

내부공진을 가진 보의 비선형 강제진동해석

Nonlinear Analysis of a Forced Beam with Internal Resonances

오 이 원경* 소 강영**
Won Kyoung Lee Kang Young Soh

1. 서론

양단이 고정된 보가 변형할 때에는 중간 평면의 신장을 수반하게 된다. 운동의 진폭이 증가함에 따라 이 신장이 보의 동적 응답에 미치는 영향은 심각하게 된다. 이러한 현상은 용력과 변형도와의 관계가 선형적이라 하더라도 변형도와 변위와의 관계식은 비선형이 되며 결국은 보의 비선형 운동방정식을 낳게 된다. 보는 연속계이지만 근사를 위하여 다자유도계로 간주할 수 있다. 비선형 다자유도계에 있어서는 선형화된 계의 고유진동수끼리 적절한 관계를 가질 때 내부공진이 발생 할 수 있다.

양단이 고정된 끝은 보의 비선형 동적응답이 그동안 많이 연구되어 오고 있으며(1-7), 집중질량을 가지고 직각으로 굽은 보의 해석을 위하여 내부공진을 고려한 해석적 혹은 실험적 연구가 이루어져 왔다(8-10). 그 중에서도 Nayfeh 등은(5-7) 조화가진 하의 핀과 격쇠로 고정된(hinged-clamped) 보의 정상상태응답을 해석하기 위해 두 모드 사이의 내부공진을 고려하였다.

이 연구에서는 세 모드 사이의 내부공진을 고려하여 강제진동 중인 보의 비선형 해석을 다루고자 한다. 이 문제에 관심을 갖게 된 동기는 "연속계의 비선형해석에서 더 많은 모우드를 포함시키면 어떤 결과를 낳게 될 것인가?" 라는 질문에서 생겨난 것이다.

갤러킨 법을 이용하여 비선형 편미분 방정식과 경계 조건으로 표현되는 이 문제를 연립 비선형 상미분 방정식으로 변환한다. 다중시간법(the method of multiple scales)을 이용하여 이 상미분 방정식을 정상상태에서의 세 모우드의 진폭과 위상에 대한 연립비선형 대수방정식으로 변환한다. 이 대수방정식을 수치적으로 풀어 정상상태 응답을 구하고 Nayfeh 등(5)의 결과와 비교한다.

2. 보의 운동 방정식

핀과 격쇠로 고정된 보가 Fig. 1에 나타나 있다. 이 보의 운동방정식과 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다(5).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \epsilon \left(-2c \frac{\partial w}{\partial t} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p \right) \quad (1a)$$

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1b, c)$$

$$w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (1d, e)$$

여기서

$$H = \nu \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

그리고 $w(x, t)$ = 보의 변형; x = 축방향 좌표; t = 시간; ϵ = 방정식의 무차원화에 따른 작은 매개변수; c = 감쇠계수; $p(x, t)$ = 외력; H = 중간평면의 비선형 신장에 기인한 항; ν = 보의 지지조건에 따른 것으로 여기선 $1/2l$; l = 보의 길이 이다.

* 영남대학교 정밀기계공학과

** 영남대학교 대학원 정밀기계공학과

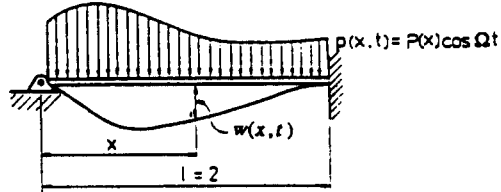


Fig. 1. A schematic diagram of a hinged-clamped beam

갤러킨 법을 이용하여 식 (1)로 주어지는 문제를 풀기 위해 변형을 다음과같이 표현할 수 있다고 가정하자.

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \phi_m(x) \quad (2)$$

여기서 u_m 은 일반화된 좌표이며 ϕ_m 은 다음의 고유치문제의 고유함수이다.

$$\frac{d^4 \phi_m}{dx^4} - \omega_m^2 \phi_m = 0 \quad (3a)$$

$$\phi_m(0) = 0, \quad \frac{d^2 \phi_m(0)}{dx^2} = 0, \quad (3b, c)$$

$$\phi_m(l) = 0, \quad \frac{d\phi_m(l)}{dx} = 0, \quad (3d, e)$$

여기서 ω_m 은 고유진동수이다.

식 (2)를 식 (1)에 대입하고 양변에 ϕ_n 을 곱하고 x 에 대해서 적분한 후 고유함수의 직교성을 이용하여 정리하면 다음과 같은 연립 비선형 비자율 상미분 방정식을 얻게 된다.

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_n^2 u_n = \epsilon \left[-2c_n \frac{du_n}{dt} + F_n \cos \Omega t + \sum_{m, p, q=1}^{\infty} \alpha_{nmpq} u_m u_p u_q \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

여기서

$$c_n = \int_0^l c \phi_n^2 dx,$$

$$\alpha_{nmpq} = \nu \int_0^l \phi_n \frac{d^2 \phi_q}{dx^2} dx \int_0^l \frac{d\phi_m}{dx} \frac{d\phi_p}{dx} dx,$$

$$F_n = \int_0^l P(x) \phi_n \nu dx,$$

$$p(x, t) = P(x) \cos \Omega t$$

이 식을 유도하는 도중에 감쇠항은 각 모드에 독립적으로 기여한다고(modal damping) 가정하였으며 외력은 조화가진으로 가정하였다. 모든 시간에 걸쳐서 타당한(uniformly valid) 근사해를 구하기 위하여 다중시간법(the method of multiple scales)을 사용하기로 한다.

