

# 구름요소의 프로파일 설계에서의 EHL해석의 적용

박 태조\*, 김 경용 (한국과학기술원)

T.J. Park and K.W. Kim (KAIST)

ABSTRACT : This paper shows the effect of axial profile on the elastohydrodynamic lubrication (EHL) behavior of axially profiled cylindrical roller. For two different type of profiles which have nearly similar elastostatic pressure distribution, the EHL results show large differences. Especially the difference in film shape is larger than that of pressure distribution. Therefore, the magnitude of the minimum film thickness should be a major criteria to design the axial profile of the roller and a new design procedure is presented which take into account the minimum film thickness as well as the pressure distribution.

## 1. 서론

원통형 로울러베어링, 인벌류트(Involute) 기어, 원판형 캠과 로울러형 중동자 등과 같은 선접촉의 구름요소의 설계시에 제기되는 해결하기 어려운 문제중의 하나는 반경방향의 하중을 받을 때 접촉면에서 발생하는 높은 접촉응력으로 이것의 크기는 구름요소의 수명에 큰 영향을 미친다(1). 특히, 이와같은 구름요소들은 길이가 유한하기 때문에 로울러의 양단부 부근에서 아주 높은 가장자리응력(Edge stress)이 발생하게 되며, 여기에 약간의 Misalignment만 작용하여도 응력집중상태는 더욱 심해진다. 이러한 국부적인 응력집중은 구름요소의 피로수명을 크게 감소시키게 되므로 로울러베어링의 로울러는 양단부로 갈수록 로울러의 직경을 적당히 작게하여 (이를 프로파일링(Profiling) 이라고 함) 양단부에서의 응력집중을 완화시키고 있다.

지금까지의 로울러의 프로파일을 결정하는 이론적인 방법의 기준은 정지상태에서 Hertz의 이론에 기초를 둔 탄성접촉이론을 이용하여 로울러의 양단부 부근에서의 접촉압력이 크게 되지 않도록 하는 것이었다(2-6). 그러나, 탄성접촉이론에 의한 프로파일이 가장 적합한 프로파일이라고 할 수가 없다. 이는 로울러베어링이 탄성유체윤활(Elastohydrodynamic Lubrication : EHL) 상태로 운전되기 때문에 윤활을 고려하지 않은 단순한 탄성접촉압력은 윤활상태에서의 발생압력과 큰 차이를 보일 뿐만아니라(7, 8), 탄성접촉해석으로는 유막의 크기는 추정할 수도 없다. 특히, 적절한 크기의 최소유막은 베어링면에서의 균일한 응력분포와 함께 베어링이 장시간 성공적으로 운전되기 위해서는 필수적이라고 알려져 있기 때문에 정확한 추정을 요한다(9-11). 따라서, 로울러와 궤도면 사이의 압력분포와 함께 유막의 크기를 정확하게 예측하는 것이 베어링의 수

명을 증대시킬 수 있기 때문에 EHL해석이 필수적이지만 실제로 이를 적용한 예는 아직 보고되지 않고 있다.

본 연구에서는 구름요소의 프로파일 설계에 EHL해석을 처음으로 적용하고자 한다. 이를 위하여 탄성접촉압력분포가 거의 일치하는 서로 다른 두가지의 프로파일을 가지는 로울러가 무한평판위를 운동하는 경우에 대한 EHL해석을 수행하여 압력분포와 유막형상을 서로 비교하고, 프로파일의 변화에 따른 최소유막의 변화도 함께 조사하고자 한다. 이 결과에서, 구름요소의 프로파일 설계에 EHL해석을 적용할 수 있는 새로운 방법을 제시하고자 한다.

## 2. 이론

### 2.1 레이놀즈방정식

로울러의 구름방향이 x 방향일 때, 레이놀즈방정식은 다음식과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} h) \quad (1)$$

여기서, u 는 x 방향으로의 평균속도이다.

