강인한 모델기준 적응제어기의 설계
- 단입력 단출력 경우

°석 호 동 , 유 준 , 정 태 호
충남대학교 공과대학 전자공학과

A Robust Model Reference Adaptive Controller Design
- SISO Case -

HODONG SEOK, JOON LYOU AND TAEHO CHUNG
Dept. of Electronics Eng. , Chungnam National Univ.

Abstract

This paper presents a robust model reference adaptive controller for continuous-time single-input single-output linear time-invariant systems which are subjected to output-dependent disturbances as well as bounded external disturbances. In the derived controller form, an additional output error feedback term is included to override the destabilizing effects by the output-dependent disturbances.

1. 서론

플랜트의 매개변수가 정확히 알려져 있지 않거나 시간과 주변상황에 따라 천천히 변하는 경우, 그 미지의 값이나 변화에 스스로를 조정시켜 나갈수 있는 적응제어의 기능이 요구된다. 70년대 말에 어떤 특정한 (이상적인) 가정하에서 적응시스템의 안정성이 입증된 이래, 근래에 와서는 강인성이란 입장에서의 적응제어시스템 연구가 활발히 이루어지고 있다[1,5]. 이는 플랜트가 모델화되지 않은 동특성 (unmodelled dynamics)을 지니고 있거나 시스템에 잡음이 들어가게 되는 경우, 더이상 이상적인 가정들이 성립하지 않게 되어 전체 적응시스템은 불안정에의 가능성을 보여주기 때문이다.

그동안 모델기준 적응제어(MRAC)의 강인성에 관한 연구 진행 과정을 간단히 살펴보면 다음과 같다. Rohrs[1]는 unmodelled dynamics가 존재하는 경우 기존의 적응 알고리즘의 강인성에 의문을 제기하였고, Peterson과 Narendra[2]는 유한한 크기의 disturbances 영향을 받아 매개변수 추정치가 발산하는 것을 방지하기 위하여 적응법칙에 dead zone을 설치하는 것을 제안하였다. [3]에서는 매개변수 참값의 상한 정보를 이용하여 적응법칙에 변경을 가하였다. 또한 Ioannou와 Kokotovic[4]은 disturbance나 플랜트에 관한 사전지식이 거의 없이도, 종래의 적응법칙에 decaying항을 첨가함으로써 (소위 σ-수정이라 불림), 시스템내의 모든 신호들이 유한해짐을 보였다.

본 연구에서는 단입력 단출력 선형 시불변 시스템에 대해 외생적 disturbance 뿐만 아니라 출력에 의존하는 disturbance(예:모델링 오차) 가 존재하는 경우에도 강인하게 동작되는 모델기준 적응제어기를, σ-수정 Lyapunov 설계법[4]에 입각하여, 제시하였다. 본 방식은, 기존의 방식과 달리, 출력에 의존하는 disturbances의 비안정적 영향을 제압하기 위한 출력오차 궤환항을 포함하고 있다.

2. 문제 기술

다음과 같이 선형시불변 상태방정식으로 표현되는 연속시간 시스템을 생각하자

$$\dot{x}_p = A_p x_p + b_p u + w \quad (1)$$

$$y_p = c_p^T x_p$$

$$w = f(y_p) + d \quad (1.a)$$

여기서 $x_p \in R^n$은 상태벡터, $u \in R^1$ 은 입력벡터, $y_p \in R^1$은 출력벡터, $w \in R^n$ 은 disturbance 벡터, A_p, b_p, c_p는 적절한 차원의 행렬 또는 벡터이다. disturbance는 (1.a) 식에서 처럼 출력에 의존하는 항과 외생적인 항으로 구분된다. disturbance가 없는경우, 시스템의 전달함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{y_p(s)}{u(s)} = c_p^T(sI - A_p)^{-1}b_p = \frac{g_p\,\beta_p(s)}{\alpha_p(s)} \quad (2)$$

$\alpha(s)$와 $\beta(s)$는 각각 차수가 n,m인 s의 다항식이고, g는 정상상태 이득이다. 여기서 플랜트(1)에 다음의 가정을 한다.