우선 u_n 을 다음과 같이 정의된 여러 시간들의 함수로

가정하고

$$T_0 = \varepsilon n t$$

다음과 같이 전개될 수 있다고 가정한다.

$$u_n(t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_{nj}(T_0, T_1, \dots), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5a)$$

이 때 시간에 관한 미분은 다음과 같이 변환된다.

$$d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (5b)$$

$$d^2/dt^2 = D_0^2 + \varepsilon 2D_0 D_1 + \dots, \quad (5c)$$

여기서 D_0 및 D_1 등은 다음과 같다.

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}, \dots \quad (5d)$$

식 (5)를 식 (4)에 대입하고 ε 의 동일한 차수의 계수를 같게 두면 다음을 얻을 수 있다.

$$\varepsilon^0 : D_0^2 u_{n0} + \omega_n^2 u_{n0} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 u_{n1} + \omega_n^2 u_{n1} = -2D_0 D_1 u_{n0} - 2c_n D_0 u_{n0} + F_n \cos \Omega T_0 + \sum_{m, p, q=1}^{\infty} \alpha_{nmpq} u_{m0} u_{p0} u_{q0}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\varepsilon^2 : \quad (7)$$

식 (6)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$u_{n0} = A_n(T_1, T_2, \dots) \exp(i\omega_n T_0) + cc, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

여기서 cc 는 앞 항의 공역복소수이다. 현재로서는 A_n 이 미지수이지만 다음 단계의 근사에선 해의 유계조건 즉 불멸항(secular terms)이 소거되어야 한다는 조건으로부터 구해진다. 식 (8)를 식 (7)에 대입하면 다음을 얻게된다.

$$D_0^2 u_{n1} + \omega_n^2 u_{n1} = -2i\omega_n(D_1 A_n + c_n A_n) \exp(i\omega_n T_0) + \frac{1}{2} F_n \exp(i\Omega T_0) + \sum \alpha_{nmpq} \{A_m A_p A_q \exp[i(\omega_m + \omega_p + \omega_q)T_0] + A_m A_p A_q \exp[i(\omega_m - \omega_p - \omega_q)T_0] + A_m A_p A_q \exp[i(\omega_m - \omega_p + \omega_q)T_0] + A_m A_p A_q \exp[i(\omega_m - \omega_p - \omega_q)T_0]\} + cc, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

u_{n1} 으로부터 불멸항을 소거하기 위해선 $\exp(i\omega_n T_0)$ 의 계수가 0 이 되도록 A_n 이 결정되어야 한다. 이 계수는 $\Omega \approx \omega_n$ 일때 주공진 F_n 을 포함하며, ω_n 이 다음의 조건

$$\omega_n \approx i\omega_n \pm \omega_p \pm \omega_q \quad (\text{모든 부호가 음이 되는 경우는 제외}) \quad (10)$$

을 만족할 때 내부공진과 관련된 비선형항을 포함하게 된다.

3. 정상상태 응답

고유치 문제 (3)의 고유함수는 다음과 같다.

$$\varphi_n = E_n [\sin(\alpha_n x) - R_n \sinh(\alpha_n x)]$$

여기서

$$E_n = \left[\frac{1}{2} (1 - R_n^2) + (R_n^2 \sinh 2\alpha_n l - \sin 2\alpha_n l) / 4\alpha_n \right]^{-1/2}$$

$$R_n = \sin \alpha_n l / \sinh \alpha_n l, \quad a_n = (\omega_n)^{1/2} / l$$

그리고 α_n 은 다음 방정식 $\tan \alpha_n l = \tanh \alpha_n l$ 의 근이 된다. 편의상 $l = 2$ 로 두고 세번째 까지의 근과 고유진동수 $\omega_n = (a_n l)^2$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\alpha_1 l = 3.927 \quad \text{그리고} \quad \omega_1 = 15.421$$

$$\alpha_2 l = 7.069 \quad \text{그리고} \quad \omega_2 = 49.970$$

$$\alpha_3 l = 10.210 \quad \text{그리고} \quad \omega_3 = 104.24$$

이 고유진동수와 내부공진조건 (10)을 관찰하면 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 과 $\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$ 임을 알 수 있으며 이탈변수(detuning parameter)를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\omega_2 = 3\omega_1(1 + \varepsilon \sigma_{12}) \quad (11a)$$

$$\omega_3 = (\omega_1 + 2\omega_2)(1 + \varepsilon \sigma_{13}) \quad (11b)$$

여기서

$$\varepsilon \sigma_{12} = 0.0801, \quad \varepsilon \sigma_{13} = -0.0964$$

이 연구에서는 $\Omega \approx \omega_s$ 인 경우 즉 주공진만을 고려하기 위하여 이탈변수를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\Omega = \omega_s(1 + \varepsilon \sigma_s), \quad \text{for } s = 1, 2, \dots \quad (12)$$