윗식을  $X=x/R$ ,  $Y=y/R$ ,  $H=h/R$ ,  $P=p/E$ ,  $\rho=\bar{\rho}/\rho_0$ ,  $\eta=\bar{\eta}/\eta_0$ ,  $U=\eta_0 u/ER$ 과 같은 무차원변수를 사용하여 무차원화하면 다음식과 같이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12U \frac{\partial}{\partial X} (\rho H) \quad (2)$$

### 2.2 윤활유의 상태방정식

압력에 의한 윤활유의 밀도변화(7)와 점도변화의 무차원화된 형태는 각각 다음식과 같다.

$$\rho = 1 + \frac{0.6EP}{1+1.7EP} \quad (3)$$

$$\eta = \exp(GP) \quad (4)$$

여기서  $G=aE$ 이며  $E$ 의 단위는  $Gpa$ 이다.

### 2.3 유막두께식

EHL상태에서의 유막두께는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$h(x,y) = h_0 + h_g(x,y) + h_v(x,y) \quad (5)$$

여기서,  $h_0$ 는 상수이고  $h_g(x,y)$ 는 변형되지 않은 상태에서의 로울러형상에 따른 유막이며  $h_v(x,y)$ 는 발생압력에 의한 탄성변형량이다.

실제의 로울러베어링에서 많이 채용하고 있는 프로파일링 형태는 Fig.1(a),(b)와 같이 Crown과 Dub-off이며, 이때  $h_g(x,y)$ 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$h_g(x,y) = x/2R^2 + (y^2-y_c^2)/2R_c \quad (6)$$

$$h_g(x,y) = x/2R^2 + (y-y_d)^2/2R_d \quad (7)$$

프로파일링을 하지 않은 위치에서는 식(6),(7)의 오른쪽 두번째 항은 각각 0이다.

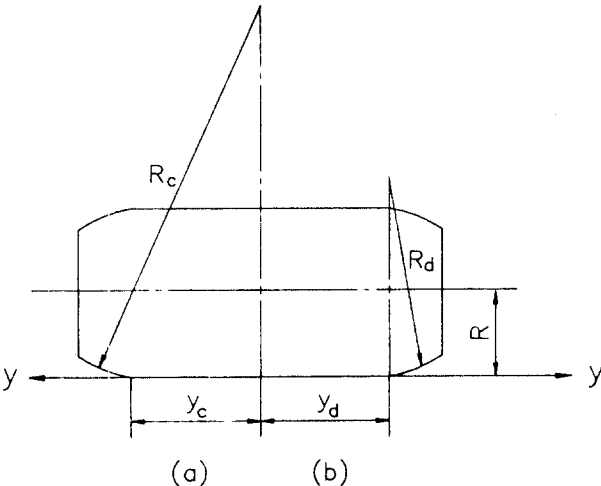


Fig.1 Roller axial profile schematic.  
(a) Crown, (b) Dub-off

입의 위치에서의 탄성변형량은 전윤활영역에 작용하는 압력의 영향을 중첩하여 다음식과 같이 나타낼 수 있다 [12, 13].

$$h_v(x,y) = \sum \sum D_{ijkl} p_{kl} \quad (8)$$

여기서,  $D_{ijkl}$ 은 단위압력이 작용하는 미소압력요소내에 절점  $(k,l)$ 이 있을 때, 절점  $(i,j)$ 에서의 탄성변형량을 나타내는 영향계수이다.

식(6),(7)과 식(8)을 식(5)에 대입하여 무차원화하면 프로파일이 Crown 및 Dub-off인 경우의 유막은 각각 다음의 식(9),(10)과 같다.

$$H = H_0 + X^2/2 + (Y^2-Y_c^2)/2R_c^* + \sum \sum D_{ijkl} P_{kl} \quad (9)$$

$$H = H_0 + X^2/2 + (Y-Y_d)^2/2R_d^* + \sum \sum D_{ijkl} P_{kl} \quad (10)$$

여기서,  $H=h/R$ ,  $H_0=h_0/R$ ,  $Y_c=y_c/R$ ,  $R_c^*=R_c/R$ ,  $Y_d=y_d/R$ ,

$R_d^*=R_d/R$ ,  $D_{ijkl}=D_{ijkl}/R$ 이다.