(i) 입력과 출력만이 측정가능하다.

(ii) (A_p, b_p)는 가제어하고 (controllable), (A_p, c_p)는

가관측 하다(observable).

(iii) $\| f(y_P) \| \le \alpha_1 \; |y_P|$, $\| d \| \le \alpha_2$, α_1과 α_2는 양의 상수이며 그 값을 모른다. 즉 출력에 의존하는 disturbance는 출력의 1차식 형태로 표현되고, 외생적 disturbance는 유한하(bounded)지만, 그 크기를 알 수 없다.

(iv) 차원변수 n,m는 정확히 알려져 있으며, 상대차수 $n^* = n - m = 1$ 이다.

(v) 시스템은 minimum phase 성질을 가지고 있다.

(vi) g의 부호는 알려져 있다. 일관성을 잃지 않고 부호를 양이라 하자.

플랜트에 대응하여 원하는 특성을 지닌 기준모델을 다음과 같이 선정하자.

$$\frac{y_M(s)}{r(s)} = \frac{g_M \, \beta_M(s)}{\alpha_M(s)} \tag{3}$$

여기서 $\alpha_M(s)$, $\beta_M(s)$,은 차수가 각각 n,m인 안정한 다항식이며, g_M은 정상상태 이득으로 양의 상수이다. 또한 전달함수는 SPR(Strictly Positive Real)하도록 선택한다.

이제 문제는 시스템(1)이 기준모델(3)을 어떤 유한한(가능하면 작은) 오차범위를 가지고 추종하도록 적응제어를 결정하는 일이다. 이를 위하여 모델추종 적응제어기의 설계방법을 제시하고, 제어기를 포함한 플랜트와 기준모델의 차로 규정되는 오차시스템이 안정함을 보여주기로 한다.

3. 제어기 설계

플랜트의 상태백터가 available하지 못하므로, 다음의 State Variable Filter 를 통해서 발생된 보조신호들을 대신하여 사용한다.

$$\dot{v}_1 = F v_1 + h y_P \tag{4}$$

$$\dot{v}_2 = F v_2 + h u \tag{5}$$

여기서 v_1, v_2는 (n-1) 차원의 보조신호 벡터이고, (F,h)는 가제어 정규형이며, F는 안정한 행렬로 선택된다. (4),(5)식을 (1)식에 병합하여 다시쓰면, 시스템(1)에 관해 다음과 같은 nonminimal representation 을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_P & 0 & 0 \\ h c_P^T & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_P \\ 0 \\ h \end{bmatrix} u$$

$$+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{n-1} \\ 0_{n-1} \end{bmatrix} (f(y_P) + d) \tag{6}$$

$$y_P = [\; c_P^T \;\; 0_{n-1} \;\; 0_{n-1} \;] \; [\; x_P \; v_1 \; v_2 \;]^T$$

즉,

$$\dot{\bar{x}}_P = \bar{A}\,\bar{x}_P + \bar{b}\,u + T(f(y_P) + d)$$
$$y_P = \bar{c}^T \bar{x}_P \tag{6.a}$$

(6.a)의 $\bar{A}$ 에 대응하여 $\bar{A}$와 구조가 비슷한 안정한 행렬 $\bar{A}_M$를 정의하자.

$$\bar{A}_M = \begin{bmatrix} A_P + b_P\theta_0^* c_P^T & b_P\theta_1^* & b_P\theta_2^T \\ h c_P^T & F & 0 \\ h\theta_0^* c_P^T & h\theta_1^* c_P^T & F + h\theta_2^{*T} \end{bmatrix} \tag{7}$$

그러면 (7)의 $\bar{A}_M$를 대입하여 (6.a)는 다음과 같이 변형된다.

$$\dot{\bar{x}}_P = \bar{A}_M \bar{x}_P + \bar{b}u - \bar{b}\theta^{*T}\bar{\Psi} + T(f(y_P) + d)$$
$$y_P = \bar{c}^T \bar{x}_P \tag{8}$$

여기서, $\bar{\theta}^* = [\; \theta_0^* \;\; \theta_1^* \;\; \theta_2^* \;]^T$, $\bar{\Psi} = [\; y \; v_1^T \; v_2^T \;]^T$.

