

6자유도 매니플레이터 역기구학 해를 구하기 위한 새로운 방법

정 용 옥^o 류 재 춘 박 종 국
 경희대학교 전자공학과

A New Method for Solving the Inverse Kinematics for 6 D.O.F. Manipulator

Chung, Yong Oug^o Ryu, Jae Chun Park, Chong Kug
 Dept. of Electronic Eng. Kyung Hee University

ABSTRACT

In this paper, we present new methods for solving the inverse kinematics associated with 6 degree of freedoms manipulator by the numerical method. This method will be based on tracking stability of special nonlinear dynamical systems, and differs from the typical techniques based by the Newton-Gauss or Newton-Raphson method for solving nonlinear equations.

This simulation results show that the new method is solving the inverse kinematics of PUMA 560 without the derivative of a given task space trajectories.

I. 서론

매니플레이터의 모든 작업은 작업영역을 기준으로하여 수행하게된다. 그러므로 작업영역을 기준으로하여 공구의 위치와 방향이 주어졌을때 성공적으로 작업을 수행하기위하여 매니플레이터의 모든 가능한 관절각들을 계산하는 역기구학이 실제 매니플레이터를 이용하는데있어 기본이된다.

역기구학 해를 찾기위해 많은 연구 결과들이 도출되었다. 그중 Uicker, Pieper과 Lirvin[10]의 업적들은 과히 주목할 만하다. 역기구학의 해를 구하는 방법에는 크게 폐형식(Closed-form)해와 수치(Numerical)해 두가지로 분류된다. [7] 일반적으로 폐형식 해는 단순한 기구학구조를 갖는 매니플레이터에서 사용되어지나 6자유도를 갖는 매니플레이터의 역기구학 해는 폐형식에서의 기법으로는 직접적으로 구할 수 없다. 따라서 폐형식 해에 의존하지 않는 새로운 방법이 요구되어진다.

본 논문에서는 6자유도를 갖는 매니플레이터의 역기구학 문제를 해결하기위해 새로운 수치해석법을 제안하였고 모의 실험을 통하여 그 유효성을 입증하였다. 제안한 방법은 비선형 동역학 시스템의 안정도 추적에 기초를 두어 전개해 나가며, 미분방정식을 수치해석법으로 풀기위한 기존의 Newton-Gauss, Newton-Raphson방법에 기초를 둔 기법과는 달리 목적궤적에 대하여 수치미분하여 사용하는 미분기의 도입없이 조인트 변위(θ_0)를 구할 수 있다는 장점이있다.

II. 역기구학 해법

II.1 Newton-Raphson방법에의한 역기구학 해법

3자유도를 갖는 매니플레이터의 역기구학 해를 반복방법인 Newton-Raphson 알고리즘에 기초를두어 구해본다. [7] 매니플레이터의 링크 변위를 일반적으로 렬(Column)벡터 θ 에 의해 나타내고 말단효과장치의 위치를 렬벡터 P로 표현한다면, 전향 기구학 방정식은 다음과 같다.

$$P = G(\theta) \quad (2.1)$$

여기서, $G(\theta)$ 는 링크 공간에서의 링크변위를 직각 공간에서의 위치로 변환하는 함수이다. 즉 원하는 링크 변위 θ 가 주어졌을때 말단효과장치의 직각(Cartesian)위치는 식(2.1)에 의해 쉽게 구할 수 있다. 식(2.1)을 이용하여 역기구학 해(θ)를 구하기위하여 다음과 같이된다.

$$P = G(\theta) = 0 \quad (2.2)$$

비선형 식(2.2)에서 반복방법으로 근사 해(θ)를 구하기위해 아래의 표현기법을 사용한다.

$$\theta^{(k+1)} = \theta^k + \delta^k \quad (2.3)$$

여기서, k는 반복회수를 나타내며, δ^k 는 아래처럼 나타낸다.

$$\delta^k = - \frac{G_j(\theta^k)}{J^k \theta^k} \quad (2.4)$$

그리고 자코비안행렬 $J_{j i}^k$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$J_{j i}^k = \frac{\partial G_j}{\partial \theta_i} \quad \left| \begin{array}{l} \theta_i = \theta_i^k (j: j\text{-번째 링크}, \\ i: i\text{-번째 조인트변위}) \end{array} \right. \quad (2.5)$$