### 2.4 하중조건식

하중은 유막내에서 발생하는 압력의 합과 같으며, 이의 무차원 형태는 다음식과 같다.

$$W = w/ER^2 = \iint P dXdY \quad (11)$$

### 2.5 경계조건

(1) 계산영역의 경계에서는  $P = 0$ 이다.

(2) 출구측에서는 레이놀즈의 경계조건( $P = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial Y} = 0$ )을 만족하도록 한다.

### 3. 수치해석

본 연구에서는 지금까지의 3차원 EHL해석에 있어서 수치해석과정이 가장 체계적이고 수렴성도 우수하다고 알려진 유한차분법과 뉴우튼-합성방법을 사용하여 [12, 13] EHL 해석을 수행하고자 한다. 완전히 불균일한 격자계를 사용하는 경우, 식(2)의 절점  $(i,j)$ 에 대한 유한차분형태는 다음과 같다.

$$f_{i,j} = A_{i+1,j}(P_{i+1,j}-P_{i,j}) - A_{i-1,j}(P_{i,j}-P_{i-1,j}) + B_{i,j}(A_{i,j+1}(P_{i,j+1}-P_{i,j}) - A_{i,j-1}(P_{i,j}-P_{i,j-1})) - 12U(\rho_{i+1/2,j}H_{i+1/2,j} - \rho_{i-1/2,j}H_{i-1/2,j}) \quad (12)$$

( $i=2, \dots, M_j, j=2, \dots, N-1$ )

여기서,

$$A_{i+1,j} = \frac{\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j}^3}{\Delta X_i \eta_{i+1/2,j}}$$

$$A_{i,j+1} = \frac{\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2}^3}{\Delta Y_j \eta_{i,j+1/2}}$$

$$B_{i,j} = \frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \quad (13)$$

$$H_{i+1/2,j} = 0.5(H_{i+1,j} + H_{i,j})$$

$$\rho_{i+1/2,j} = 0.5(\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j})$$

$$\eta_{i+1/2,j} = \exp(0.5G(P_{i,j} + P_{i-1,j}))$$

$$\Delta X_i = X_{i+1} - X_i, \quad \Delta Y_j = Y_{j+1} - Y_j, \quad \dots$$

$M_j$ 는 각  $j$ 에서 레이놀즈의 경계조건을 만족시키는 X방향의 절점의 수이다 [12, 13].

한편, 식(11)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = 0.25 \sum \sum P_{ij} (\Delta X_i + \Delta X_{i-1})(\Delta Y_j + \Delta Y_{j-1}) \quad (14)$$

이상에서, 미지수는  $P_{ij}$  ( $i=2, \dots, M_j, j=2, \dots, N-1$ )와  $H_0$ 로서 식(12),(14)의 식의 수와 동일하므로 쉽게 구할 수 있다.

식(12)에 뉴우튼-랩슨방법을 적용하면,

$$\sum_k \sum_l \left( \frac{\partial f_{i,j}}{\partial P_{k,l}} \right)^n (P_{k,l}^{n+1} - P_{k,l}^n) + \left( \frac{\partial f_{i,j}}{\partial H_0} \right)^n (H_0^{n+1} - H_0^n) = -f_{i,j} \quad (15)$$

(i, k=2, \dots, M\_j, j, l=2, \dots, N-1)

여기서 n 은 반복계산회수이며 편미분계수는 참고문헌 [12, 13]의 부록과 같은 방법으로 구할 수가 있다.

따라서, 식(14), (15)를 연립시켜 풀면 (n+1)번째의 P<sub>i,j</sub> 와 H<sub>0</sub> 를 구할 수 있다[12, 13].