이에 대응하는 기준모델(3)은 다음과 같이 nonminimal 형태로 표시 될 수 있다.

$$\dot{\bar{x}}_M = \bar{A}_M \bar{x}_M + \bar{b}\theta_3^* r$$
$$y_M = \bar{c}^T \bar{x}_M \tag{9}$$

참고로 (9)의 전달함수가 (3)으로 축소될 수 있는 $\bar{\theta}^*, \theta_3^*$은 항상 존재 한다 [6].

여기서 오차를 $e = \bar{x}_P - \bar{x}_M$, $e_1 = y_P - y_M$ 이라 정의하면 오차 방정식은 다음과 같이 유도 된다.

$$\dot{e} = \bar{A}_M e + \bar{b}\,u - \bar{b}\theta^{*T}\Psi + T(f(y_P) + d)$$
$$e_1 = \bar{c}^T e \tag{10}$$

여기서 $\theta^* = [\; \bar{\theta}^{*T} , \theta_3^* \;]^T$, $\Psi = [\; \bar{\Psi}^T, r \;]$ 이다.

이제 (8)의 y_P가 (9)의 y_M을 유한한 오차범위를 가지고 추종하도록 하기 위하여 Lyapunov 설계법[4,5]에 입각한 적응제어기를 다음과 같이 제안 한다.

$$u = \theta^T(t)\,\Psi(t) - \rho(t)\,e_1(t) \tag{11}$$

$$\dot{\theta} = -\sigma\theta - e_1\Psi \tag{11.a}$$

$$\dot{\rho} = -\sigma\rho + e_1^2 \tag{11.b}$$

여기서 σ는 양의 실수이며, $\theta(t)$와 $\rho(t)$는 각각 θ^*와 ρ^*(편의상 추후에 정의될 것임)의 추정치로서 적응기구 (11.a),(11.b)를 통하여 매 순간 계산된다.

4. 안정 해석

(8)과 (11)로 구성되는 폐루프 시스템이 (9)의 기준 모델로 부터 벗어나는 정도를 나타내는 오차방정식은 다음과 같이 유도 된다.

$$\dot{e} = \bar{A}_M e + \bar{b}\,\phi_1(t)\Psi - \bar{b}\rho(t)e_1 + T(f(y_P) + d)$$

$$e_1 = \bar{c}^T e \tag{12}$$

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\theta} = -\sigma\theta - e_1\Psi \tag{12.a}$$

$$\dot{\phi}_2 = \dot{\rho} = -\sigma\rho + e_1^2 \tag{12.b}$$

여기서 $\phi_1 = \theta - \theta^*$, $\phi_2 = \rho - \rho^*$ 이다.

식(12)로 주어지는 오차 시스템의 안정성은 다음의 정리에 의해 보장된다. 편의상 정리에서 쓰기 위하여 다음의 사항을 먼저 소개하기로 하자.

i) MKY Lemma[6] :

(7)의 $\bar{A}_M$이 안정한 행렬이고 전달함수 $\bar{c}^T(sI - \bar{A}_M)^{-1}\bar{b}$가 SPR 이면 임의의 SPD(Symmetric Positive Definite)행렬 Q에 대하여

$$\bar{A}_M^T P + P\bar{A}_M = -Q \qquad P\bar{b} = \bar{c} \tag{13}$$

를 만족하는 유일한 SPD행렬 P가 존재한다.

ii)

$$\lambda_1 = \lambda_m(Q)/2 \;;\; \lambda_m(Q)\text{는 Q의 최소 고유치} \tag{14.a}$$

$$\rho^* = \alpha_1^2 / \lambda_1 \;;\; \lambda_2 = \| PT \| \alpha_1 \tag{14.b}$$

$$\begin{aligned} \| f(y_P) + d \| &\le \| f(y_P) \| + \| d \| \\ &\le \alpha_1 \mid y_P \mid + \alpha_2 \\ &\le \alpha_1 \mid e_1 \mid + \alpha \end{aligned} \tag{14.c}$$

