

조화 집중 하중을 받는 보에서의 Sound Power 해석

Sound Radiation From Beams Under the Action of Harmonic Point Force

○ 김 병삼* 홍 동표**
Byoung-Sam Kim Dong-Pyo Hong

1. Introduction

구조 진동에 의해 발생하는 Relative Sound Power를 계산하는 문제가 최근 에 중요시되고 있다. 이 논문에서는 조화적인 집중하중에 대한 무한 탄성보에서 방출하는 Relative Sound Power을 연구한다. Sound Power는 수치적으로 적분되고 몇가지 인자들의 함수로서 적분인자군 표시하였다.

Keltie 와 Peng [2]은 진동하는 보로부터의 방출하는 Relative Sound power에 대한 하중 길이의 효과, 그리고 Water 하중을 받는 보에서 방출하는 Acoustic radiation에 대한 Source 운동과 기초 강성의 효과를 연구하였다.

보의 진동 응답에서 Light fluid loading와 Heavy fluid loading에 의한 양쪽의 반응을 고려한다 보에는 기초 강성과 Damping 그리고 장력이 작용한다. Water 하중과 Air 하중을 받는 보에서 Damping의 변화에 대한 보로부터 방출하는 Relative Sound power의 크기를 결정 하였다. 일반적으로 인장력보다 압축력이 작용할때 Relative Sound power Level이 크다는 것을 알고 있다.

실제로 인장력이나 압축력이 보에 작용할때 Relative Sound power에 얼마나 영향을 미치는가를 계산하였다.

그리고 진동계로부터 방출하는 Sound와 fluid loading과 기초 강성에 기인한 복잡한 효과를 해석하였다.

이 논문의 목적은 강성계수(τ)와 Wavenumber 비(γ), 그리고 fluid loading에 대한 Sound power의 응답에 대하여 설명하고자한다.

2. Sound Power 이론식

그림 (1)에서 보는것처럼 집중 하중에 의해서 가진 되는 보에서 방출하는 Acoustic power를 예측하고자 한다. 보의 표면을 $Z = 0$ 으로 놓고 보의 길이 방향이 무한하며, 조화적으로 진동하는 집중하중에 의해 보가 가진된다고 가정한다.

$Z > 0$ 공간에 Acoustic 매개체가 존재한다. 그리고 그림 (1)에서 보는것처럼 기초위에 스프링과 Damper를 갖고 장력을 받는 무한 길이의 보로 고려한다. 이 탄성 보에 대한 운동 방정식은

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\rho_s A}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial u}{\partial t} + k_s u = F_0 \delta(x) e^{j\omega t} - p(x, z=0, t) \quad (1)$$

여기서

$u(x, t)$: 보의 횡변위
 w : 진동하는 하중의 각 진동수
 D : 보의 flexural 강성
 $p(x, z=0, t)$: 보 표면에서의 압력
 $\rho_s A$: 보의 단위 길이당 질량
 T : 보에 작용하는 축 장력
 C : 기초 Damping 계수
 K_s : 기초 강성
 F_0 : 입력 하중 진폭
 $\delta(x)$: Dirac delta 함수

진동하는 보에 의해 Acoustic 매개체에 발생하는 압력 분포를 $p(x, z, t)$ 로 표시하고 이차원 공간상에서 파동 방정식을 만족한다.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p(x, z, t) = 0 \quad (2)$$

여기서 c_0 는 Acoustic 매개체의 음속이다. $Z = 0$ 인 보의 표면에서의 경계조건은

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

여기서 ρ_0 는 Acoustic 매개체의 질량 밀도이다. 공간의 Fourier transform을

$$FT(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{j\zeta x} dx$$

적용하여 다시 식을 유도해 보자. 여기서 ζ 는 Wave number 변수이다.

