin{aligned} S_{sx} &= - Q_s * \sin ( \alpha_s + \delta_s * \phi'_s ) + \delta_s * C_s * \cos \alpha_s + U_s * \sin \alpha_s \\ S_{sz} &= Q_s * \cos ( \alpha_s + \delta_s * \phi'_s ) - \delta_s * C_s * \sin \alpha_s + U_s * \cos \alpha_s \end{aligned}$$

여기에서  $\delta_s$ 는 상대변위의 부호를 나타낸다.

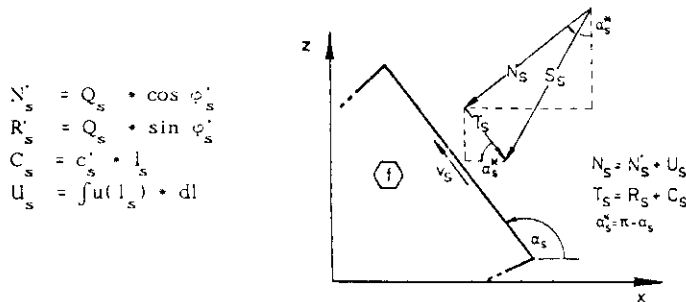


그림 5. 임의의 변  $s$  에 작용하는 힘과 그 분력

요소  $f$  에 작용하는 자중을 포함한 모든 힘들의  $x$ -,  $z$ - 방향 평형식은

$$\begin{aligned} \sum S_{sx} + F_x &= 0 \\ \sum S_{sz} + F_z &= 0 \end{aligned}$$

이를 다시 모든 요소에 대하여 합하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$K Q + F = 0$$

여기에서  $K$  는 Global Friction Matrix 를 나타내며, 하중벡터  $F$  는 자중, 수압, 점착력 및 외력을 포함한다. 위식을 풀면 미지의 힘  $Q$  를 구할 수 있다.

#### e) Object Function

LSDKSLOP 에서는 FELLENIUS 의 Global Safety Factor 를 Object Function 으로 하였으며, 모든 내부 활동면에서 전단강도는 같은 크기로 Mobilize 된다고 가정하면 안전율은 다음과 같다.

$$F = \frac{\tan \phi'}{\tan \phi'_{mob}} = \frac{C'}{C'_{mob}}$$

#### - 지층의 문제

한 요소는 여러개의 지층으로 이루어질 수 있으며, 이러한 경우에는 요소의 자중과 요소의 각 변에서 점착력 및 내부 마찰각은 요소에 포함된 지층에 따라 달라진다. 여러개의 지층으로 이루어진 요소의 변에서의 토질정수는 각 지층에 해당하는 부분의 길이에 의해 결정되며, 평균치는 다음과 같이 구한다 ( OCHMANN, 1988 )

$$\phi_s = \frac{\sum l_i * \phi_i}{\sum l_i}$$

$$C_s = \frac{\sum l_i * C_i}{\sum l_i}$$

여기서  $l_i$  :  $i$  층 부분의 길이  
 $C_i, \phi_i$  :  $i$  층의 토질정수  
 $l = \sum l_i$  : 요소의 한 변의 길이  
 $C_s, \phi_s$  : 한 변의 평균토질정수

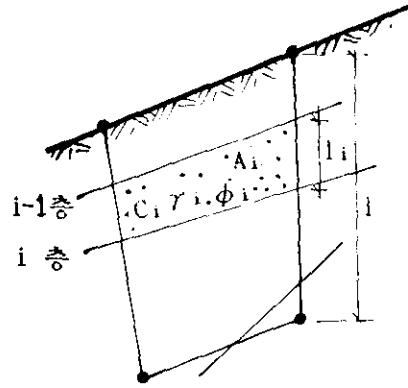


그림 6. 여러개 지층으로 이루어진 요소

요소의 자중은 요소를 구성하는 각 지층의 무게의 합이며, 각 지층의 부분면적과 지층의 단위중량으로부터 구해진다.

