

# 점탄성재료의 복소탄성계수 규명을 위한 시편 크기의 결정

°강 기호\*, 심 송\*\*, 김 광준\*

( Determination of Specimen Geometry for Identification  
of the Complex Modulus of Viscoelastic Materials)

(Kee-Ho Kang, Song Sim, Kwang-Joon Kim)

## 1. 서론

일반적으로 고무를 비롯한 점탄성재료는 형상 및 크기를 적절히 조절함으로써 한 방향 이상으로 의 원하는 스프링상수를 얻을 수 있으며, 금속에 비하여 내부 마찰에 의한 에너지 발산이 매우 크기 때문에 강제 진동시의 진폭저감 및 충격에 따른 자유진동의 감쇠에 널리 이용되고 있다. 이와 같은 진동감쇠에 점탄성재료를 효과적으로 사용하기 위해서는 복소탄성계수 즉, 탄성계수와 손실계수를 정확하게 알아내는 것이 필요하다.

점탄성재료의 복소탄성계수는 주파수, 온도 및 변형률등에 따라 변하므로 이와 같은 사용조건외 합수로 구해야 한다. 복소탄성계수를 실험적으로 구하는 방법은 여러가지가 있으며[1] 실험의 용이성과 관심대상에 따라 적절한 방법을 선택하게 된다.

본 연구에서는 주파수변화에 따른 복소탄성계수를 임피던스법으로 집중질량 모형을 이용하여 구하려고 할 때, 실험데이터로부터 보다 정확한 결과를 얻기 위하여 적절한 시편의 크기를 결정하는 방법을 제시하고자 한다. 이를 위해서 시편내의 파동전달효과와 포아송비와 관련된 양단제한효과 그리고 정하중시 압축변형에 대한 시편의 좌굴등을 고려하여 이론적으로 해석하였으며 실험적으로도 검증하였다.

## 2. 이론적 검토

점탄성재료는 외부에서 힘이 가해질 경우, 받은 에너지의 일부는 복원 가능한 탄성 에너지로 저장하고 나머지는 열 에너지 등으로 발산시키는 성질을 가진 재료로서 강성과 감쇠성을 동시에 가지고 있다.

\* 한국과학기술원 기계공학과

\*\* 현대전자 산업연구소

점탄성재료의 성질은 엄밀한 의미에서 비선형이나, 변형률이 작은 경우 선형으로 간주하여 그 동특성을 탄성계수 E와 손실계수(loss factor)  $\eta$ 로 표현할 수 있다. 이 두 인자는 보통 복소탄성계수  $E^*$ 로 다음과 같이 주파수의 함수로 표현되어 진다.

$$E^*(\omega) = E(\omega) [1 + j\eta(\omega)] \quad (1)$$

## 2-1. 임피던스법에 의한 복소탄성계수의 측정

임피던스법은 힘(혹은 변위)을 시편에 가하고 그 결과 나타나는 변위(혹은 힘)를 측정하여 두 신호 사이의 진폭비와 위상차를 이용하여 복소탄성계수를 추출하는 방법으로서 그림 1과 같이 여러 모형을 이용할 수 있다. 여기서는 시편 양단에서 횡방향 운동이 구속되지 않는 경우 구동부에서 변위를 가하고 지지부에서 힘을 측정할 경우를 살펴본다. 이때 시편의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u^*(x,t)|_{x=0} &= U \exp(j\omega t) \\ u^*(x,t)|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $u^*(x,t)$ 는 축방향 거리  $x$ 와 시간  $t$ 에서의 변위이고  $U$ 는 변위의 진폭,  $\omega$ 는 가진주파수 그리고  $L$ 은 시편의 길이이다.

### 1) Kelvin - Voight 모형

이 모형은 강성과 감쇠가 병렬로 연결된 형태로서 복소탄성계수를  $E_k^*$ 라 하면 힘과 변위의 비는 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\frac{F^*|_{x=L}}{u^*(0,t)} = \frac{E_k^* A}{L} \quad (3)$$

여기서  $A$ 는 시편의 단면적이고  $L$ 은 길이이다.