Wave number 영역에서의 힘 함수를 구하면

$$\hat{F}(\zeta, t) = F_0 e^{j\omega t}$$

파동 방정식 (2)와 경계 조건 (3)을 대신하여 Wave number 영역에서의 압력을 계산하면

$$p(\zeta, z=0) = Z_0 U(\zeta)$$

그리고 이 식을 보의 운동 방정식 (1)에 대입하면

$$U(\zeta) = \frac{F_0}{Z_b + Z_0}$$

* 釜北 大學校 大學院

** 釜北 大學校 二科大學 精密機械工學科

여기서, Z_b 는 Structural Impedance 이다.

Z_a 는 Acoustic Impedance 이다.

$$Z_b = \left[D\zeta^4 - \rho_s A w^2 + T(\zeta^2 + K_s) \right] + j \left[wC \right]$$

$$Z_a = \frac{j\rho_0 w^2}{k_0^2 - \zeta^2}$$

여기서 K_0 는 Acoustic Wavenumber (w/c_0)이다.

전체적인 Acoustic power를 찾기 위해 표면 Acoustic intensity 분포가 보의 무한 길이에 대하여 적분 되어야 한다.

Intensity를 구하면

$$I(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (P(x) V^*(x))$$

$P(x)$ = 표면 압력

$V^*(x)$ = 공역 표면 속도

Sound power를 계산하면

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(x) V^*(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\zeta_1) e^{-j\zeta_1 x} d\zeta_1 \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V^*(\zeta_2) e^{j\zeta_2 x} d\zeta_2 \right] dx \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(\zeta) V^*(\zeta) d\zeta \right] \end{aligned}$$

이 Sound power를 다시 쓰면

$$W = \frac{\rho_0}{4\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2}{k_0^2 - \zeta^2} |U(\zeta)|^2 d\zeta \right]$$

적분값이 실수이기 위한 적분 구간은

$$K_0^2 - \zeta^2 \geq 0, \quad -K_0 \leq \zeta \leq K_0$$

이 Sound power를 무차원화 하기 위하여 $\zeta \rightarrow K_0 \zeta$ 로 치환 하면

$$W = \frac{\rho_0 F_0^2}{4\pi(\rho_s A)^2 w} \Pi$$

$$\Pi = \frac{1}{\int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\left[\left(\gamma^4 \zeta^4 - 2T_1 \gamma^2 \zeta^2 - 1^2 + \beta^2 \right)^2 + \left[2\beta \zeta + a_0 / (\gamma^2 \sqrt{1-\zeta^2}) \right]^2 \right] \sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (3)$$

$\gamma = k_0 / k_b$ 는 bonding wave number에 대한 acoustic wave number의 비이다. 그리고 $k_b = (\rho_s A w^2 / D)^{1/4}$ 은 free bonding wave number 이다. $a_0 = \rho_0 c_1 / \rho_s A c_0 \gamma^{1/2}$ 은 fluid loading factor, ρ_0 은 공기의 체적밀도, c_1 은 보의 종방향 wave 속도이다, β 은 기초 강성 계수, $T_1 = T / (2 \gamma k_b D)$ 은 축인장 계수, 그리고 $\beta = C / (2 \gamma \rho_s A k_b)$ 은 기초 감쇠 계수이다.

* $\gamma \ll 1$ 은 경우의 근사해

저주파수의 영역에서 무차원 sound power는

$$\Pi \sim \frac{1}{\int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\left[\left(\zeta^2 - 1 \right)^2 + \left(2\beta \zeta + a_0 / (\gamma^2 \sqrt{1-\zeta^2}) \right)^2 \right] \sqrt{1-\zeta^2}}}$$

1) 저주파 영역에서의 가벼운 유체 하중을 받는 경우 $a_0 / \gamma^2 \ll 1$

$$\Pi \sim \frac{1}{\left[\left(\zeta^2 - 1 \right)^2 + \left(2\beta \zeta \right)^2 \right]} \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4)$$

$\zeta = \sin \theta$ 로 치환하면

$$\Pi \sim \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \pi$$

$$\Pi \sim \frac{\pi}{\left[\left(\zeta^2 - 1 \right)^2 + \left(2\beta \zeta \right)^2 \right]}$$