공진조건 (11)과 (12)를 식 (9)에 대입하고 불멸항을 소거하면 다음을 얻을 수 있다.

$$-2i\omega_1(A_1' + c_1 A_1) + A_1 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{1j} A_j \bar{A}_j + q_3 \bar{A}_1^2 A_2 \exp(i3\omega_1 \sigma_{12} T_1) + q_7 \bar{A}_2^2 A_3 \exp(i(\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} T_1) + \frac{1}{2} F_1 \delta_{1s} \exp(i\Omega_2 \omega_1 T_1) = 0 \quad (13a)$$

$$-2i\omega_2(A_2' + c_2 A_2) + A_2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{2j} A_j \bar{A}_j + q_6 A_1^3 \exp(-i3\omega_1 \sigma_{12} T_1) + q_8 \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \exp(i(\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} T_1) + \frac{1}{2} F_2 \delta_{2s} \exp(i\Omega_2 \omega_2 T_1) = 0 \quad (13b)$$

$$-2i\omega_3(A_3' + c_3 A_3) + A_3 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{3j} A_j \bar{A}_j + q_9 A_1 A_2^2 \exp(-i(\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} T_1) + \frac{1}{2} F_3 \delta_{3s} \exp(i\Omega_2 \omega_3 T_1) = 0 \quad (13c)$$

$$-2i\omega_n(A_n' + c_n A_n) + A_n \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{nj} A_j \bar{A}_j + \frac{1}{2} F_n \delta_{ns} \exp(i\Omega_2 \omega_n T_1) = 0, \quad n \geq 4 \quad (13d)$$

여기서 계수 γ_{nj} 와 q_k 는 부록에 주어지며, δ_{ns} 는 Kronecker delta이다. 식 (13)을 풀기 위해 A_n 을 다음과 같이 두면 편리하다.

$$A_n = \frac{1}{2} a_n \exp(i\omega_1 \beta_n). \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

여기서 a_n 과 β_n 은 실수이다. 식 (14)를 식 (13)에 대입하고 실수부와 허수부를 분리하면 다음을 얻게된다.

$$n = 1, 2, 3 : \quad \omega_1(a_1' + c_1 a_1) - \frac{1}{8}(q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 + q_7 a_2^2 a_3 \sin \mu_3)$$

$$-\frac{1}{2} F_1 \delta_{1s} \sin \mu_2 = 0 \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \omega_1^2 a_1 \beta_1' + \frac{1}{8} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1 \\ + q_7 a_2^2 a_3 \cos \mu_3 + q_{10} a_1 a_3^2 + a_1 \sum_{j=4}^{\infty} \gamma_{1j} a_j^2) \\ + \frac{1}{2} F_1 \delta_{1s} \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 (a_2' + c_2 a_2) + \frac{1}{8} (q_6 a_1^3 \sin \mu_1 \\ - q_8 a_1 a_2 a_3 \sin \mu_3) - \frac{1}{2} F_2 \delta_{2s} \sin \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (15c)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 a_2 \beta_2' + \frac{1}{8} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 + q_6 a_1^3 \cos \mu_1 \\ + q_8 a_1 a_2 a_3 \cos \mu_3 + q_{11} a_2 a_3^2 + a_2 \sum_{j=4}^{\infty} \gamma_{2j} a_j^2) \\ + \frac{1}{2} F_2 \delta_{2s} \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (15d)$$

$$\begin{aligned} \omega_3 (a_3' + c_3 a_3) + \frac{1}{8} q_9 a_1 a_2^2 \sin \mu_3 - \frac{1}{2} F_3 \delta_{3s} \sin \mu_2 \\ = 0 \end{aligned} \quad (15e)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_3 a_3 \beta_3' + \frac{1}{8} (q_9 a_1 a_2^2 \cos \mu_3 + q_{12} a_1^2 a_3 + q_{13} a_2^2 a_3 \\ + q_{14} a_3^3 + a_3 \sum_{j=4}^{\infty} \gamma_{3j} a_j^2) + \frac{1}{2} F_3 \delta_{3s} \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (15f)$$

$$n \geq 4: \quad a_n' + c_n a_n - \frac{1}{2} F_n \delta_{ns} \sin \mu_2 = 0 \quad (15g)$$

$$\omega_n \omega_1 \beta_n' a_n + \frac{1}{8} a_n \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{nj} a_j^2 + \frac{1}{2} F_n \delta_{ns} \cos \mu_2 = 0 \quad (15h)$$

여기서

$$\mu_1 = \omega_1 (3\sigma_{12} T_1 - 3\beta_1 + \beta_2), \quad (16a)$$

$$\mu_2 = \omega_s (\sigma_2 T_1 - \beta_s), \quad (16b)$$

$$\mu_3 = (\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} T_1 + \omega_1 \beta_3 - 2\omega_1 \beta_2 - \omega_1 \beta_1 \quad (16c)$$

Nayfeh 등(5)의 결과와 비교하기 위하여 이 연구에서는 두 경우 즉 $s = 1$ 및 2인 경우만을 생각해 보자.