## 2) 연속체 모형

이 경우의 복소탄성계수를  $E_c^*$ 라 하면 점탄성재료 로드의 축방향 변형에 대한 일반적인 지배방정식은 다음과 같다(2.3.4).

$$E_c^* A \frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

여기서  $\rho$ 는 재료의 밀도이다.

식 (2)와 (4)를 이용하여 힘과 변위의 관계식을 얻고 그 비를 구하면 다음과 같다(2).

$$\frac{F^*|_{x=L}}{u^*(0,t)} = \frac{E_c^* A \beta}{\sin \beta L} \cdot \beta = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E_c^*}} \quad (5)$$

## 3) 집중질량(Lumped Mass) 모형

식 (5)에서  $\sin \beta L$  항을 멱급수로 전개하고  $(\beta L)^4$  항 이상의 고차항을 소거하여 정리하고, 이때의 복소탄성계수를  $E_1^*$ 라 하면 변위와 힘의 관계식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{F^*|_{x=L}}{u^*(0,t)} = \frac{A}{L} E_1^* \left( 1 + \frac{\rho \omega^2 L^2}{6 E_1^*} \right) \quad (6)$$

윗 식은 시편을 스프링과 구조감쇠부 및 등가질량으로 구성된 1 자유도계로 모형화 하는 것이며, 등가질량은  $-m/6$  [ $m = \rho A L$ : 시편의 질량]이 된다.

이 모형에 의해서 실험적으로 얻어진 변위와 힘의 진폭비 ( $F/U$ )와 위상차 ( $\delta$ )를 이용하여 탄성계수  $E_c$ 와 손실계수  $\eta_1$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_1 = \frac{L}{A} \left( \frac{F}{U} \cos \delta - \frac{1}{6} \rho A L \omega^2 \right)$$

$$\eta_1 = \frac{\frac{F}{U} \sin \delta}{\frac{F}{U} \cos \delta - \frac{1}{6} \rho A L \omega^2} \quad (7)$$

식 (7)에서 시편의 등가질량을 고려하지 않게 되면 Kelvin-Voigt 모형이 된다.

## 4) Love 이론

Love 이론은 횡방향의 운동을 어느정도 고려하여 축방향의 선형진동을 묘사하는 근사식이다. 이 근사식은 평면단면은 변형시에 평면을 유지하며 단면상에서의 축방향 응력은 균일하게 분포하고, 반경 방향으로의 변위는 반경좌표  $r$ 에 비례한다는 가정 하에서 Hamilton 정리를 이용하여 유도되었다. 이 경우의 복소탄성계수를  $E_1^*$ 라 하면 미분방정식은 다음과 같다(3.4).

$$\rho \left[ \frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial t^2} - (v^* i)^2 \frac{\partial^4 u^*(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right] = E_1^* \frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial x^2} \quad (8)$$

여기서

$v^*$ : 포아송비 [ $= \nu(1 + j\eta_1)$ ]

$i$ : 관성반경 (radius of gyration about the x axis)

또한 응력과 변형률의 관계는 다음과 같으며(2)

$$\sigma = E_1^* \left[ 1 - \frac{\rho}{E_1^*} (\omega i v^*)^2 \right] \frac{du^*(x,t)}{dx} \quad (9)$$

식 (2), (8), (9)를 이용하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{F^*|_{x=L}}{u^*(0,t)} = \frac{A \alpha}{L \sin \alpha} E_1^* \left[ 1 - \frac{\rho}{E_1^*} (\omega i v^*)^2 \right] \quad (10)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho \omega^2 L^2}{E_1^* [1 - \rho (\omega i v^*)^2 / E_1^*]}}$$

## 2-2. 시뮬레이션

축방향으로 파동의 전파를 고려한 연속체 모형이나 이에 횡방향운동을 어느정도 고려한 Love 이론은  $E^*$ 에 대하여 implicit function 이므로 반복계산을 필요로 하며 포아송비를 알아야 하므로 복소탄성계수를 정확하게 구하는 것은 쉬운일이 아니다. 그러나 시편의 모형을 단순화시킨 Kelvin-Voigt 모형이나 시편의 질량을 일부 고려한 집중질량 모형을 이용하면 어느정도의 주파수 영역까지는 비교적 참값에 근접한 값을 쉽게 얻을 수 있다. 여기서는 집중질량 모형을 이용할 경우 비교적 수식이 간단하면서도 엄밀이론에 근접하는 Love 근사식과 비교하여 두 모형으로 구한 값의 차이가 최소화 되도록 하는 시편의 크기를 찾아내고자 한다.