함수 G_j 는 연속 미분 가능하고 $\partial G_j / \partial \theta_i$ 는 nonsingular하다. 식(2.3)(2.4)(2.5)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\theta^{(k+1)} = \theta^k - (J^k)^r G(\theta^k) (\theta^k)^{-1} \quad (2.6)$$

여기서, $J^r(\theta)$ 는 right inverse인데 $J(\theta)$ 가 full 랭크일때 갖게된다. 자코비안행렬이 정방행렬일경우 $J^r(\theta)$ 는 $J^{-1}(\theta)$ 와 동일하다. 식(2.6)으로부터 아래식이 구해진다.

$$\dot{\theta}^k = (J^k)^{-1} \frac{G(\theta^k)}{\theta^k - \theta^{(k+1)}} \quad (2.7)$$

여기서, $G(\theta^k)/(\theta^k - \theta^{(k+1)})$ 는 $G(\theta^k)$ 의 도함수, 즉 \dot{P} 와 동일하다. 그래서 식(2.7)은 아래식과 같이 간단히 표현가능하다.

$$\dot{\theta} = J^{-1}(\theta)\dot{P} \quad (2.8)$$

이 알고리즘의 단점은 비선형함수 $G(\theta)$ 의 도함수를 알아야 한다는 점이다. 알고 있는 말단효과장치의 위치 P 로부터 링크변위 θ 를 계산하기위한 간단한 기존의 역기구학 시스템은 그림 1.에서 나타낸다.

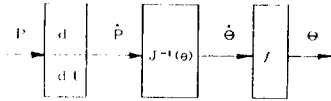


그림 1. 기존의 역기구학 시스템

Figure 1. Classical Inverse Kinematics System

기존의 역기구학 해석방법은 수치계산에 있어서는 거의 정확하게 이루어지지만 실제 미니플래이터 실행에 있어서는 미분제어기(d/dt)의 불안정성에 의해 오차가 발생한다.

II.2 제안한 역기구학 해법

기존의 역기구학 해석방법에서 발생하는 오차를 보상해 주기위해 미분제어기 대신 궤환을 사용하는 새로운 시스템을 구성하였다.[2][6]

공구축에대한 기본 좌표축의 회전 좌표변환 행렬 $R^t_o(\theta_o)$ 는 아래와 같이 표현한다.[5]

$$R^t_o(\theta_o) = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = (n \ s \ a) \quad (2.9)$$

여기서, 벡터 n, s, a 는 일반적으로 공구 축방향과 관계되는 방향코사인으로서 표현된다.

6링크 갖는 매니플레이터의 완전한 전향 기구학은 다음과 같이 표현된다.[6]

$$\begin{bmatrix} P \\ a \\ n \end{bmatrix} = G(\theta_o) \quad (2.10)$$

여기서, P 는 3×1 , $G(\theta_o)$ 는 D-H 변환행렬로부터 구해지는 9×1 행렬이다.

자코비안 행렬은 링크공간과 직각공간에서의 매니플레이터 속도관계를 나타내며, 매니플레이터가 6자유도를 갖을때 6×6 으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \omega \end{bmatrix} = J(\theta_o) \dot{\theta}_o \quad (2.11)$$

역기구학 해를 구하기위해 제안한 역기구학시스템은 그림 2.에서 나타내었다. 목적 위치와 방향벡터(P_d, a_d, n_d)는 시스템 입력으로 주어지고 링크변위와 이에대한 시간미분 해 벡터($\theta_o, \dot{\theta}_o$)는 시스템 출력으로서 주어진다.