이때 $\beta = 0$, $\beta \ll 1$ 이라고 하면

$$\Pi \sim \pi$$

2) 무거운 유체 하중을 받는 경우 ($a_0 / \gamma^2 \gg 1$)

이때 β 와 $\beta \ll 1$ 이라고 하면

$$\Pi \sim \frac{\gamma^4}{a_0^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta = \frac{\gamma^4}{a_0^2} \pi \quad (5)$$

방정식(4)와 방정식(5)는 가벼운 유체 하중(공기), 무거운 유체 하중(물)을 받는 보의 Sound Power 이다.

3. 수치 해석 결과와 논의

방정식(4)의 무차원 Sound Power 적분은 대기 또는 물속에서 진동하는 강철의 경우에 대하여 여러가지 무차원 변수들을 가지고 수치적분 하였다.

강철은 $E = 2 \times 10^{11} (N/M^2)$ 그리고 $\rho_s = 7800 (Kg/M^3)$ 이고, 물인 경우 $c_0 = 1460 (M/S)$, $\rho_0 = 1000 (Kg/M^3)$; 공기에 대하여 $c_0 = 343 (M/S)$, $\rho_0 = 1.24 (Kg/M^3)$ 이다.

Sound Power에 대한 강성계수와 Wavenumber 비의 효과를 연구하기 위해 x축을 Wavenumber 비, y축을 강성계수 그리고 z축을 Relative Sound power 인 3차원으로 나타내었다.

저주파수에서 구한 근사해를 수치적분의 결과와 비교해 보면 방정식(5)의 저주파수 영역에서의 Water 하중을 받는 보에서 방출하는 Sound Power의 값 $(\gamma^4 / a_0^2) \pi$ 은 그림 (2)에서 보이는 값들과 잘 일치한다.

물의 매개체로서의 Sound Power 방출의 경우 Peak가 발생하지 않는 이유는 구조물의 파장당 구조적 에너지가 소음 에너지로의 변환되는 비율이 공기에 비하여 상당히 크므로 구조물로부터 에너지가 빠르게 방출된다.

이 결과로 구조 감쇠 효과가 커진다. 공기의 경우는 이 비율이 작기때문에 감쇠 효과가 적어 Coincidence Peak가 발생한다.

그림 (2)와 같은 Water 하중이 작용하는 경우에 보에서 방출하는 Sound Power Level은 Wave-number 비

(γ) > 0.3 그리고 강성계수(β) = 1 인 경우에 Peak가 발생하는데 이것을 Resonance Radiation 이라고 부른다. 이 경우는 Driving 주파수가 보 진동의 고유 진동수에 접근되어 발생한다. 그림 (2-b)의 Contour Line를 보면 $\beta < 1$ 에서는 Wavenumber 비가 증가하면 Sound Power Level이 증가하지만 $\beta > 1$ 에서는 고주파수 부근에서 Sound Power Level이 감소한다는 것을 알 수 있다. 그러나 그림 (5), (6), (7)에서 보는 것처럼 보에 감쇄가 작용하는 경우에는 $\beta = 1$ 부근에서의 주위보다 높은 Sound Power Level이 주위의 Sound Power Level과 똑같이 되면서 전체적으로 Sound Power Level이 감소한다는 것을 확인하였다.

그림 (3), (4)에서 인장력과 압축력이 보에 작용하는 경우에는 작용하지 않을 때의 $\beta = 1$ 인 점에서의 Relative Sound power의 Peak값이 인장력의 경우 β 가 1보다 작은 근처에서 Peak가 발생하고 압축력이 작용하는 경우에는 β 가 1보다 큰 곳에서 Peak가 발생한다는 것을 알았다. 또한 $\beta > 1$ 인 고주파수 부근의 Sound Power Level이 압축력이 작용하는 경우에는 주파수가 증가할수록 증가한다는 것을 그림 (4)으로 부터 볼 수 있다.