두 모형으로 부터 얻어진 값의 차이를 알아보기 위해서 포아송비는 실수값만을 갖는다고 가정하여 식 (6)과 (10)을 비교하면 다음과 같이 된다.

$$E_1^* \left( 1 + \frac{\rho \omega^2 L^2}{6 E_1^*} \right) = \frac{\alpha}{\sin \alpha} E_1^* \left[ 1 - \frac{\rho (\omega i v^*)^2}{E_1^*} \right] \quad (11)$$

여기서  $\alpha = p + jq$ 라 놓으면

$$p = \frac{nL}{\sqrt{1 - (niv)^2}} \frac{1}{D} \left( \frac{D+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$q = - \frac{nL}{\sqrt{1 - (niv)^2}} \frac{1}{D} \left( \frac{D-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$D = \sqrt{1 + \frac{\eta_1}{1 - (niv)^2}} \quad , \quad n = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E_1^*}}$$

식 (11)을 실수항과 허수항으로 분리하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{Q} [ A(1 - n^2 i^2 v^2) - B \eta_k ] - \frac{1}{6} (nL)^2$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{A + B(1 - n^2 i^2 v^2) \eta_k}{A(1 - n^2 i^2 v^2) - B \eta_k - Q(nL)^2/6} \quad (12)$$

여기서

$$A = p \sin p \cosh q + q \cos p \sinh q$$

$$B = q \sin p \cosh q - p \cos p \sinh q$$

$$Q = (\sin p \cosh q)^2 + (\cos p \sinh q)^2$$

그림2에 Love 근사식으로 구한 값에 대한 각 모 형으로 부터 구해진 값의 비를  $d/L = 0.5$ ,  $\eta_1 = 0.1$ ,  $v = 0.5$ 의 경우에 대해서  $nL [= \omega L(\rho/E_1)^{1/2}]$ 의 함수로 나타내었다. 또한 그림3에는 식 (12)에서  $d/L$  및  $\eta_1$ 와  $v$ 를 변화시켜 가면서 Love 근사식과 집중 질량 모형으로 구한 값의 비를 구한 결과를  $(nL)^2 [= \omega L(\rho/E_1)^{1/2}]$ 의 함수로 나타내었다.

그림3으로 부터 집중질량 모형을 이용할 경우에 실제값과의 차이가 최소화되게 하는  $d/L$ 과 이에따른 이용가능한 시편의 최대 길이를 결정할 수 있다. 즉  $d/L$ 은 감쇠가 작은 재료일 경우에는 1.5보다 작게 하고 감쇠가 큰 재료( $\eta_1$ 가 1.0보다 큰 재료)일 경우에는 1보다 작게 해주면 오차가 적어지며,  $d/L$ 의 하한치는 좌굴의 영향을 고려하여 결정하면 된다. 그리고 허용오차범위와 주파수범위가 주어지면 시편의 최대 길이를 결정할 수 있다.

### 2.3. 형상계수의 영향

점탄성재료가 계의 일부를 구성할 때 역학적인 성질은 점탄성재료 자체의 성질뿐만 아니라 경계조건에 의해서도 영향을 받는다. 21절의 여러 모형으로 부터 구해진 탄성계수는 양단제한효과를 고려하지 않고 구한 값으로서 실제값보다는 크게 구해지는 겉보기탄성계수( $E_0$ )이며 탄성계수  $E$ 와의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_0 = RE \quad (13)$$

여기서  $R$ 은 시편의 형상과 재료의 포아송비의 영향을 고려한 식이며 많은 연구가들에 의해 여러가지 이론식 및 실험식들이 제안되어 왔다. 이들 중 포아송비가 0.5에 가까운 고무와 같은 재료에 가장 많이 이용되는 식을  $R_0$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$R_0 = 1 + 2S^2 \quad (14)$$