경우 I, $\Omega \approx \omega_1$ ($s = 1$) 일 때

식 (15g)로부터 다음 식을 얻게 된다.

$$a_n' + c_n a_n = 0, \quad n \geq 4.$$

위의 식은 다음의 결과를 낳게 된다.

$$a_n \propto \exp(-ic_n T_1), \quad n \geq 4.$$

따라서 a_1, a_2 및 a_3 를 제외하고는 모든 a_n 은 충분히 시간이 지나면 소멸하고 만다. 우리는 시간이 충분히 지나고 난 후의 해 즉 정상상태 해에만 관심이 있으므로 이 a_n ($n \geq 4$)을 논의에서 제외하면 식(15a)~(15f)는 진폭 a_n 과 위상 μ_n 에 대한 연립 자율 상미분 방정식을 얻을 수 있다. 이 미분방정식으로부터 $a_1' = a_2' = a_3' = \mu_1' = \mu_2' = \mu_3' = 0$ 로 두면 다음의 대수 방정식으로부터 정상상태 응답을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_1 c_1 a_1 - \frac{1}{8} (q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 + q_7 a_2^2 a_3 \sin \mu_3) \\ - \frac{1}{2} F_1 \sin \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \sigma_2 a_1 + \frac{1}{8} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1 \\ + q_7 a_2^2 a_3 \cos \mu_3 + q_{10} a_1 a_3^2) + \frac{1}{2} F_1 \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\omega_2 c_2 a_2 + \frac{1}{8} (q_6 a_1^3 \sin \mu_1 - q_8 a_1 a_2 a_3 \sin \mu_3) = 0 \quad (17c)$$

$$3\omega_1 \omega_2 a_2 (\sigma_2 - \sigma_{12}) + \frac{1}{8} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 + q_6 a_1^3 \cos \mu_1$$

$$+ q_8 a_1 a_2 a_3 \cos \mu_3 + q_{11} a_2 a_3^2) = 0 \quad (17d)$$

$$\omega_3 c_3 a_3 + \frac{1}{8} q_9 a_1 a_2^2 \sin \mu_3 = 0 \quad (17e)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_3 a_3 [7\sigma_2 - 6\sigma_{12} - (\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} / \omega_1] + \frac{1}{8} (q_9 a_1 a_2^2 \cos \mu_3 \\ + q_{12} a_1^2 a_3 + q_{13} a_2^2 a_3 + q_{14} a_3^3) = 0 \end{aligned} \quad (17f)$$

위의 대수방정식을 관찰하면 a_1, a_2 및 a_3 는 0이 될 수 없음을 알 수 있다. 식 (2)를 이용하면 정상상태에서의 보의 변형을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = a_1 \cos(\Omega t - \mu_2) \phi_1(x) + a_2 \cos(3\Omega t + \mu_1 - 3\mu_2) \phi_2(x) + a_3 \cos(7\Omega t + 2\mu_1 - 7\mu_2 + \mu_3) \phi_3(x) + O(\varepsilon) \quad (18)$$

부록으로부터 계수 $q_7 \sim q_{14}$ 은 첫째 모우드와 둘째 모우드 뿐만 아니라 셋째 모우드의 영향을 받게 됨을 알 수 있다. 따라서 식 (17)에서 q_7, q_8, q_{10} 및 q_{11} 을 0으로 두면, 두 모우드 만의 내부공진 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 만을 고려한 Nayfeh 등(5)이 얻은 것과 같은 다음의 방정식을 얻게 된다.

$$\omega_1 c_1 a_1 - \frac{1}{8} q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 - \frac{1}{2} F_1 \sin \mu_2 = 0 \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \sigma_2 a_1 + \frac{1}{8} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1) \\ + \frac{1}{2} F_1 \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (19b)$$

$$\omega_2 c_2 a_2 + \frac{1}{8} q_6 a_1^3 \sin \mu_1 = 0 \quad (19c)$$

$$\begin{aligned} 3\omega_1 \omega_2 a_2 (\sigma_2 - \sigma_{12}) + \frac{1}{8} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 \\ + q_6 a_1^3 \cos \mu_1) = 0 \end{aligned} \quad (19d)$$

이때 정상상태 응답은 다음과 같다.

$$w(x, t) = a_1 \cos(\Omega t - \mu_2) \phi_1(x) + a_2 \cos(3\Omega t + \mu_1 - 3\mu_2) \phi_2(x) \quad (20)$$

경우 II, $\Omega \approx \omega_2$ ($s = 2$) 일 때

앞의 경우 I과 마찬가지로 정상상태 응답을 주는 다음의 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_1 c_1 a_1 - \frac{1}{8} (q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 + q_7 a_2^2 a_3 \sin \mu_3) \\ = 0 \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 a_1 (\omega_2 \sigma_2 + 3\omega_1 \sigma_{12}) + \frac{3}{8} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 \\ + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1 + q_7 a_2^2 a_3 \cos \mu_3 + q_{10} a_1 a_3^2) \\ = 0 \end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 c_2 a_2 + \frac{1}{8} (q_6 a_1^3 \sin \mu_1 - q_8 a_1 a_2 a_3 \sin \mu_3) \\ - \frac{1}{2} F_2 \sin \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (21c)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^2 a_2 \sigma_2 + \frac{1}{8} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 + q_6 a_1^3 \cos \mu_1 \\ + q_8 a_1 a_2 a_3 \cos \mu_3 + q_{11} a_2 a_3^2) + \frac{1}{2} F_2 \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (21d)$$

$$\omega_3 c_3 a_3 + \frac{1}{8} q_9 a_1 a_2^2 \sin \mu_3 = 0 \quad (21e)$$

$$\begin{aligned} \omega_3 a_3 [(7\omega_2 \sigma_2 + 3\omega_1 \sigma_{12}) - 3(\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13}] \\ + \frac{3}{8} (q_9 a_1 a_2^2 \cos \mu_3 + q_{12} a_1^2 a_3 + q_{13} a_2^2 a_3 \\ + q_{14} a_3^3) = 0 \end{aligned} \quad (21f)$$