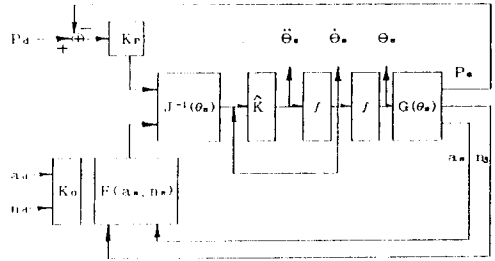


그림 2. 제안한 역기구학 시스템

Figure 2. Proposed Inverse Kinematics System

$F(a_o, n_o)$ 는 회전속도(\dot{a}, \dot{n})를 각속도 ω 로 변환하는 변환 행렬이며 방향 해벡터로부터 직접 구해지는 항으로 구성되므로 방향해의 비선형 궤환은 $F(a_o, n_o)$ 를 통해 이루어지는 것을 택한다.[1]

계산시스템의 동역학은 그림 2.으로부터 구해지는 미분방정식에 의해서 나타내어진다.

$$\dot{\theta}_o = J^{-1}(\theta_o) \begin{bmatrix} K_p(P_d - P_o) \\ F(a_o, n_o) K_o \begin{bmatrix} a_d \\ n_d \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

식(2.11)와 (2.12)으로부터 위치와 방향의 두 벡터 방정식이 구해진다.

$$\dot{P} = K_p(P_d - P_o) \quad (2.13)$$

$$\omega = F(a_o, n_o) K_o \begin{bmatrix} a_d \\ n_d \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

그림 2.에서 제안한 역기구학 시스템을 기초로하여 정확한 위치궤적의 추적을위하여 위치 입력궤적과 도함수 궤적의 결합에대한 새로운 위치 입력궤적을 설정한다.

식(2.13)는 목적 공구축 위치(입력)와 해 공구축 위치(출력)사이의 선형관계를 나타낸다. 식(2.13)을 라플라스 변환하고 초기 위치오차($P_o(t_0)$)를 0이라고 가정하면 매니플레이터 전이관계(transfer relation)는 다음과 같다.

$$P_o(s) = \frac{K_p}{s + K_p} P_d(s) \quad (2.15)$$

여기서, 's'는 라플라스 변환의 독립변수이고 $P_o(s), P_d(s)$ 는 각각 $P_o(t), P_d(t)$ 의 라플라스변환이다. 이러한 전이관계는 위치 추적오차를 0으로 만들어줄 수 있는데, 만약 목적 위치에대한 시간의 도함수(\dot{P}_d)를 궤적에 따라서 알 수 있다면

함수 \hat{P}_d 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{P}_d = P_d + \frac{\dot{P}_d}{K_p} \quad (2.16)$$

$P_d(t_0)$ 를 0 이라고 가정하면, 식(2.16)의 전이관계는 아래와 같이 구해진다.

$$\hat{P}_d(s) = \frac{s+K_p}{K_p} P_d(s) \quad (2.17)$$

여기서, $\hat{P}_d(s)$ 는 $\hat{P}_d(t)$ 의 라플라스변환이다. 그림 3. 에서 나타내는 것과 같이 \hat{P}_d 가 역기구학 계산시스템의 입력이 된다면 식(2.15)과 (2.17)에 의하여

$$P_e(s) = P_d(s) \quad (2.18)$$

가 되고, 이는 위치오차가 0 이됨을 의미한다. 즉

$$P_e(t) = P_d(t) - P_e(t) = 0 \quad (2.19)$$

위치궤적은 전체궤적을 따라 0으로 수렴하게된다. 결과적으로 초기 목적 공구축 속도가 0이고, 초기위치오차가 0 이라면, 그림 3. 에서 나타내는 계산 시스템은 위치 추적오차를 0으로 수렴하게된다. 그러나 목적 방향과 해 방향은 선형 관계에의해 이루어지지 않기때문에 방향오차를 완전히 0으로 수렴시키기에는 많은 어려움이 뒤따른다. 그래서 방향벡터 (n_x, n_y) 에 대한 추적오차는 3장의 방향안정도에서 구해본다.

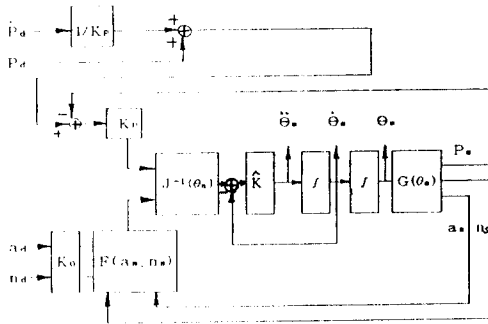


그림 3. 위치와 도함수입력 시스템

Figure 3. Position and Derivative Input System

III. 방향 안정도

식(2.14)로부터 계산시스템의 방향 동역학을 구한다. 목적 방향궤적에대한 해궤적의 오차한계를 구하기위해 방향코사인 (a_x, n_x) 에대해 분석해본다.