형상계수로 불리는  $S$ 는 하중을 받는 단면의 하중을 받지않는 측면의 총 면적에 대한 비로 주어진다.  $R$ 은 형상계수와 포아송비의 함수이며 유한요소해석법을 이용하여 수치적으로 구한 값과 형상계수만의 함수인  $R_0$ 값 사이의 차이  $error = (R_0 - R)/R \times 100$  (%)를 그림4에 나타내었다. 이 그림에서 보면  $R$  대신  $R_0$ 를 사용함으로써 발생하는 탄성계수 추정상의 최대허용오차를 10%로 한다면 형상계수가 0.5 (즉  $d/L = 2$ )보다 작은범위 이어야 한다.

### 2.4. 압축변형에 대한 좌굴

임피던스법은 점탄성재료의 동특성에 대한 동적 변형률이나 정적 초기변형률의 영향을 조사하는데 아주 유용하며 보통 정적 초기변형률은 시편의 20%까지 동적변형률은 5%까지의 영향을 조사한다[5]. 이때 시편에 가해진 변형률이 크게 되면 좌굴이 발생할 수 있다. 따라서 압축변형에 대해서 좌굴이 발생하지 않도록 시편 길이의 단면의 폭에 대한 비를 결정해야 한다.

원통형 시편인 경우 좌굴이 일어나는 임계변형률을 구하기 위해서 다음과 같이 세 영역으로 분류한다.

1) 비례한도내에서 Euler 식을 적용시킬 수 있는 영역:  
고무와 같은 재료는 흔히 변형율이 약 20%정도까지는 거의 선형적으로 본다[6]. 이 영역에서는 좌굴에 대한 Euler 공식은 적용시킬 수 있으며 시편의 양끝이 구속되어 있을경우 임계변형률( $e_c$ )은 다음과 같다.

$$e_c = \frac{F/A}{E} = \frac{\pi d^2}{4L^2} \quad (15)$$

이때  $e_c = 0.2$ 에 대응하는 세장비( $L/d$ )는 약 3.5이다.

2) 좌굴이 발생하지 않는영역:

세장비가 1.6이하이면 압축변형에 대해 좌굴이 발생하지 않으며[7] 이에 대응하는 변형율은 약 45%이다[8].

3) 중간영역: 1)과 2)의 결과를 직선으로 연결한다[9]. 위의 결과를 그림5에 나타내었다.

## 3. 실험

### 3-1. 실험장치 및 방법

실험장치의 구성도와 사용장비는 그림6에 나타내었다. 시편은 neoprene 류의 합성고무로서 형상계수를 변화시켜 가면서 실험하기 위해 Duro 40과 Duro 60인 재료를 직경은 모두 25 (mm) 이고 길이는 25,30,40 (mm) 인 원통형의 시편을 사용하였다. 밀도는 Duro 40인 재료가 1097(Kg/m<sup>3</sup>) 이고 Duro 60인 재

료가  $1335(\text{Kg/m}^3)$ 이다. 시편의 양단은 접착제를 이용하여 완전히 고정시켰으며 가진신호는 신호분석기에 내장되어 있는 신호발생기를 이용하여 관심주파수 범위내에서 sine sweep 을 시켰다.

### 3-2 실험결과 및 고찰

Duro 40 인 시편에 대해서 측정된 전달함수를 이용하여 집중질량 모형으로 구한 탄성계수와 손실계수를 그림7.에 나타내었다. 21절의 여러모형으로 부터 구해진 값은 양단제한효과를 고려해주지 못한 길보기탄성계수이므로 탄성계수는 식 (14)를 이용하여 구하였다. 이 결과를 보면 22절의 시뮬레이션에 나타난 결과와 유사한 경향을 보이고 있으며 같은 단면을 갖는 시편일 경우 길이가 길수록 집중질량 모형을 이용할 수 있는 영역은 낮아지고 있다.