여기서 세번째 부등식은 두번째 부등식에 $|y_P| \le |e_1| + |y_M|$ 을 적용하여 나온것이고, $\alpha = \alpha_1|y_M| + \alpha_2$ 이다.

$$\lambda_3 = \| PT \| \alpha \tag{14.d}$$

정리 1

2장에 기술한 (i) - (iv)의 가정아래서 형성된 오차시스템 (12), (12.a), (12.b)의 모든 신호들은 임의의 유한한 초기치 및 모든 t에 대해 유한하다. (globally uniformly bounded)

(증명) Lyapunov 함수를 quadratic form으로 다음과 같이 선정하자.

$$V(e,\phi_1,\phi_2) = e^T P e + \phi_1^T\phi_1 + \phi_2^2 \tag{15}$$

V를 시간에대해 미분하고,식(12),(12.a),(12.b),(13)에 따라 평가하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} &\dot{V}(e,\phi_1,\phi_2) \\ &= -e^TQe - 2e^TP\bar{b}\rho e_1 + 2e^TPT(f(y_P) + d) - 2\sigma\theta^T\phi_1 + 2\dot{\phi}_2\phi_2 \\ &\le -\lambda_1 \| e \|^2 - \frac{\lambda_1}{2}\Big(\| e \|^2 - 4\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \| e \| \mid e_1 \mid \\ &\quad + 4\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \| e^TPB \|^2\Big) - \frac{\lambda_1}{2}\Big(\| e \|^2 - 4\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \| e \|\Big) \\ &\quad - 2\sigma\rho\phi_2 - \sigma\phi_1^T\phi_1 - (\sigma\phi_1^T\phi_1 - 2\theta^*\phi_1) \\ &\le -\lambda_1 \| e \|^2 - \sigma \| \phi_1 \| - \sigma\phi_2^2 + \frac{2\lambda_3^2}{\lambda_1} \\ &\quad + \sigma \| \theta^* \|^2 + \sigma\rho^{*2} \end{aligned} \tag{16}$$

여기서 첫번째 부등식은 (14.a) - (14.d)식을 이용하여 관련항을 묶어 놓은 것이고, 두번째 부등식은 첫번째 부등식의 (·)항을 완전제곱한 뒤 나머지 부분을 추려 정리한 것이다. 이제 부등식 (16)으로부터, 우리는 어떤 compact region(residual set) $\mathcal{D}$ 외부에서 $\dot{V}$이 항상 0보다 작음을 알 수 있다.

$$\mathcal{D} = \{(e,\phi_1,\phi_2) : \lambda_1\| e \|^2 + \sigma \| \phi_1 \|^2 + \sigma\phi_2^2 \le 2\frac{\lambda_3^2}{\lambda_1} + \sigma \| \theta^* \|^2 + \sigma\rho^{*2}\} \tag{17}$$

여기서 부등식(17)의 우변은 외생적 disturbance d와 모델의 출력 y_M의 유한성으로부터 양의 상수값이므로, 영역$\mathcal{D}$의 boundary는 유한하다. 따라서 [5]의 정리 2.24에 의하여 시스템내의 모든 신호들은 유한하다.

증명 끝

5. 수치예

다음과 같이 disturbance의 영향을 받고 불안정한 연속시간 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}_P = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_P + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + w, \quad x_P(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$y_P = [\,1 \quad 0\,]\, x_P \qquad w = \begin{bmatrix} 0.9 \cos 2t + 0.5\, y_P \\ 0.5 \sin t + y_P \end{bmatrix}$$

disturbance가 없는 경우의 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{y_P(s)}{u(s)} = \frac{s + 2}{s^2 - 2}$$

또한 기준모델을 다음과 같이 선정하자.

$$\dot{x}_M = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_M + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r, \quad x_M(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$y_m = [\ 1 \quad 1\ ]\ x_M \qquad r = 3$$

그러면 기준모델의 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{y_M(s)}{r(s)} = \frac{s + 1}{(s + 2)^2}$$

이제 예제 시스템에 대해 제안된 적응제어기를 적용한 컴퓨터 묘사가 수행되었다. 여기서 설계변수 σ와 θ, ρ의 초기치를 아래와 같이 선정하여 시뮬레이션한 결과가 그림 1,2에 주어져 있다.