III.1 a_x 의 추적분석(Tracking analysis of a_x)

그림 4.는 a_d 와 a_e 에의해 평면이 구성됨을 보여주는데 δ 는 a_d 와 a_e 사이의 각을 나타내고

$$a_e \equiv a_d - a_e \quad (3.1)$$

이다. $\|a_d\|$ 가 \dot{a}_{dmax} 에 의해 한계되어지고, δ_0 를 시간 $T = t_0$ 에서 δ 값이라면 시간 T에서의 δ 한계는 다음과 같다.

$$\delta(T) \leq (\dot{a}_{dmax} / K_0) + \delta_0 e^{-K_0(T-t_0)} \quad (3.2)$$

그림 4.에서의 $\|a_e\| = \delta$ 와 식(3.2)로부터 a_e 의 추적 오차에

의해서 유용한 오차한계를 구한다.

$$\|a_e(T)\| \leq (\dot{a}_{dmax}/K_0) + \|a_e(t_0)\|e^{-K_0(T-t_0)} \quad (3.3)$$

식(3.3)에서 \dot{a}_{dmax} 가 목적 회전속도의 최대값이라면 아래와 같이 표현된다.

$$\|a_e(T)\| \leq (\omega_{dmax}/K_0) + \|a_e(t_0)\|e^{-K_0(T-t_0)} \quad (3.4)$$

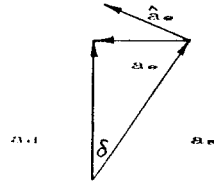


그림 4. a_d 와 a_e 에 의해 구성되는 평면

Figure 4. Plane Spanned by a_d and a_e Vector

III.2 n_x 의 추적 분석

목적 방향이 고정되어있다고 가정하면, 해축(solution frame) 방향은 목적 축에 대해 회전된 순서, 즉 첫째로 n_d 축에 대해 α_1 회전을하고, 두번째로 새로운 축 \hat{s}_d 에 대해 α_2 회전을하고, 마지막으로 새로운 축 a_e 에 대해서 α_3 회전을 한다. 이는 그림 5.에 나타낸다.[5]

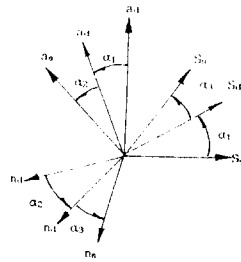


그림 5. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 에 의한 순서회전

Figure 5. Ordered Rotation by $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

a_e 의 경우에 있어서 선형화된 오차한계를 구하기위해 해축이 목적 축에 근접한다고 가정하면 α_1, α_2 와 α_3 는 작게 나타내어지고 α_3 에대한 오차한계는 다음과 같다.

$$|\alpha_3(T)| \leq (\omega_{dmax}/K_0) + |\alpha_3(t_0)|e^{-K_0(T-t_0)} \quad (3.5)$$

해축이 목적축에 수렴할 경우 α_1 과 α_2 는 0으로 수렴하게 되고,

$$a_d \approx a_e \quad (3.6)$$

가 된다. 그리고 n_x 축과 a_x 축의 오차는 그림 5.로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\|n_d - n_e\| \approx \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \quad (3.7)$$

$$\|a_d - a_e\| \approx \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad (3.8)$$

식 (3.8)로부터 $\alpha_2 \leq \|a_e\|$ 를 구할 수 있고 식(3.7)에 대입하여 선형화된 한계는 다음식과 같이 구한다.

$$\|n_e\| \leq \sqrt{\|a_e\|^2 + \alpha_3^2} \quad (3.9)$$

즉, $\|a_e(t_0)\|$ 와 $\|n_e(t_0)\|$ 가 작고, 선형화된 영역에서 추적 오차를 작게하여 시스템을 안정하게 하기위해 충분히 큰 K_0 를 선택한다면, $\|a_e\|$ 는 식(3.4)에 의해 한계되어지고 α_3 는 식(3.5)에 의해 한계되어진다.