위의 대수방정식을 관찰하면 다음의 방정식이 만족될 때 $a_2 \neq 0, a_1 = a_3 = 0$ 인 응답이 존재함을 알 수 있다.

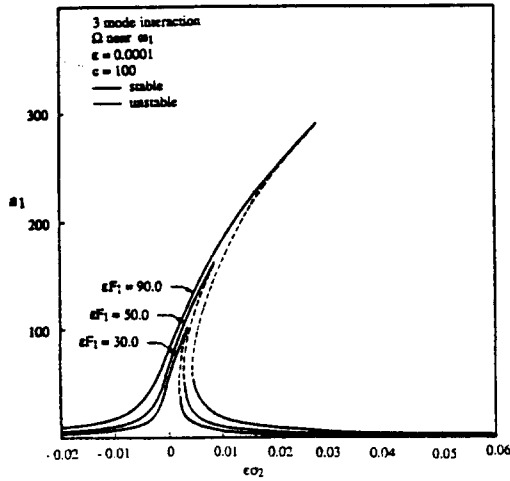


Fig. 2. Variation of amplitude a_1 of first mode with the excitation frequency

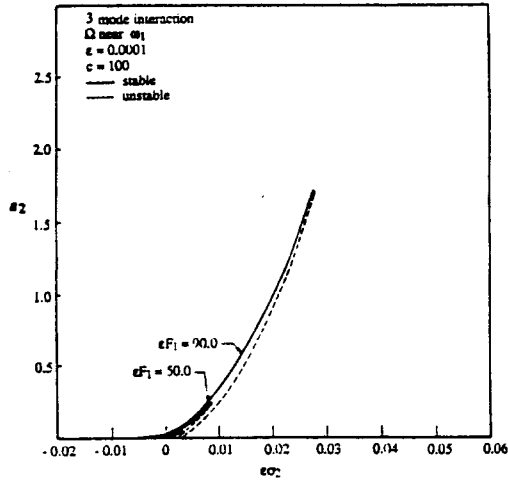


Fig. 3. Variation of amplitude a_2 of second mode with the excitation frequency

$$\omega_2 c_2 a_2 - \frac{1}{2} F_2 \sin \mu_2 = 0 \quad (22a)$$

$$\omega_2^2 a_2 \sigma_2 + \frac{1}{8} q_4 a_2^3 + \frac{1}{2} F_2 \cos \mu_2 = 0 \quad (22b)$$

위의 식으로부터 μ_2 를 소거하면 다음 관계식을 얻게 된다.

$$\sigma_2 = -\frac{1}{8} \frac{q_4}{\omega_2^2} a_2^2 \pm \left(\frac{F_2^2}{4\omega_2^4 a_2^2} - \frac{c_2^2}{\omega_2^2} \right)^{1/2} \quad (23)$$

이 식은 경화된 스프링 (a hardening spring, $q_4 < 0$)을 가진 Duffing 진동계의 응답곡선을 주게 된다. 정상상태의 보의 변형은 다음과 같이 주어진다.

$$w(x, t) = a_1 \cos(1/30t - 1/3(\mu_1 + 3\mu_2))\phi_1(x) + a_2 \cos(\Omega t - \mu_2)\phi_2(x) + a_3 \cos(7/30t - 1/3(\mu_1 + 7\mu_2 - 3\mu_3))\phi_3(x) \quad (24)$$

두 모드만만의 내부공진 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 만을 고려한 Nayfeh 등⁽⁵⁾이 얻은 대수방정식과 보의 변형은 다음과 같다.

$$\omega_1 c_1 a_1 - \frac{1}{8} q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 = 0 \quad (25a)$$

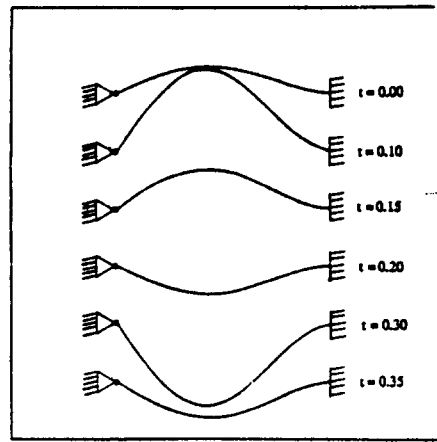


Fig. 4. Deflection curves : 3 mode interaction (Ω near ω_1) ($\sigma_2 = 250.0$ (upper branch), $\epsilon F_1 = 90.0$),

$$w(x, t) = a_1 \cos(\Omega t - \mu_2)\phi_1(x) + a_2 \cos(30t + \mu_1 - 3\mu_2)\phi_2(x) + a_3 \cos(70t + 2\mu_1 - 7\mu_2 + \mu_3)\phi_3(x)$$