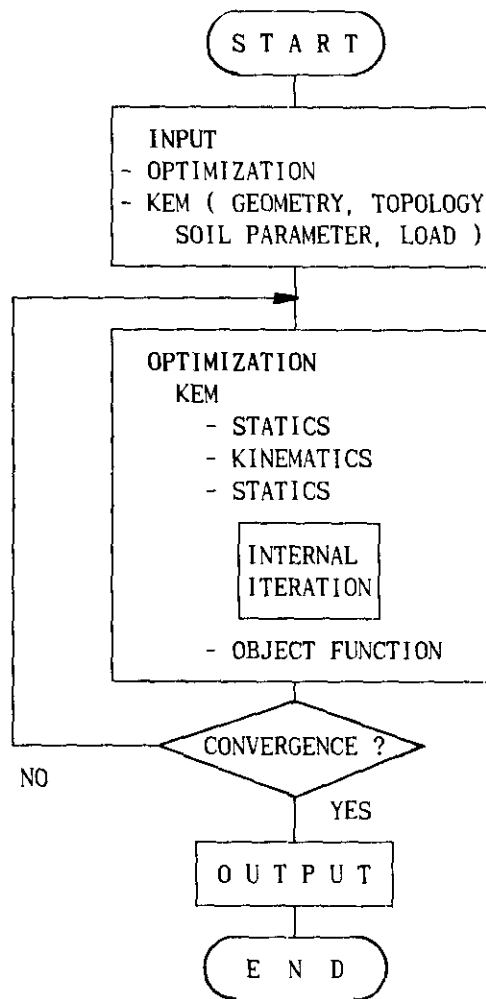


그림 7 Flow Chart of Program LSDKSLOP

$$G = \sum A_i * \gamma_i$$

$$A = \sum A_i$$

A : 요소의 면적  
 G : 요소의 자중  
 A<sub>i</sub> : 요소에 포함된 i 층의 면적  
 γ<sub>i</sub> : i 층의 단위중량

#### 4. 예제해결을 위한 KEM 모델

다층구조의 Carsington 댐을 KEM 으로 해석하기 위하여 7 개의 요소 ( 삼각형 요소 1 개, 사각형 요소 6 개 ) 로 이루어진 Kinematical Element System 을 선택하였다. 그림 8 은 Carsington 댐을 해석하기 위한 KEM 모델을 나타낸다. 직선 파괴면이 예상되는 부분에서는 비교적 큰 요소로 나누었고 ( 요소 1, 2, 3 ), 곡선 파괴면이 예상되는 부분에서는 세분하였다 ( 요소 4, 5, 6, 7 ). 이 시스템에서 자유도는 9 이며, 15 개의 절점중에서 8 개 절점의 좌표변환이 가능하다.

- X-좌표 변환가능 : 점 1, 15
- Z-좌표 변환가능 : 점 4, 6, 8, 10, 12
- X-, Z-좌표 변환가능 : 점 14

요소들의 Geometry 는 위의 좌표변환으로 변화시킬 수 있으며, 좌표변환은 제한된 영역에서만 이루어 지고 요소들의 기본형태는 변하지 않는다.

요소의 자중은 요소에 포함된 각각의 지층의 무게를 합한 값이 되며, 요소의 모양은 지층의 강성도에 의해 영향을 받지 않는다. 본 예제에서는 Boot 와 Core 부분을 포함하는 일부의 변에서만 간극수압을 고려할 뿐이고, 별도로 작용하는 외력이 없으므로 요소의 각변에 작용하는 힘은 요소가 포함하는 지층의 점착력과 내부 마찰각 및 요소의 자중으로부터 결정된다. 요소에 연약한 지층이 포함되면 요소의 각변의 평균 토질정수가 감소하여, 연약층이 많이 포함 될수록 목적함수인 안전율이 작아져서, 요소가 연약지층을 가능한한 많이 포함 하는 경향으로 Geometry 가 변하게 되어 파괴면은 결국 연약층을 따라 형성 된다.