Air 하중을 받는 보에서 방출하는 Relative Sound Power가 Water 하중에서의 Relative Sound Power 보다 상당히 높다는 것을 알고 있다. 그림 (8), (9), (10)에서 보는 것처럼 Air 하중을 받는 보에 감쇄를 가한 경우 Relative Sound Power Level이 전체적으로 감소하여 편평하게 되며 이 결과로 부터 Air 하중을 받는 보보다 큰 감쇄가 작용하는 경우에는 Water 하중을 받는 보의 경우와 같은 모양을 가진다는 것을 예측 할 수 있다.

보가 Air 하중을 받을 경우 그림 (8)에서 보는 것처럼 Coincidence Peak가 $\gamma > 1$ 부근에서 발생한다는 것을 알 수 있고 1차와 2차의 Coincidence Peak값이 거의 같고 3차 Coincidence Peak값이 상당히 커진다. 이것은 β 가 0인 경우이며 β 가 0보다 크면 Coincidence Peak값이 감소하여 주위의 값과 같아진다는 것을 알았다.

보에 감쇄만이 작용하는 경우와 감쇄와 인장력이 작용하는. 그림 (8)과 그림 (11)을 비교하면 모양은 서로 비슷하지만 그림 (11)이 전체적으로 Relative Sound Power Level이 약간 감소 한다는 것을 알 수 있다. 압축력이 작용하는 경우에는 $\beta > 1$, $\gamma = 1$ 인 부근에서 Relative Sound Power Level이 커진다는 것을 그림 (12)로 부터 볼 수 있다.

4. 결론

이 연구 결과로부터 강성과 Wavenumber 비에 대한 Sound Power를 각각의 장력과 감쇄값에 따라 계산하였다. 저주파수 부분이 고주파수 부분보다 Sound Power Level이 작다는 것을 알 수 있었고 $\beta = 1$ 은 고유 진동수와 구동 진동수가 일치한다는 것을 의미하며 공진 현상에 의하여 Peak값이 발생한다는 것을 알았다.

무차원 Sound Power Spectrum에서 $\beta > 1$ 이면, $\gamma = 0.7$ 주파수 부근에서 Sound Power Level이 상대적으로 높게 발생한다.

보에 인장력이 작용하느냐 압축력이 작용하느냐에 따라 Relative Sound Power Level이 감소하거나 증가 한다는 것을 알 수 있었다.

Water 하중을 받는 보의 구조 감쇄 효과가 Air 하중

을 받는 보의 구조 감쇄 효과 보다 상당히 커 Relative Sound Power Level이 작으며 또한 Air 하중을 받는 보에 이 작은 감쇄 효과에 의하여 Coincidence Peak 현상이 발생한다.

REFERENCE

1. M.I. Mogilevskii, "Sound Radiation from a Plate under the Action of Moving Harmonic Forces", *Sov. Phys. Acous.* 27(3), P250-P251, 1981.
2. R.F. Keitlie and H. Peng, "On the Acoustic Power Radiated by Line Forces on Elastic Beams", *Journal of Acoustic Society.* 77(6), P2033-P2038, 1985.
3. R.F. Keitlie, "A Note on the Acoustic Radiation from Point-Forced Elastic Beams", *Journal of Sound and vibration.* 92, P253-P260, 1984.
4. P.M. Mathews, "Vibration of a Beam on Elastic Foundation", *Z. angew. Math. Mech.*, 38(1958), 105-115
5. K.F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, Ohio State University Press, P170-P180, 1975.