Duro 60 인 시편에 대한 실험결과를 이용하여 집중질량 모형으로 구한 값을 그림8.에 나타내었고 그림9는 길이가 25(mm)인 시편에 대해서 2-1절에서 살펴본 여러 모형으로 구한 결과이다. 이때 연속체 모형과 Love 모형에서는 비선형최소자승법을 이용하여 각 주파수의 데이터마다 200번 반복(iteration)해서 구한 값이다. 이 그림에서 보면 저주파수에서는 각 모형으로 부터 구해진 탄성계수가 거의 일치하고 있으나 주파수가 높아짐에 따라서 차이를 나타내고 있다.

Duro 60 인 재료는 Duro 40 인 재료보다 탄성계수가 두배 이상 크기때문에 단면과 길이가 같을 경우 더 높은 주파수 영역까지 집중질량 모형을 이용할 수 있음을 확인할 수 있다.

### 4. 결론

임피던스법으로 집중질량 모형을 이용하여 점탄성재료의 복소탄성계수를 구할 때 오차를 유발시킬 수 있는 요소들을 살펴보았으며, 이런 요소들의 영향을 줄일 수 있도록 하는 적절한 시편의 크기를 결정하는 방법을 다음과 같이 제시하였다. 즉, 파동 전달효과의 영향을 줄이기 위해서  $\lambda$ 의 상한치는 고감쇠재료일 경우에는 1, 저감쇠재료일 경우에는 15로 하고 하한치는 좌굴의 영향을 고려하고 결정하여 이 범위내에서 사용한다. 그리고 시편의 최대 길이는 사용주파수의 허용오차범위내에서 결정한다.

### 5. 참고문헌

1. J.Peters, C.De.Meersman, B.Devis, Design Oriented Measuring Procedures for Determining the Mechanical Properties of Rubber Material, Damping 1986 AFWAL Technical Report.
2. J.C.Snowdon, Vibration and Shock in Damped Mechanical System, John Woley & Sons, 1968
3. T.Pritz, Apparent Complex Young's Modulus of a Logitudinal Vibrating Viscoelastic Rod, Journal of Sound and Vibration 77(1), 93-100, 1981
4. D.Bancrft, The Velocity of Longitudinal Waves in Cylindrical Bars, Physical Review 59, 588-593, 1941
5. 일본 철도차량 공업협회, 방진고무, 1976
6. A.M.Brichta, Rubber Spring Design, Newnes-Butterworths, London, 1974
7. Cyril M.Harris, Shock & Vibration Handbook, McGraw-Hill, 1987
8. P.K.Freakley and A.R.Payne, Theory and Practice of Engineering with Rubber, Applied Science Publishers LTD, 1978
9. S.Timoshenko, J.M.Gere, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961

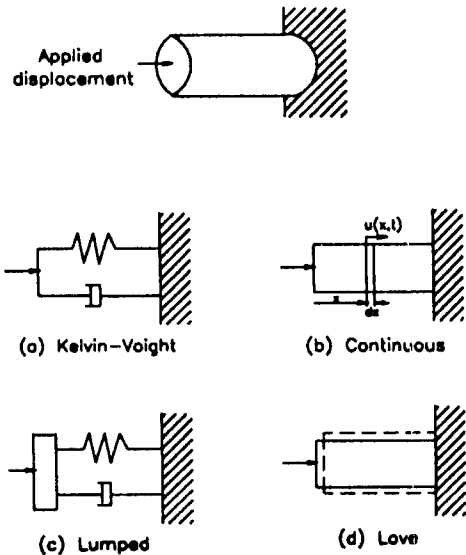
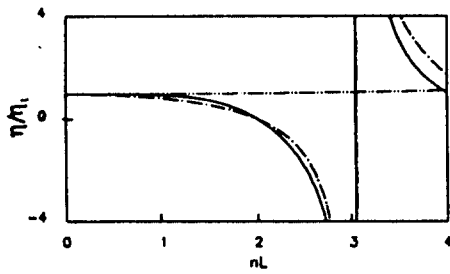
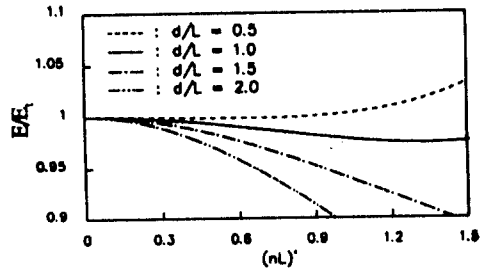