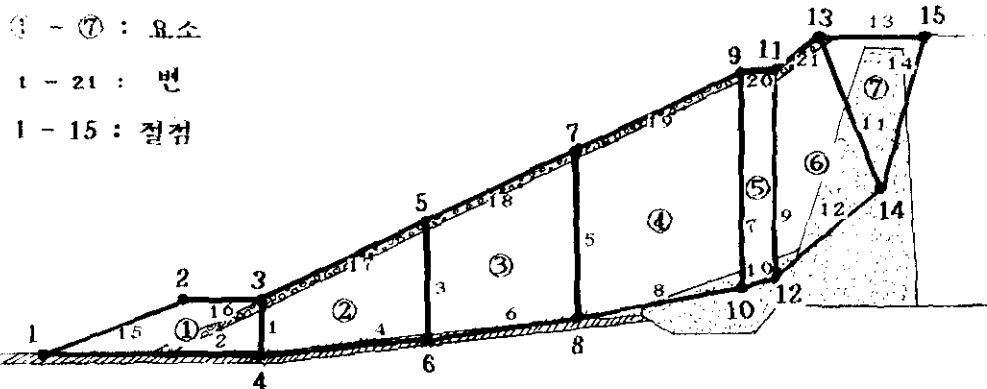


그림 8. Carsington Dam 의 KEM 모델



## 5. 계산결과

### a) 안전율

Carsington 댐을 LSDKSLOP 으로 해석한 결과 황색점토 층의 영향이 뚜렷하게 나타났다. 즉 황색 점토층이 없는 경우에는 안전율이 1.641 이었으나 황색 점토층이 있는 경우는 황색 점토층의 응력상태에 따라 다음과 같이 다른 안전율이 구해졌다.

- Intact : F = 1.686
- Preexisting shear : F = 1.461
- Critical State : F = 1.188
- Residual State : F = 0.950

여기에서 황색 점토층이 Intact 상태인 경우는 황색 점토층의 영향이 없는 것으로 나타났으나 그밖의 경우에는 황색 점토의 상태에 따라 현저히 작은 안전율이 구해졌으며, Residual State 일때는 1.0 보다도 작아졌다. 특히 Residual State 일 경우에는 간극수압을 고려하지 않더라도 안전율이 1.044 로 매우 불안한 상태 이었다. 따라서 댐의 건설 초기에 이미 황색 점토는 전단이 이루어졌다고 추측할 수 있다.

### b) 파괴모양

황색 점토의 유무에 따라 안전율이 최소가 되는 가상 활동면 또한 차이를 나타내었다. 즉 황색 점토가 없을 때에는 Core 의 일부분을 스치는 활동면이 이루어 졌으나 (그림 9.), 황색점토가 있을 경우에는 황색 점토의 상태에 따라 다른 모양을 보였다. 즉 황색 점토가 Intact 일 경우에는 황색 점토가 없을 때와 같은 활동면이 구해졌으나, 그밖의 경우에는 core 를 깊이 관통하는 활동면이 형성되었으며, Residual State 일때의 파괴면은 현장에서 관측한 파괴면과도 일치하는 것이었다.

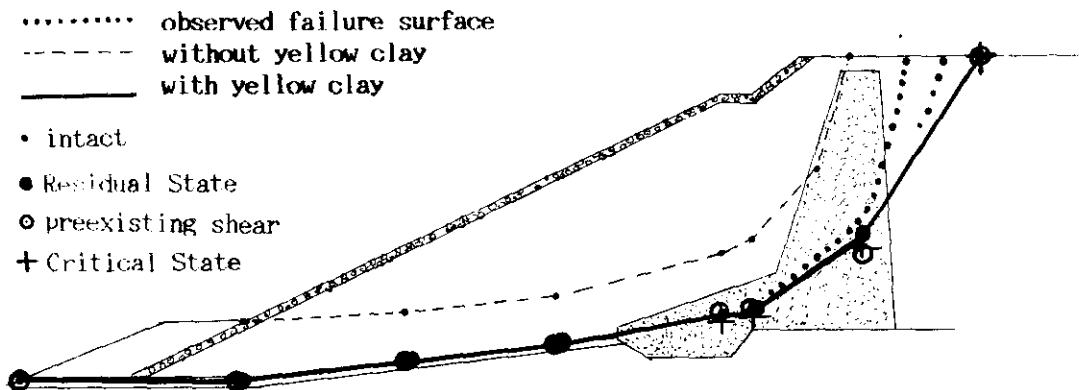


그림 9. KEM 계산에 의한 파괴면

c) 변위

황색 점토층이 없을 경우와 Intact 상태의 황색 점토층이 있는 경우에는 안전율이 최소가 되는 가상활동면이 같은 위치에서 형성되었다. 그러나 그밖의 경우에는 황색 점토층의 응력상태에 따라 다소 차이는 있으나 대체로 댐과 풍화암 기반의 경계를 지나고 Core 를 깊이 관통하는 파괴면이 형성되고 아울러 수평변위도 크게 일어났다.