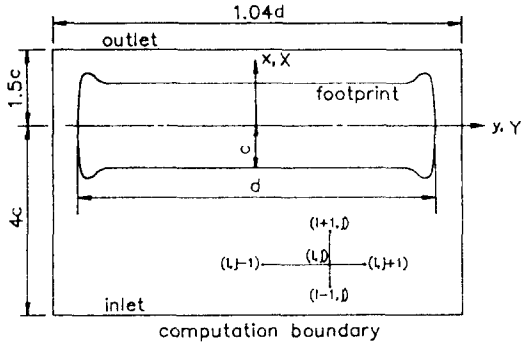


Fig. 2 Computational boundaries and grids.

Fig. 2는 수치계산에 사용한 격자계와 계산영역의 경계를 나타낸 것이다. 탄성접촉부[4]의 접촉중양부에서의 반복 폭과 길이를 각각 c, d라고 하면, 계산영역의 입구부와 출구부경계는 각각 -4c와 1.5c에, 길이방향경계는 프로파일링에 따라서 1.01d-1.04d에 두었다. 구름방향으로 압력 Spike가 발생하는 영역과 길이방향으로 프로파일 시작점부근에는 격자의 간격을 조밀하게, 구름방향으로의 입구부와 길이방향으로의 중앙부에는 넓게 두었다. 본 해석에 사용된 원동형로울러의 프로파일링 시작위치는 프로파일의 형태에 관계없이 |Y|=0.7로 고정시켰으며, 로울러의 재질은 Steel로서 E=220Gpa이다. 수치해석과정과 수렴판정조건은 참고문헌[12, 13]과 동일하다.

#### 4. 결과 및 고찰

Fig. 3은 Fig. 1에 나타난 두가지 프로파일 형태인 R<sub>c</sub>\*=100인 Crown과 R<sub>d</sub>\*=0.3인 Dub-off에 대해서 무차원하중 W=1.85x10<sup>-5</sup>인 경우에 대한 탄성접촉해석[4]으로 구한 접촉폭 중앙부에서 로울러 길이방향으로의 접촉압력분포를 비교하여 나타낸 것이다. 프로파일링이 서로 다르지만 주어진 하중에 대하여 탄성접촉압력분포는 거의 동일하다.

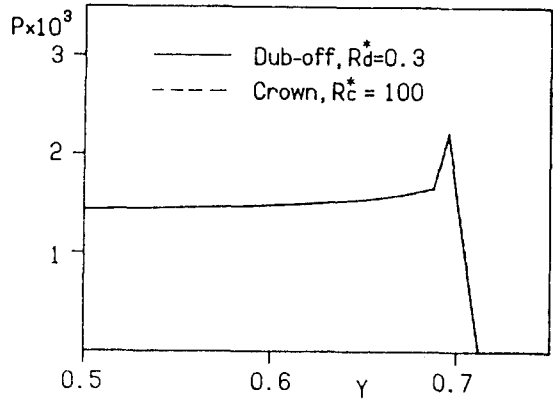


Fig. 3 Comparison of axial elastostatic pressure distribution at X=0 (Ref. [4]), W=1.85x10<sup>-5</sup>

Fig. 4와 Fig. 5는 각각 Fig. 3의 두가지의 프로파일에 대해서 U=2x10<sup>-11</sup>, G=2700, W=1.85x10<sup>-5</sup>인 경우의 프로파일링 시작점 부근에서의 EHL상태에서의 등압선과 유막의 등고선을 서로 비교하여 나타낸 것이다. 이들 그림에서의 + 표시는 프로파일링 시작위치인 X=0, Y=Y<sub>c</sub>=Y<sub>d</sub>인 점을 나타낸다. 탄성접촉압력은 거의 동일하지만 프로파일링 시작위치 부근에서의 EHL해석에 의한 압력분포와 유막형상은 상당한 차이를 보이고 있다. 특히, 압력분포에 비하여 유막