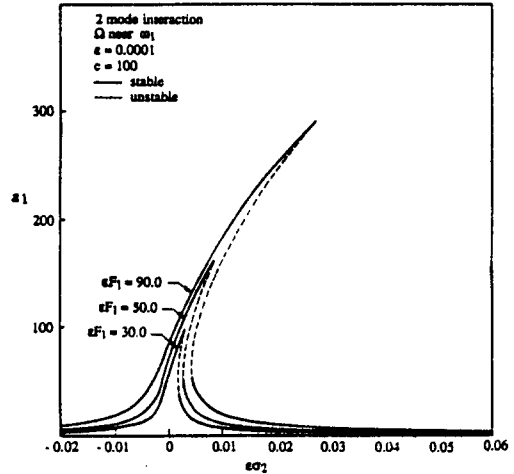


Fig. 5. Variation of amplitude a_1 of first mode with the excitation frequency

$$\omega_1 a_1 (\omega_2 \sigma_2 + 3\omega_1 \sigma_1 \sigma_2) + \frac{3}{8} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1) = 0 \quad (25b)$$

$$\omega_2 c_2 a_2 + \frac{1}{8} q_4 a_1^3 \sin \mu_1 - \frac{1}{2} F_2 \sin \mu_2 = 0 \quad (25c)$$

$$\omega_2^2 a_2 \sigma_2 + \frac{1}{8} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 + q_6 a_1^3 \cos \mu_1) + \frac{1}{2} F_2 \cos \mu_2 = 0 \quad (25d)$$

$$w(x, t) = a_1 \cos(1/30t - 1/3(\mu_1 + 3\mu_2))\phi_1(x) + a_2 \cos(\Omega t - \mu_2)\phi_2(x) \quad (26)$$

4. 수치결과

정상상태 응답을 구하기 위하여 식(17), (19), (21) 및 (25)를 Newton-Raphson법을 이용하여 수치적으로 풀었다. $\Omega \approx \omega_1$ 일 때 a_1 과 a_2 를 $\epsilon \sigma_2$ 의 함수로써 나타낸 것이 Fig. 2와 Fig. 3이다. a_2 는 0은 아니었으나 너무 크기가 작아 그림에 나타낼 수가 없었다. a_1 과 a_2

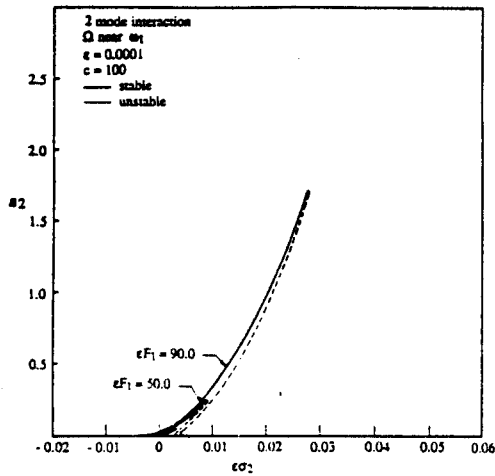


Fig. 6. Variation of amplitude a_2 of second mode with the excitation frequency

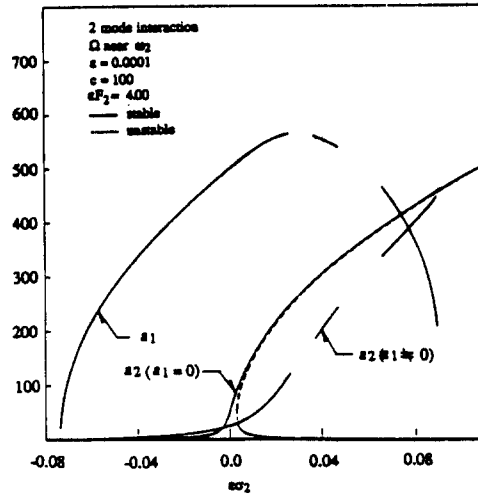


Fig. 9. Variation of a_1 and a_2 with σ_2

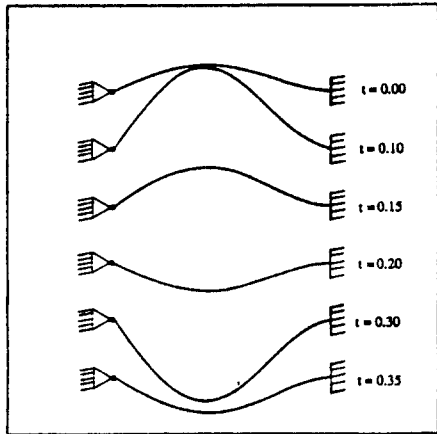


Fig. 7. Deflection curves : 2 mode interaction (Ω near ω_1) ($\sigma_2 = 250.0$ (upper branch), $eF_1 = 90.0$),
 $w(x, t) = a_1 \cos(\Omega t - \mu_2) \phi_1(x) + a_2 \cos(3\Omega t + \mu_1 - 3\mu_2) \phi_2(x)$