그림 10 은 KEM 의 계산 결과로 댐의 파괴후의 모양을 나타내며 표에는 댐의 정점의 수직변위가 10 m 인 경우에 각 요소들의 변위를 나타낸 것이다. 여기에서 각각의 요소들의 최대 수평변위가 약 11 m 인데 비하여 현장관측치가 15 m 인 것은 파괴 후에도 계속적인 활동이 일어난 후에 관측했기 때문일 것이며, 이러한 사실은 파괴후의 현장 스케치에서도 확인할 수 있다. 즉 일반적으로 파괴 직후에는 지층 경계면과 파괴면이 뚜렷하지만, 관측시 파괴 댐의 정상 부근의 지반은 각 지층경계면이 구별하기 어려운상태로 활동이 진행되었다.

요 소	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
수평변위(m)	10.79	10.79	10.79	10.79	10.79	10.79	9.29
수직변위(m)	0.24	0.68	0.65	2.08	1.93	7.08	10.00

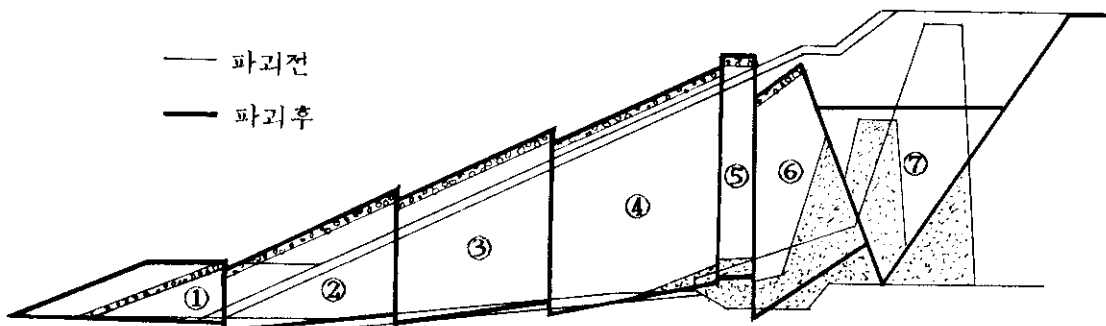


그림 10. KEM 의 계산결과 파괴후 댐의 모양

6. 토론

a). 프로그램 LSDKSLOP 의 능력

- 파괴단면 예측 능력

LSDKSLOP 에서는 안전율뿐만 아니라 파괴단면 및 각각의 단면에 작용하는 단면력이 결과로 구해진다. 또한 Numerical Optimization 과정에서 Geometry 를

변화시키면서 최소 안전율을 구하므로, 안전율이 최소가 되는 Geometry 가 곧 예상 파괴면이 된다. 역으로 붕괴사면의 복구처리에 파괴면을 미리 입력하여 해석하면, 파괴면에 작용하는 단면력을 계산할 수 있다.

- 간극수압의 적용

LSDKSLOP 에서는 각각의 요소 또는 요소의 일부의 변에 작용하는 외력이나 간극수압을 개별적으로 입력할 수 있으며, 지하수위를 입력할 수도 있다. 본 예제에서는 간극수압이 일부의 변에서만 작용하므로 해당요소에서 개별적으로 입력하였다.

- 절편의 수직면에 작용하는 토압

LSDKSLOP 에서는 요소의 접촉면이 곧 파괴면이고, 요소들의 상대변위에 따라 힘의 작용방향이 결정되며, 힘은 요소의 각변의 수직방향에 대해서 내부 마찰각 만큼 기울어져 작용 한다. 따라서 무리한 가정이 필요하지 않다.

b) 사소한 지질사항이 갖는 공학적 중요성 및 지반공학 분야에서의 예측과 실제

주변 지층에 비해 상대적으로 연약한 지층이나 반대로 상대적으로 강성도가 큰 지층이 포함된 경우등을 포함하여 다층구조 지반은 구성지층의 상대적인 특성에 따라 다양한 거동을 보인다. 즉 사소한 지층이 파괴 메카니즘을 주도하거나 큰 영향을 미친다. 따라서 지층의 영향에 의한 파괴 메카니즘의 변화를 규명할 수 있는 이론적인 연구가 필요하다.