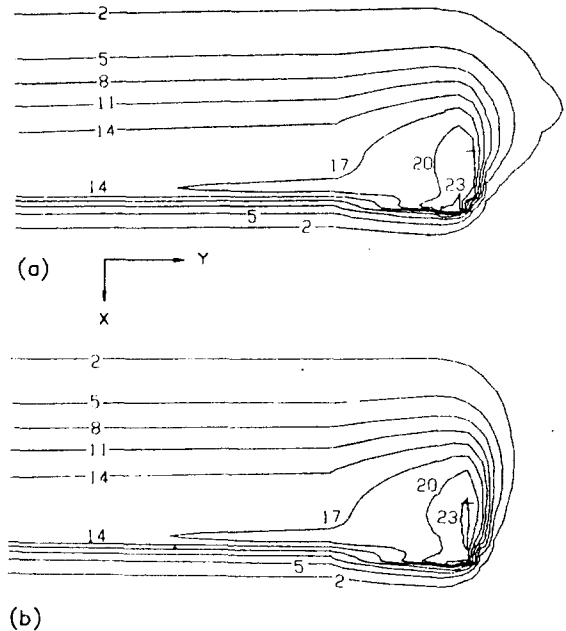


Fig. 4 Contour plots of dimensionless pressure (Px10<sup>4</sup>) U=2x10<sup>-11</sup>, G=2700, W=1.85x10<sup>-5</sup>, |Y<sub>c</sub>|=|Y<sub>d</sub>|=0.7 (a) Crown, R<sub>c</sub>\*=100, (b) Dub-off, R<sub>d</sub>\*=0.3

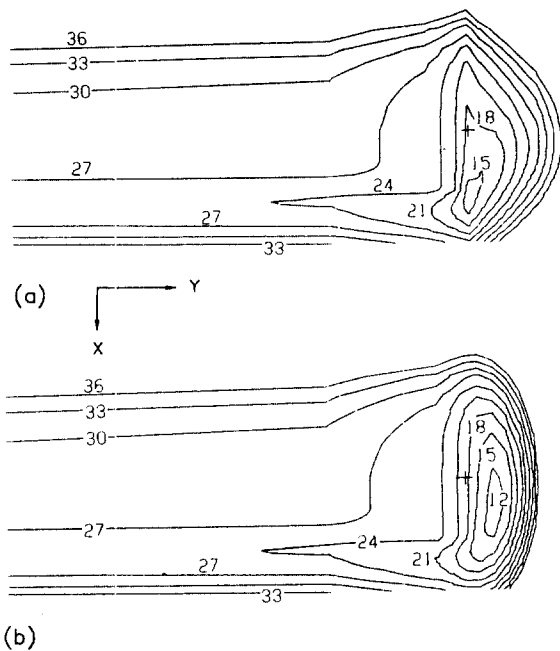


Fig. 5 Contour plots of dimensionless film thickness ( $Hx10^5$ ),  $U=2 \times 10^{-11}$ ,  $G=2700$ ,  $W=1.85 \times 10^{-5}$ ,  $|Y_c|=|Y_d|=0.7$ , (a) Crown,  $R_c^*=100$ , (b) Dub-off,  $R_d^*=0.3$

형상의 차이가 더욱 큰 것이 특징적으로 최소유막의 크기가 Crown인 경우  $H_m=1.344 \times 10^{-5}$ 인 반면에 Dub-off인 경우에는  $H_m=1.035 \times 10^{-5}$ 로 차이가 아주 크다. 프로파일의 차이에도 불구하고 최대압력과 최소유막은 로울러의 길이방향 중앙부가 아니라 모두 이 영역에서 발생하고 있다.

동일한 프로파일 형태일지라도 프로파일의 크기에 의한 최소유막의 크기 변화를 나타내는 하나의 예를 Fig. 6에 나

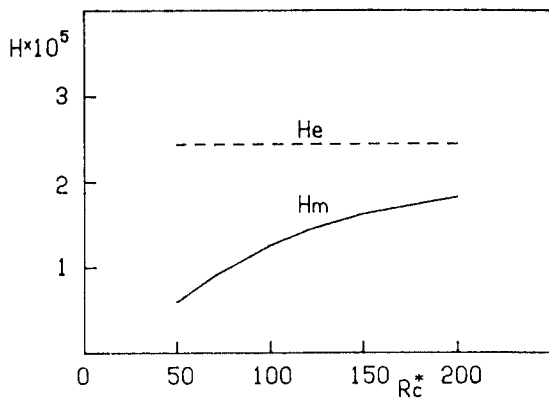


Fig. 6 Variation of minimum film thickness with dimensionless crown radius  $U=2 \times 10^{-11}$ ,  $G=2700$ ,  $W=1.85 \times 10^{-5}$ ,  $|Y_c|=0.7$