많은 매니플레이터의 응용에서 원하는 위치궤적이 변화할 때 원하는 방향궤적은 일정(상수)하다. 예로서 스프레이칠이나 공구 사용에 의한 일직선절단 등 많은 제조업 분야에서 찾아볼 수 있다. 즉 목적 각속도 $\omega_d = 0$ 일 경우, 시스템의 방향의 초기 추적오차가 0이면 그림.4 에서 나타내는 역기구학 시스템에서 위치와 방향의 추적오차는 식(2.19)와 (3.4), (3.5), (3.9)에 의해 '0'으로 나타내게된다.

IV. 구면 wrist 갖는 매니플레이터 위치궤적

3자유도에서 위치와 방향 표현을위해 최소 6자유도가 필요 한데, 방향을 나타내기위해 사용되는 마지막 3링크의 축이 한점에서 교차할때 구면 'Wrist' 갖는다고 한다.[8][9]

6링크 매니플레이터가 구면 'Wrist'에 의해 특징되어 진다면 전향기구학은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} P_w \\ a \\ n \end{bmatrix} = G_w(\theta) \quad (4.1)$$

여기서, P_w 는 Wrist의 원점위치이며, $G_w(\theta)$ 는 구면 'Wrist' 매니플레이터에 대한 전향기구학 함수이다. Wrist의 원점 위치와 말단효과장치의 위치사이의 관계는 다음과 같이 표현된다.[8]

$$P = P_w + ra \quad (4.2)$$

여기서, r 은 공구축과 Wrist축 원점 사이의 스칼라 거리이다. 이는 그림 6.에 나타난다.

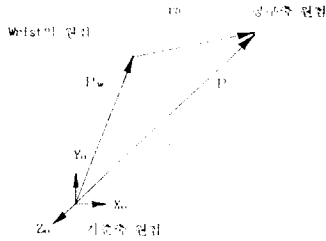


그림 6. Wrist의 위치

Figure 6. Wrist Position

V. 모의 실험

6자유도의 구면 Wrist 갖는 PUMA 560 매니플레이터에 제안된 역기구학 해석방법을 적용하여 모의실험 하였다. 원하는 Wrist 위치와 방향궤적은 시간의 함수로서 주어지는데 Wrist 위치궤적 P_d 는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} P_{dx} \\ P_{dy} \\ P_{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 + 0.25 \cdot \cos(\text{Time}/2) \\ -0.05 + 0.45 \cdot \cos(\text{Time}/2) \\ 0.55 + 0.45 \cdot \cos(\text{Time}/2) \end{bmatrix}$$

$$a_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad n_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

여기서, 방향궤적은 오일러각 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

$$\gamma_1 = \text{ATAN2}(a_y/a_x)$$

$$\gamma_2 = \text{ATAN2}((n_x^2 + n_z^2)^{1/2}/a_x)$$

$$\gamma_3 = \text{ATAN2}(s_z/-n_x)$$

에 의하여 Z-Y-Z오일러각 회전에서 각각 $\gamma_1=90, \gamma_2=90, \gamma_3=180$ 회전을 의미한다.

그림 3.의 계산시스템에서 이득행렬 $K_p=50.9I, K_v=20.0I, K=25.5I$ 으로 선택하고 링크길이 $L_1=0.55m, L_2=0.45m, L_3=0.13m$ 로한다.

그림 7.8.9.에서 X축, Y축, 그리고 Z축에대한 목적 위치궤적과 해 위치궤적을 비교해보고 그림 10.11.은 a벡터와 n벡터에대한 목적 방향궤적과 해 방향궤적을 나타내었다. 그리고 역기구학 해 $\theta_s, \dot{\theta}_s$ 는 그림 12.13.에서 나타난다. 모의 실험의 결과로부터, 새로이 제안한 역기구학시스템은 위에서 설정한 이득행렬에서 빠른 시간내에 해궤적이 목적궤적을 수렴함을 알 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 기존의 역기구학에서 미분제어기의 불안정성을 보완해 주기위해 제안한 역기구학 방법을 6자유도의 구면 Wrist 갖는 매니플레이터에 적용하여 역기구학의 해를 구하는 방법에 대해 논했다. 위치추적오차를 0으로하기위해 목적궤적과 도함수를 결합한 새로운 위치궤적을 설정하여 그림.3 시스템에서의 위치 목적궤적으로 입력하게된다. 제안한 시스템은 충분히 큰 이득값(K_p, K_v, \hat{K})의 선택에 의해 위치와 방향의 추적오차를 매우 작게 수렴시킬 수 있다.