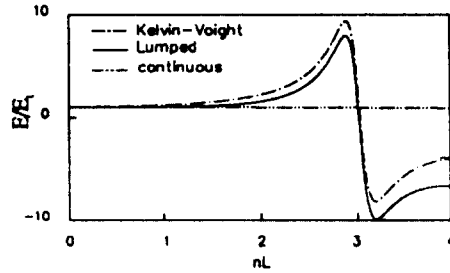
그림 1. 시편의 모델링



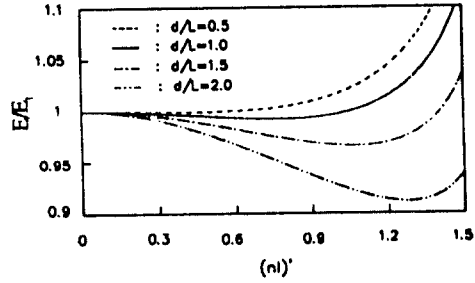
(a) 손실계수의 비



(c)  $\eta_1 = 1.0, \nu = 0.5$ 인 경우



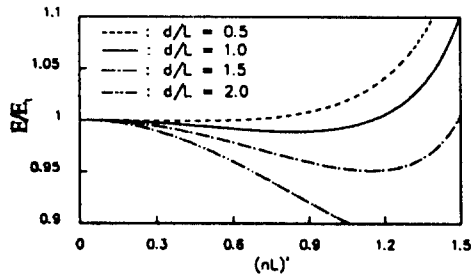
(b) 탄성계수의 비



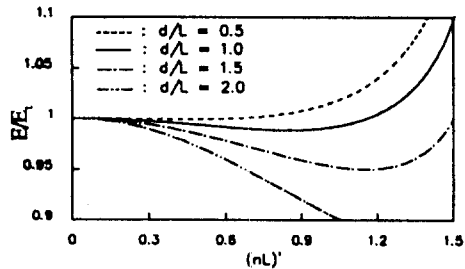
(d)  $\eta_1 = 0.01, \nu = 0.45$ 인 경우

그림 2. Love 이론과 여러 모형의 비교  
( $d/L = 0.5, \eta_1 = 0.01, \nu = 0.5$ 인 경우)

그림 3. Love 이론과 집중질량 모형의 비교  
( $E, \eta$ : Lumped,  $E_1, \eta_1$ : Love)