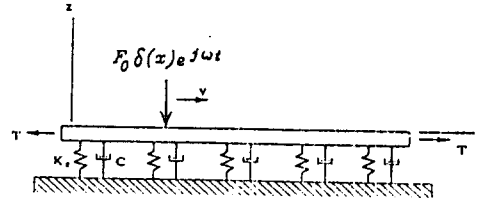


Fig. 1 : 기초 강성과 DAMPER를 갖는 보에 축력과 소와 진동 하중이 작용하는 모델

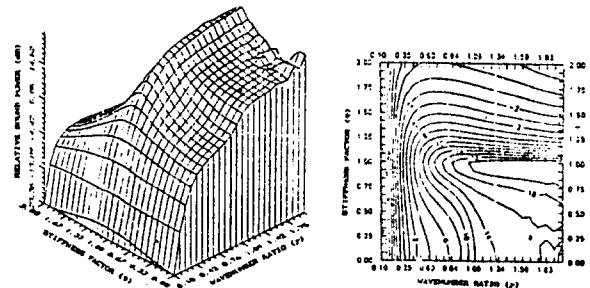


Fig. 2 : (a) Water loading을 받는 보의 강성 계수와 Wavenumber 비에 대한 Relative Sound Power (b) Contour Line : $T_1 = 0, \beta = 0$

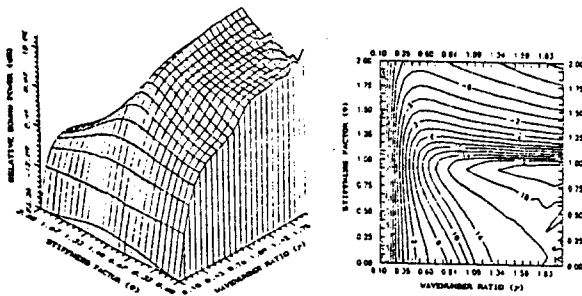


Fig. 3 : (a) Water loading을 받는 보의 강성 계수와 Wave number 비에 대한 Relative Sound Power
(b) Contour Line : $T_1 = 0.8, \beta = 0$

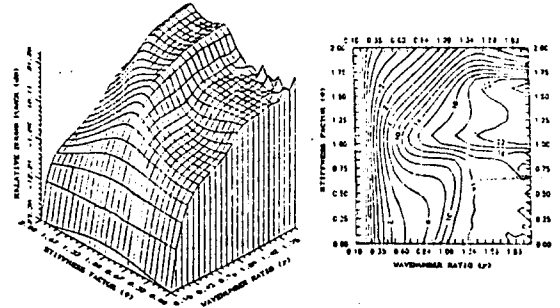


Fig. 4 : (a) Water loading을 받은 보의 강성 계수와 Wave number 비에 대한 Relative Sound Power
(b) Contour Line : $T_1 = -0.8, \beta = 0$

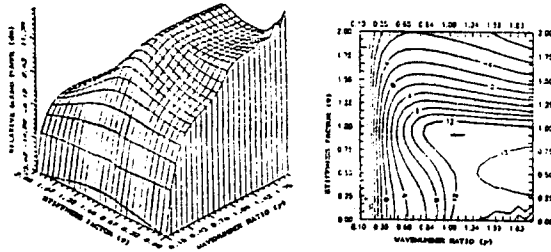


Fig. 5 : (a) Water loading을 받는 보의 강성 계수와 Wave number 비에 대한 Relative Sound Power
(b) Contour Line : $T_1 = 0, \beta = 0.1$

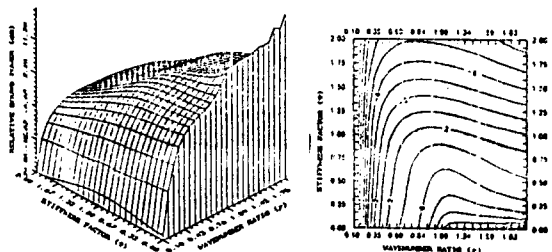


Fig. 6 : (a) Water loading을 받는 보의 강성 계수와 Wave number 비에 대한 Relative Sound Power
(b) Contour Line : $T_1 = 0, \beta = 0.5$