기존의 역기구학 해석방법에있어 미분제어기에 의한 불안정 요소는 제안한 역기구학 시스템의 대치에 의해 완전히 극복할 수 있음을 모의실험을 통해 입증하였다. 앞으로의 연구 과제는 모의실험을 통해 실효성이 입증된 제안한 역기구학 시스템을 실시스템에 적용하는 것이다.

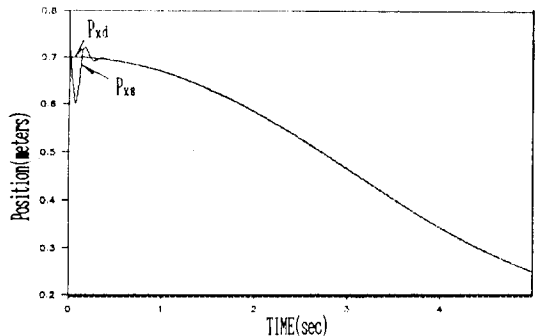


그림 7. X축에대한 목적 위치궤적과 해 위치궤적

Figure 7. Desired and Solution Position Trajectories for X axis

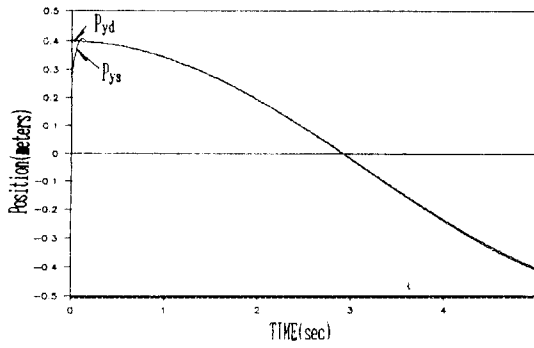


그림 8. Y축에대한 목적 위치궤적과 해 위치궤적

Figure 8. Desired and Solution Position Trajectories for Y axis

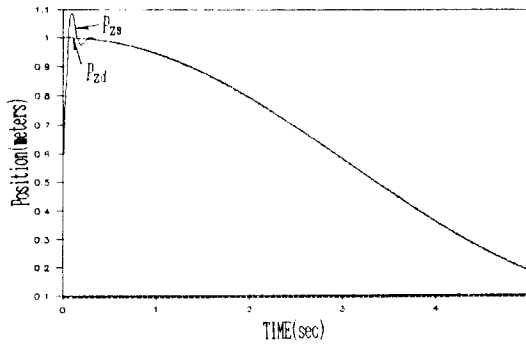


그림 9. Z축에대한 목적 위치궤적과 해 위치궤적

Figure 9. Desired and Solution Position Trajectories for Z axis

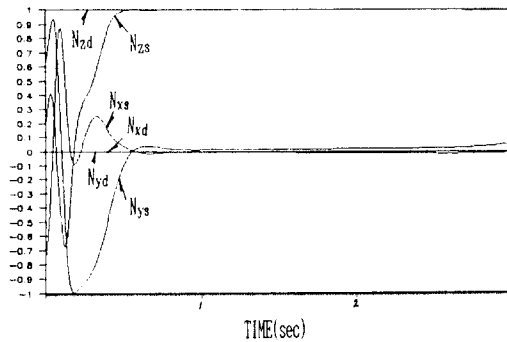


그림 10. Normal 벡터의 목적 방향궤적과 해 방향궤적

Figure 10. Desired and Solution Orientation Trajectories for Normal Vector

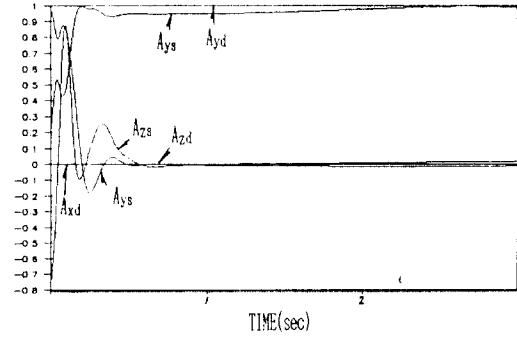


그림 11. Approach 벡터의 목적 방향궤적과 해 방향궤적

Figure 11. Desired and Solution Orientation Trajectories for Approach Vector

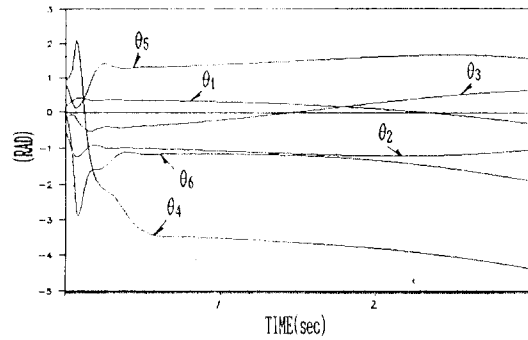


그림 12. 역기구학 해 (θ_*)

Figure 12. Inverse Kinematic Solution θ_*

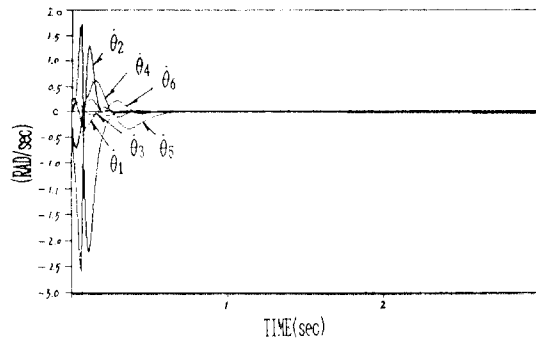


그림 13. 역기구학 해 ($\dot{\theta}_*$)

Figure 13. Inverse Kinematic Solution $\dot{\theta}_*$

참고 문헌

[1] Flueckiger, K.W. "Numerical Inverse Kinematic Solution for N Degree of Freedom Robotic Manipulators Using Nonlinear Dynamic Systems" Brown University, 1989