$\sigma = 0.01 \quad \theta(0) = [\ 0\ 0\ 0\ 0\ ] \quad \rho(0) = 0$

4절에서 예측한 바와같이 플랜트의 출력은 기준모델의 출력을 어느 일정한 오차범위를 가지고 잘 추종하고 있으며 (그림 1 참조), 조정변수 $\theta(t)$와 $\rho(t)$는 모든 t에 대해 유한함을 볼 수 있다 (그림 2 참조).

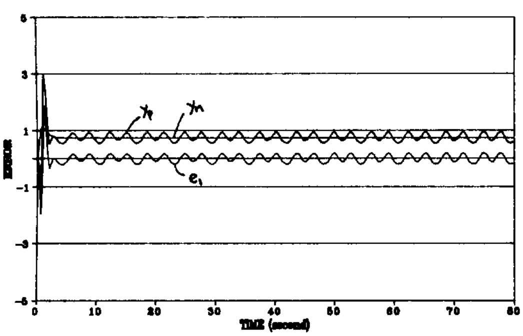

그림 1. 추종오차의 궤적

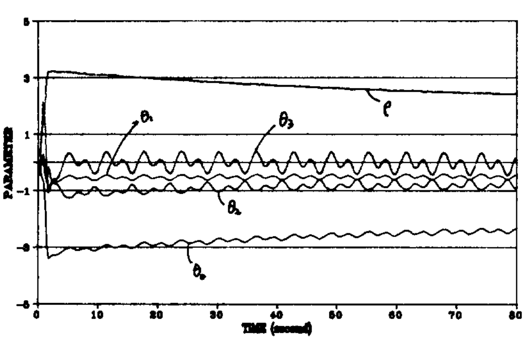

그림 2. 조정변수들의 궤적

5. 결론

본 연구에서는 단입력 단출력 선형 시불변 연속시간 시스템이 외생적 disturbances 뿐만 아니라 플랜트의 출력에 의존하는 disturbance의 영향을 받음에도 불구하고 원하는 특성을 지닌 기준모델을 추종하도록 하기 위하여, 강인한 적응제어기를 설계하는 방법이 제시되었고, 전체 적응 시스템내의 모든 신호들이 유한하게 됨을 보였다.
본 방식은 기존의 σ - 수정에 의한 설계법[4]을 확장한 것으로, 출력에 의존하는 disturbances의 비안정적 영향을 재압하기 위한 출력오차 궤환항을 포함하고 있다.

앞으로 선형 시불변 이산형 시스템에 대해 강인한 적응제어기를 설계하는 연구가 수행될 예정이다

참 고 문 헌

[1] C.E.Rohrs, Adaptive Control in the Presence of Unmodelled Dynamics, Ph.D.Thesis, MIT, Aug. 1982.

[2] B.B.Peterson and K.S.Narendra, "Bounded Error Adaptive Control", IEEE Trans. Auto. Contr., 27:1161-1168, Dec. 1982.

[3] G. Kreisselmeier and K.S. Narendra, "stable Model Reference Adaptive Control in the Precence of Bounded Disturbances", IEEE Trans. Auto. Contr., 31:127-133, 1986.

[4] P.A.Ioannou and P.V.Kokotovic, Adaptive Systems with Reduced Models, New York : Springer-Verlag, 1983.

[5] K.S.Narendra and A.M. Annaswamy, Stable Adaptive Systems, New Jersey ; Prentice-Hall, 1989.

[6] K.S. Narendra, Yuan-Hao LIN and L.S. Valavani, "Stable Adaptive Controller Design -Direct Control", IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. 23, PP. 570-582, Aug. 1978