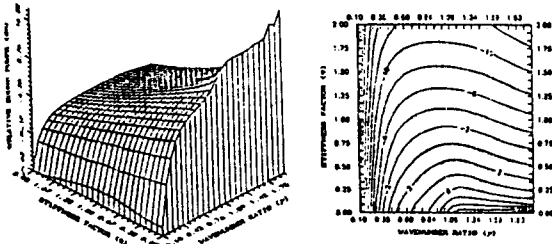


Fig. 7 : (a) Water loading을 받는 보의 강성 계수와 Wave number 비에 대한 Relative Sound Power
(b) Contour Line : $T_1 = 0, \beta = 1.0$

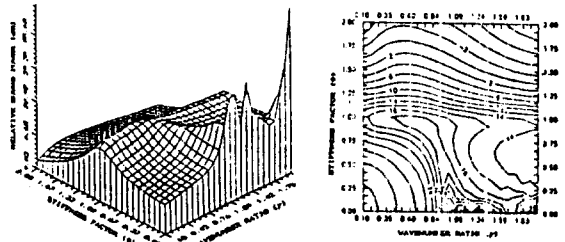


Fig. 8 : (a) Air loading을 받는 보의 강성 계수와 Wave number 비에 대한 Relative Sound Power
(b) Contour Line : $T_1 = 0, \beta = 0.1$

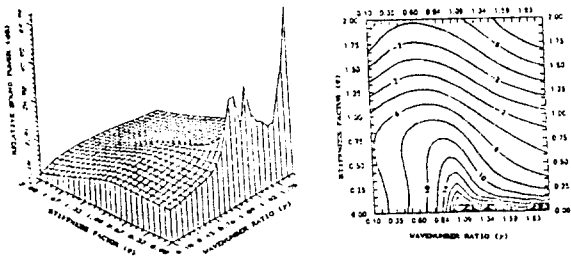


Fig.9 : (a) Air loading을 받는 보의 강성 계수와 Wave number 비에 대한 Relative Sound Power
(b) Contour Line : $T_1 = 0, \beta = 0.5$

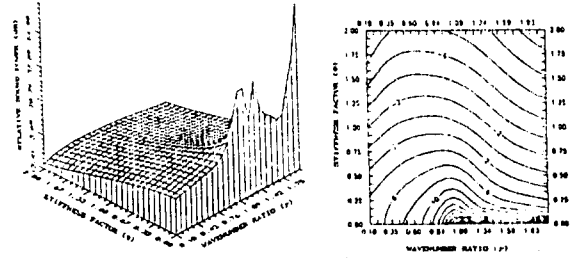


Fig.10 : (a) Air loading을 받는 보의 강성 계수와 Wave number 비에 대한 Relative Sound Power
(b) Contour Line : $T_1 = 0, \beta = 1.0$

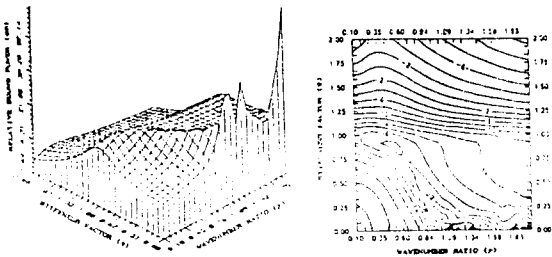


Fig.11 : (a) Air loading을 받는 보의 강성 계수와 Wave number 비에 대한 Relative Sound Power
(b) Contour Line : $T_1 = 0.8, \beta = 0.1$

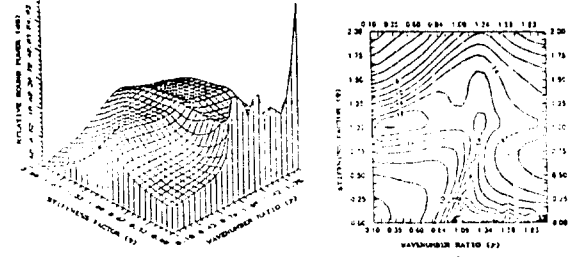


Fig.12 : (a) Air loading을 받는 보의 강성 계수와 Wave number 비에 대한 Relative Sound Power
(b) Contour Line : $T_1 = -0.8, \beta = 0.1$