- [2] R.J.Vaccaro. "A JointSpace Command Generator for Cartesian Control of Robotic Manipulator" IEEE Journal of Robotics and Automation, vol 4 no.1 1988, pp.70-76
- [3] Wolovich, W.A. "Robotics: Basic Analysis and Design" new york: Holt, Rinehart and Winston, 1987
- [4] S.D.Hill and R.J.Vaccaro, "A Command Generator for 6 D.O.F. Robotic Manipulators" IEEE Int. Conf. Robotics and Automation Mar. 1987. pp.1104-1109
- [5] Gonzales, R.C. "Robotics Control, Sensing, Vision, and Intelligence" McGraw-Hill, Inc, 1987
- [6] S.D.Hill and R.J.Vaccaro, "Cartesian Control of Robotic Manipulators with Joint Compliance" In Proc. Amer. Control Conf., June 1986, pp.114-120
- [7] B.Benhabib, A.A.Goldenberg, "A Solution to the Inverse Kinematics of Redundant Manipulators" In Proc. Amer. Control Conf. June 1986, pp.368-373
- [8] Lorenzo Sciavicco and B.Siciliano. "An Inverse Kinematic Solution Algorithm for Robots with Two-By-Two Intersecting at the Endeffector" IEEE Int. Conf. Robotics and Automation Mar. 1986, pp.673-678
- [9] Richard, P.Paul. "Kinematics of Robot Wrists" The International Journal of Robotics Research, vol.2, no.1, 1983, pp.31-38
- [10] Uicker, J.J. "On the Dynamic Analysis of Spatial Linkages Using 4 by 4 Matrices" Ph.D. Thesis Dept of Mechanical Engineering and Astronautical Science, northwestern university, 1965