타내었다. Crown 프로파일링을 한 로울러에서  $U=2 \times 10^{-11}$ ,  $G=2700$ ,  $W=1.85 \times 10^{-5}$ 인 경우에 무차원 Crown 반경  $R_c^*$ 의 변화에 대한 최소유막  $H_m$ 과  $H_e$ 의 변화를 나타낸 것이다. 여기서,  $H_e$ 는 로울러 길이방향 중앙부에서 구름방향으로의 국부적인 최소유막의 크기로서 프로파일링 시작점이 중앙부에서 멀리 떨어져 있는 경우에는 프로파일링의 영향을 거의 받지 않아 2차원 해석결과와 거의 동일하다는 것이 확인되었다<sup>[13]</sup>. 그러나, 프로파일링을 한 원통형로울러에서 최소유막두께  $H_m$ 은 항상 로울러 양단부의 프로파일링부에서 발생하며 그 크기는 프로파일링부의 형상에 따라 아주 크게 차이를 보인다.  $H_m$ 은  $R_c^*$ 가 작을수록(즉, 프로파일링이 급격할수록) 작아진다. 따라서, 로울러베어링의 프로파일링은 로울러 양단부에서의 응력집중을 완화시키기 위해서 뿐만아니라 베어링의 피로수명에 큰 영향을 미치는 최소유막의 크기<sup>[9-11]</sup>를 크게 하기 위해서도 필수적이며, 최소유막의 크기도 프로파일을 결정하는 중요한 설계기준으로 사용할 수가 있음을 알 수 있다.

한편, EHL해석은 문계 자체의 아주 강한 비선형성 때문에 무차원하중  $W$ 가 아주 큰 경우에 대한 결과는 2차원 해석인 경우에 대해서도 Houpert & Hamrock<sup>[14]</sup>에 의해서 최근해야 겨우 가능하게 되었다. 그들은 구름방향으로 불균일한 격자계를 사용하고 레이놀즈방정식을 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 해석하였으나, 많은 수의 격자가 소요되었다. 앞에서의 결과에 나타난 바와 같이 프로파일링 시작점 부근에서는 무한장인 경우에 비하여 EHL 조건이 더욱 가혹하기 때문에 구름방향만으로도 무한장해석에 비하여 더욱 많은 수의 격자가 필요하며 여기에 길이방향으로의 격자도 고려해야 하기 때문에 가혹한 조건에 대한 EHL 해석은 현실적으로 힘들다. 따라서, 다음에 제시하는 방법으로 구름요소의 프로파일 설계에 EHL해석을 적용할 수가 있다. 먼저, 계산량을 줄이기 위하여 주어진 하중조건에 대해서 탄성접촉해석으로 양단부 부근에서의 압력이 크게 되지 않는 프로파일을 몇가지 선정한다. 그 다음, 이들 프로파일에 대한 3차원 EHL해석을 수행하여 참고문헌<sup>[12,13]</sup>의 방법과 같이 무차원변수인  $U$ ,  $G$  및  $W$ 의 변화에 따른  $H_m$ 의 거동을 조사하여  $H_m$ 이 가장 크게 되는 프로파일을 선택하면 된다.

## 5. 결론

본 연구에서는 지금까지 구름요소의 프로파일 설계에 사용하고 있는 탄성접촉해석에 의한 설계방법과는 달리 EHL해석방법을 처음으로 적용하였다. EHL해석은 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 사용하여 수행하였다. 탄성접촉 압력분포가 동일한 경우일지라도 프로파일의 형태와 크기에 따라서 최소유막의 크기는 크게 차이가 나므로 최소유막의 크기도 구름요소의 프로파일을 결정하는 하나의 조건

으로 사용되어야 한다. 또한, 실제의 사용조건에 이것을 적용할 수 있는 방법을 제시하였다.