LSDKSLOP 해석에서는 황색점토의 두께를 50 cm 로 하여 해석 하였음에도 안전율과 파괴면 형성에 황색 점토의 영향이 뚜렷하였다.

c) 결과의 해석

앞에서 설명한 바와 같이 본 예제의 Carsington 댐은 가상 파괴면상에 예상치 못했던 황색 점토층이 존재하여 댐의 파괴가 발생된 경우로 볼 수 있으며, 황색점토가 residual state 일 때에는 안전율이 급격히 감소하였다. 간극수압을 고려하지 않은 상태에서도 황색점토가 residual state 이면 안전율이 1.044 로 매우 불안한 상태이며, 폭우로 인하여 간극수압이 발생하여 안전율이 1.0 보다 작게 되어 파괴 되었으며, 파괴후에도 변위가 계속 일어나 관측 변위가 계산치 보다 크게 나타난 것으로 판단된다.

7. 결론

이상에서와 같이 Carsington 댐을 KEM ( 프로그램 LSDKSLOP ) 으로 안정해석 하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 황색 점토층의 존재가 Carsington 댐의 안정에 큰 영향을 미친 것으로 판명되었다.

- 황색 점토층의 상태가 residual state 이면 간극수압을 고려하지 않을 경우에도 매우 불안한 상태이며, 간극수압이 발생하여 안전율이 1.0 보다 작아져서 파괴가 일어났다.
- 황색 점토층의 상태가 residual state 일때 계산된 파괴면은 실제 관측 파괴면과 잘 일치하였다.
- 이상의 해석 결과로부터 판단하면 프로그램 LSDKSLOP 는 Carsington 댐과 같은 다층 단면구조의 사면해석에 적합하다.

## 7. 참고문헌

- BAUMANN, J./OCHMANN, H. (1986).  
Erdstatische Sicherheitsbewertung von Erddämmen und Speicherbecken.  
Vorträge Baugrundtagung Nürnberg. DGEG, pp 261-273.
- BOX, M. J. (1965).  
A New Method of Constrained Optimization and a Comparison with other  
Methods. Comp.J. 8, pp 45-52.
- DAVIDON, W. C./NAZARETH, L. (1977)  
OCOPTOR- A Derivative Free Implementation of Davidon's Optimally Cond.  
Method. Argonne National Lab., III (USA).
- FELLENIUS, W. (1927).  
Erdstatische Berechnungen mit Reibung und Kohäsion ( Adhäsion) und unter der  
Annahme kreiszylindrischer Gleitflächen. Verlag Ernst und Sohn, Berlin.
- GUDEHUS, G. (1970).  
Ein statisch und kinematisch korrekter Standsicherheitsnachweis für  
Böschungen. Vorträge Baugrundtagung. DGEG, pp 296-307.
- GUSSMANN, P. (1978).  
Das allgemeine Lamellenverfahren unter besonderer Berücksichtigung von  
äußeren Kräften. Geotechnik 1, pp 68-74.
- GUSSMANN, P. (1982a).  
Kinematical Elements for Soil and Rocks. Proc. 4th intern. Conf. Numerical  
Methods Geomechanics. Edmonton, Canada, pp 33-53.
- GUSSMANN, P. (1982b).  
Application of the Kinematical Element Method to Collapse Problems of Earth  
Structures, IUTAM Conf. Deform. Failure Granular Materials, Delft, pp545-550.
- GUSSMANN, P. (1986).  
Die Methode der Kinematischen Elemente. Mitt. Baugrundinstitut, Universität  
Stuttgart, Heft 26.

- GUSSMANN, P. / OCHMANN H. (1985).  
Probabilistic Theory and Kinematical Element Method. 11th ICSMFE, San Francisco, 2, pp 825-829.
- MORGENSTERN, N. R. / PRICE, V. E. (1965).  
The Analysis of the Stability of general Slip Surfaces. Geotechnique 15, pp 79-93.
- NELDER, J. A. / MEAD, R. (1985).  
A Simplex Method for Function Minimization. The Computer Journal 7. pp 308-313.
- OCHMANN, H. (1988).  
Ebene Grenzzustände von Erdböschungen im stochastischen Sicherheitskonzept. Mitt. des Grundbauinstituts, Uni Stuttgart, Heft 29.
- SCHWEFEL, H. P. (1977).  
Numerische Optimierung mit Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie. Birkhäuser Verlag Basel, Stuttgart.
- STURM, U. / MIKODA, H. (1983).  
Anwendung der statischen Sicherheitstheorie am Beispiel der Grundbruchberechnung. Mitt. des Grundbauinst. TU Berlin, Heft 13.