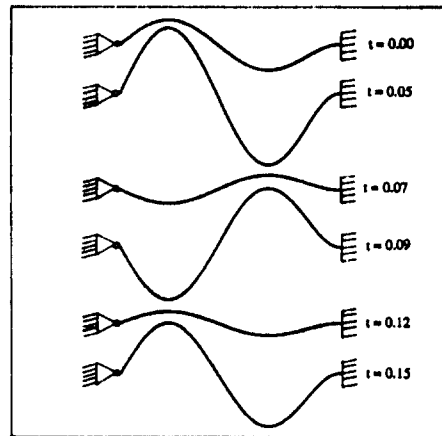


Fig. 10. Deflection curve : 3 mode interaction (Ω near ω_2) ($a_1 \neq 0, a_3 \neq 0, \sigma_2 = 900.0, eF_2 = 400.0$),
 $w(x, t) = a_1 \cos(\Omega t - \mu_2) \phi_1(x) + a_2 \cos(3\Omega t + \mu_1 - 3\mu_2) \phi_2(x) + a_3 \cos(7\Omega t + 2\mu_1 - 7\mu_2 + \mu_3) \phi_3(x)$

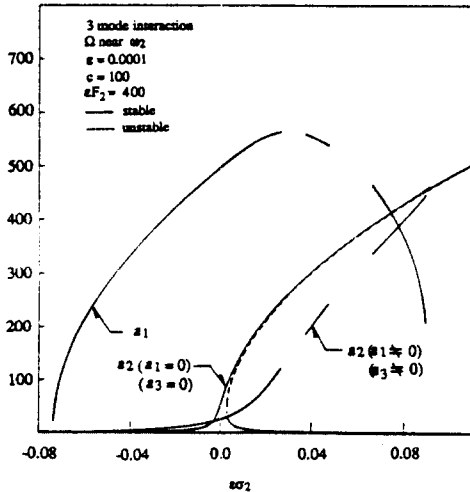


Fig. 8. Variation of a_1 and a_2 with σ_2

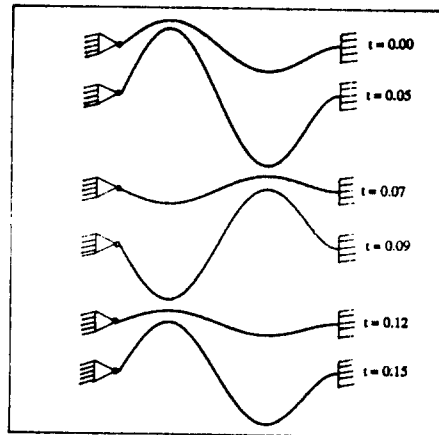


Fig. 11. Deflection curve : 2 mode interaction (Ω near ω_2) ($a_1 \neq 0, a_3 \neq 0, \sigma_2 = 900.0, eF_2 = 400.0$),
 $w(x, t) = a_1 \cos(\Omega t - \mu_2) \phi_1(x) + a_2 \cos(3\Omega t + \mu_1 - 3\mu_2) \phi_2(x)$

에 대한 결과는 경화된 스프링을 가진 Duffing 진동계의 응답곡선과 흡사하다. a_2 역시 a_1 에 비하면 매우 작으므로 첫번째 모우드(가)가 응답을 지배함을 알 수 있다. Fig. 4는 보의 변형이 시간에 따라 어떻게 변화하는가를 보여주고 있다. $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 만을 고려한 Nayfeh 등⁽⁵⁾의 결과가 Fig. 5, 6 및 7에 나타나 있다.

$\Omega \approx \omega_2$ 일때 $\epsilon\sigma_2$ 의 함수로서 진폭들이 Fig. 8에 나타나 있다. 두가지 양상의 응답이 보인다. 첫째는 식 (22) 나 (23)으로 주어진 $a_2 \neq 0$, $a_1 = a_3 = 0$ 인 응답이다. 이것은 경화된 스프링을 가지는 Duffing 진동계의 응답과 일치한다. 두번째 응답은 첫번째 것과는 반이하게 다른데 a_3 가 매우 작긴 하지만 세모우드의 어떤 진폭도 0이 아닌 응답이다. 그림에는 안정한 응답만이 나타나 있다. 비록 두번째 모우드가 직접 가진 되었지만 a_1 이 a_2 보다 아주 큰 영역이 존재한다. 이 영역에선 첫번째 모우드가 응답을 지배하게 된다. $\epsilon\sigma_2$ 의 어떤 영역에선 세 개의 안정한 응답이 존재하기도 한다. Fig. 9는 보의 변형이 시간에 따라 어떻게 변화하는가를 보여 주고 있다. $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 만을 고려한 Nayfeh 등⁽⁵⁾의 결과가 Fig. 10 과 11에 나타나 있다.

이 결과로부터 두모우드 만에 의한 내부공진을 고려한 결과와 세모우드 사이의 내부공진을 고려하여 해석한 결과사이에는 본질적인 차이가 발견되지 않았다. 그 이유는 $\epsilon\sigma_{13} = -0.0964$ 가 세번째 모우드를 자극하기에는 너무 크기 때문인 것으로 추정된다. 결론적으로 말해서 본 연구에서는 더 많은 모우드를 해석에 포함시킨다고 해서 별 다른 결과를 낼 수 있을 것인 점을 입증할 수 없었다.