(a)  $\eta_1 = 0.01, \nu = 0.5$ 인 경우



(b)  $\eta_1 = 0.1, \nu = 0.5$ 인 경우

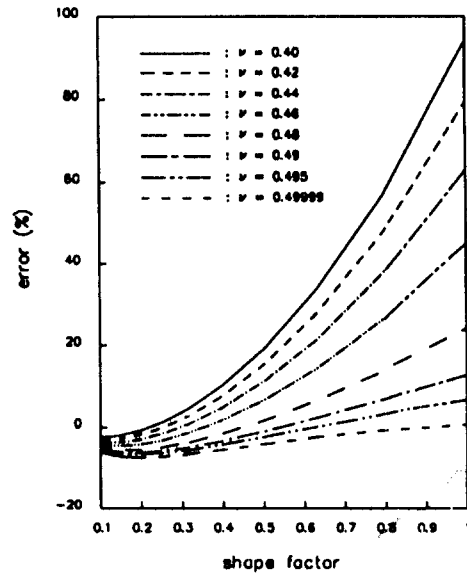


그림 4.  $R_0$ 와  $R$  사이의 차이

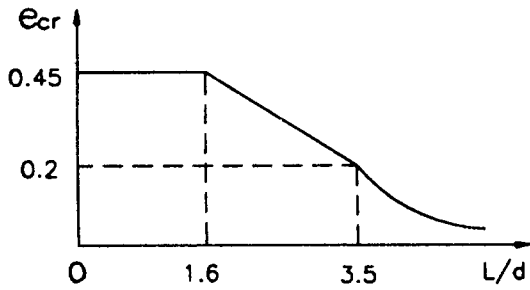


그림 5. 임계변형률 선도

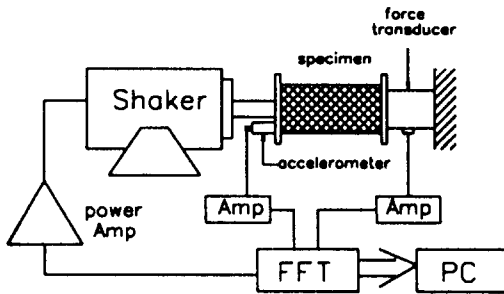
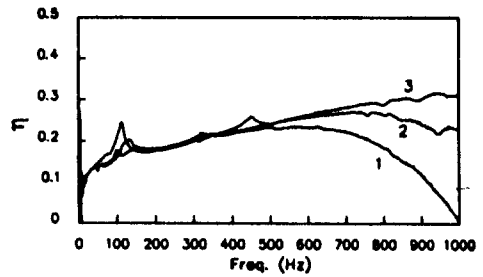
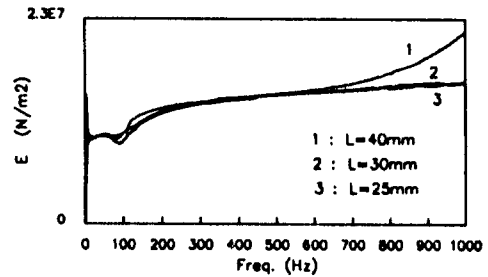


그림 6. 실험장치 구성도

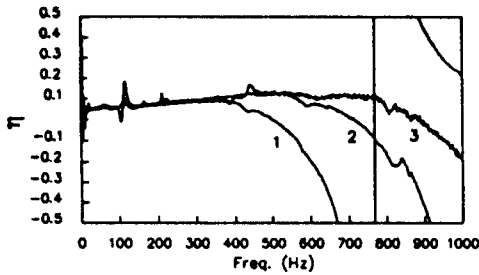


(a) 손실계수

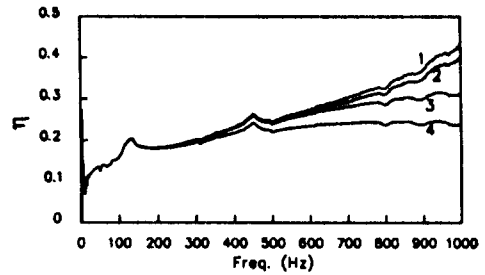


(b) 탄성계수

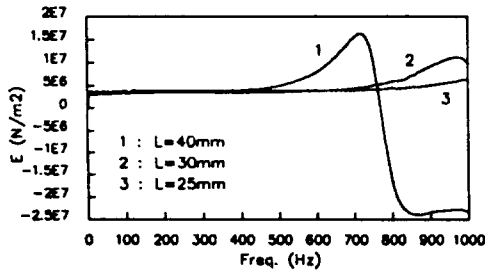
그림 8. 집중질량 모형에 의한 복소탄성계수 (Duro 60인 재료)



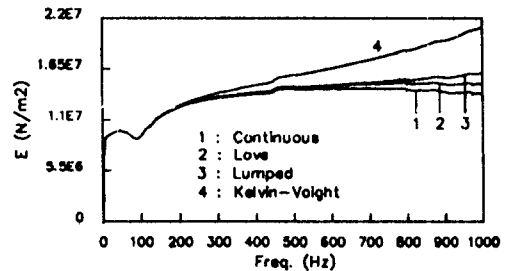
(a) 손실계수



(a) 손실계수



(b) 탄성계수



(b) 탄성계수

그림 7. 집중질량 모형에 의한 복소탄성계수 (Duro 40인 재료)

그림 9. 여러 모형에 의한 복소탄성계수 (Duro 60, d=25, L=25인 재료)