### 참고문헌

1. Lundberg, G. and Palmgren, A., 1947, "Dynamic Capacity of Rolling Bearings", Acta Polytech., Mech. Eng. Sci., Vol. 1, No. 1.
2. Oh, K.P. and Trachman, E.G., 1976, "A Numerical Procedure for Designing Profiled Rolling Elements", J. of Lub. Tech., Vol. 98, pp. 547-552.
3. Hartnett, M.J., 1979, "The Analysis of Contact Stresses in Rolling Element Bearings", J. of Lub. Tech., Vol. 101, pp. 105-109.
4. Heydari, M. and Gohar, R., 1979, "The Influence of Axial Profile on Pressure Distribution in Radially Loaded Rollers", J. of Mech. Eng. Sci., Vol. 21, No. 6, pp. 381-388.
5. Reusner, H., 1987, "The Logarithmic Roller Profile - The Key to Superior Performance of Cylindrical and Taper Roller Bearings", Ball Bearing Journal (SKF), Vol. 230, pp. 2-10.
6. Lösche, T., 1987, "Capacity Increase due to Modified Line Contact in Cylindrical and Tapered Roller Bearings", Ball and Roller Bearing Eng. (FAG), pp. 4-9.
7. Dowson, D. and Higginson, G.R., 1977, "Elastohydrodynamic Lubrication", SI edition, Pergamon Press.
8. Hamrock, B.J. and Dowson, D., 1981, "Ball Bearing Lubrication: The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts", John Wiley & Sons.
9. Skurka, J.C., 1970, "Elastohydrodynamic Lubrication of Roller Bearings", J. of Lub. Tech., Vol. 92, pp. 281-291.
10. Danner, C.H., 1970, "Fatigue Life of Tapered Roller Bearings under Minimal Lubricant Films", ASLE Trans., Vol. 13, pp. 241-251.
11. Tallian, T.E., 1981, "Rolling Bearing Life Modifying Factors for Film Thickness, Surface Roughness and Friction", J. of Lub. Tech., Vol. 103, pp. 509-520.
12. Park, T.J. and Kim, K.W., 1990, "A Numerical Analysis of the Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts", WEAR, Vol. 136, pp. 299-312
13. 박 태조, 1989, "3차원 탄성유체윤활 문제의 수치해석", 박사학위논문, 한국과학기술원

14. Houpert, L.G. and Hamrock, B.J., 1986, "Fast Approach for Calculating Film Thickness in Elastohydrodynamically Lubricated Contacts at High Loads", J. of Tribology, Vol. 108, pp. 411-420.

### 기호설명

- c :  $y = 0$ 에서의 탄성접촉부의 반폭
- d : 탄성접촉부의 길이
- $D_{ijk1}$  : 탄성변형량계산에 사용되는 무차원 영향계수
- E : 유효탄성계수,  $2/E = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$
- G : 무차원 재료변수,  $G = \alpha E$
- h : 유막두께
- H : 무차원 유막두께,  $h/R$
- p : 압력
- P : 무차원 압력,  $p/E$
- R : 로울러의 반경
- $R_c, R_d$  : 로울러의 Crown, Dub-off 반경 (Fig. 1)
- u : 로울러와 궤도면의 평균속도
- U : 무차원 속도변수,  $U = \eta_0 u / RE$
- x, y : 로울러의 구름방향 및 길이방향 좌표계
- $y_c, y_d$  : Fig. 1 참조
- w : 하중
- W : 무차원 하중변수,  $W = w / R^2 E$
- $\alpha$  : 윤활유의 압력-점도 지수
- $\eta_0, \bar{\eta}$  : 압력이 대기압, p인 경우의 윤활유의 점도
- $\rho_0, \bar{\rho}$  : 압력이 대기압, p인 경우의 윤활유의 밀도