후기

본 연구는 한국과학재단의 목적기초 연구비의 지원에 의한 것임.

부록

$$\gamma_{nj} = \gamma_{jn} = \begin{cases} 2(2\alpha_{njj} + \alpha_{nnjj}) & \text{for } n \neq j \\ 3\alpha_{nnnn} & \end{cases}$$

$$q_1 = 3\alpha_{1111} = -6.212$$

$$q_2 = 4\alpha_{1212} + 2\alpha_{1122} = -16.578$$

$$q_3 = 2\alpha_{1121} + \alpha_{1112} = -2.311$$

$$q_4 = 3\alpha_{2222} = -86.252$$

$$q_5 = 4\alpha_{1212} + 2\alpha_{1122} = -16.578$$

$$q_6 = \alpha_{2111} = -0.770$$

$$q_7 = 2\alpha_{1223} + \alpha_{1322} = 1.499$$

$$q_8 = 4\alpha_{2123} + 2\alpha_{2231} = 2.999$$

$$q_9 = \alpha_{3122} + 2\alpha_{3212} = 1.499$$

$$q_{10} = 4\alpha_{1313} + 2\alpha_{1133} = -34.733$$

$$q_{11} = 4\alpha_{2323} + 2\alpha_{2233} = -129.876$$

$$q_{12} = 4\alpha_{3131} + 2\alpha_{3311} = -34.733$$

$$q_{13} = 4\alpha_{3232} + 2\alpha_{3322} = -129.876$$

$$q_{14} = 3\alpha_{3333} = -414.521$$

$$\alpha_{1211} = -0.770 \quad \alpha_{1212} = -0.286 \quad \alpha_{1213} = 0.254$$

$$\alpha_{1221} = -0.286 \quad \alpha_{1222} = -2.870 \quad \alpha_{1223} = -0.523$$

$$\alpha_{1231} = 0.254 \quad \alpha_{1232} = -0.523 \quad \alpha_{1233} = -6.292$$

$$\alpha_{1311} = 0.683 \quad \alpha_{1312} = 0.254 \quad \alpha_{1313} = -0.225$$

$$\alpha_{1321} = 0.254 \quad \alpha_{1322} = 2.546 \quad \alpha_{1323} = 0.464$$

$$\alpha_{1331} = -0.225 \quad \alpha_{1332} = 0.464 \quad \alpha_{1333} = 5.581$$

$$\alpha_{2111} = -0.770 \quad \alpha_{2112} = -0.286 \quad \alpha_{2113} = 0.254$$

$$\alpha_{2121} = -0.286 \quad \alpha_{2122} = -2.870 \quad \alpha_{2123} = -0.523$$

$$\alpha_{2131} = 0.254 \quad \alpha_{2132} = -0.523 \quad \alpha_{2133} = -6.292$$

$$\alpha_{2211} = -7.716 \quad \alpha_{2212} = -2.870 \quad \alpha_{2213} = 2.546$$

$$\alpha_{2221} = -2.870 \quad \alpha_{2222} = -28.751 \quad \alpha_{2223} = -5.239$$

$$\alpha_{2231} = 2.546 \quad \alpha_{2232} = -5.239 \quad \alpha_{2233} = -63.028$$

$$\alpha_{2311} = -1.406 \quad \alpha_{2312} = -0.523 \quad \alpha_{2313} = 0.464$$

$$\alpha_{2321} = -0.523 \quad \alpha_{2322} = -5.239 \quad \alpha_{2323} = -0.955$$

$$\alpha_{2331} = 0.464 \quad \alpha_{2332} = -0.955 \quad \alpha_{2333} = -11.486$$

$$\alpha_{3111} = 0.683 \quad \alpha_{3112} = 0.254 \quad \alpha_{3113} = -0.225$$

$$\alpha_{3121} = 0.254 \quad \alpha_{3122} = 2.546 \quad \alpha_{3123} = 0.464$$

$$\alpha_{3131} = -0.225 \quad \alpha_{3132} = 0.464 \quad \alpha_{3133} = 5.581$$

$$\alpha_{3211} = -1.406 \quad \alpha_{3212} = -0.523 \quad \alpha_{3213} = 0.464$$

$$\alpha_{3221} = -0.523 \quad \alpha_{3222} = -5.239 \quad \alpha_{3223} = -0.955$$

$$\alpha_{3231} = 0.464 \quad \alpha_{3232} = -0.955 \quad \alpha_{3233} = -11.486$$

$$\alpha_{3311} = -16.916 \quad \alpha_{3312} = -6.292 \quad \alpha_{3313} = 5.581$$

$$\alpha_{3321} = -6.292 \quad \alpha_{3322} = -63.028 \quad \alpha_{3323} = -11.486$$

$$\alpha_{3331} = 5.581 \quad \alpha_{3332} = -11.486 \quad \alpha_{3333} = -138.174$$

위의 계수 α_{nmpq} 를 얻으려면 Nayfeh 등⁽⁵⁾의 계수에 $\nu = 1/4$ 를 곱해야한다.