

# 유한요소 및 모달감소법을 이용한 유연로봇팔 운동방정식의 정식화

김 창 부    유 영 선  
 인하대학교 공과대학 자동화공학과

## Formulation of The Equation of Motion for Flexible Robotics Arms by Using The Finite Element and Modal Reduction Method

Chang-Boo Kim    Young-Sun Yoo  
 Dept. of Industrial Automation, Inha University

### ABSTRACT

In the design and operation of robot arms with flexible links, the equations of motion are required to exactly model the interaction between rigid motion and elastic motion and to be formulated efficiently. Thus, the flexible link is represented on the basis of the D-H rigid link representation to measure the elastic deformation. The equations of motion of robot arms, which are configured by the generalized coordinates of elastic and rigid degrees of freedom, are formulated by using F.E.M. to model complex shaped links systematically and by eliminating elastic mode of higher order that does not largely affect motion to reduce the number of elastic degree of freedom. Finally, presented is the result of simulation to flexible robotic arm whose joints are controlled by direct or PD control.

### 1. 서론

일반적으로 로봇들은 가볍고 빠르면서 정확한 동작을 필요로 하고 있지만 실제로 로봇을 구성하고 있는 링크의 유연성에 의한 영향을 줄이기 위해서 강인성을 증가시키에 따른 중량의 증가로 속도가 감소하게된다. 따라서 신속한 동작을 필요로 하는 로봇에서는 가벼운링크의 사용이 필연적으로 요구되어 유연성에 따른 링크의 변형으로 인하여 로봇의 동작은 강체운동으로 해석할 경우와 실제의 경우와는 큰차이를 나타내게된다. 이와같은 한계를 극복하기 위하여 링크의 유연성을 고려한 로봇의 운동해석이 필요하게되어 많은 연구가 행해졌다. 예를들면 Mirro[1]는 팔유형기구에서 링크의 유연성과 제어에 대해서 연구하였으며, Book[2]은 4X4 변환행렬을 이용하여 집중질량과 스프링성분으로 표현되는 유연성팔의 선형운동학을 연구하였으며, Book[3]은 위 변환행렬을 이용하여 평면운동유연성팔들의 linear distributed dynamics를 연구하였다. 그리고 Sunada와 Dubowsky[4]는 공간개폐환기구와 매니플레이터팔과 같은 공간개폐환기구 모두 적용할 수 있는 모델링 기법을 연구하였다.

본 논문은 유연성을 갖고있는 다수의 링크를 포함하는 로봇 팔의 설계 및 운용시 링크의 유연성으로 인한 탄성운동과 강체운동을 정확하게 고려할 수 있고 효과적으로 해를 구할수 있는 형태의 운동방정식을 정식화하였다.

전체적인 구성은 다음과 같다. 2장에서는 임의의 유연링크에 관한 가정과 링크표시법, 동차변환행렬, 운동 및 작용력을 명시하고 가상일율원리 및 D'Alembert 원리로부터 운동방정식을 유도하였다. 3장에서는 유한요소법 및 Ritz 근사법을 이용하여 연속계인 링크를 이산화함으로써 2장에서 구한 여러형태의 식들을 행렬방정식으로 유도하였다. 4장에서는 매니플레이터에 대한 힘 및 운동의 제약들로부터 독립된 자유도 변수로 표현되는 매니플레이터의 운동방정식을 유도하였고, 5장에서는 전산알고리즘에 관하여 서술하였고, 6장에서는 모의실험의 결과를 제시하였다.

### 2. 유연링크 운동방정식

#### 2.1 유연링크 표시법

Denavit-Hartenberg 의 강체링크표시법[5]을 이용하여 유연링크를 표시하면 다음과 같다. i번째링크는 그림.1에서와같이 그 자신의 강체형상을 기준으로하여 변형되며 기저링크쪽의 관절부가 고정되어 있고 링크의 변형전상태는 \*표식으로 표시되며  $\bar{u}(P_i)$ 는 링크상의 임의의 질점  $P_i$ 의 변위벡터이다.

좌표계  $\{C_i\} \stackrel{\text{def}}{=} (C_i, \bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$ 는 i번째링크의 기준좌표계이며  $\{D_i^*\} \stackrel{\text{def}}{=} (D_i^*, \bar{X}_i^*, \bar{Y}_i^*, \bar{Z}_i^*)$ 는 좌표계  $\{C_i\}$ 가  $\bar{X}_i$ 방향으로 링크길이  $a_i$ 만큼 병진이동한 좌표계이며 좌표계  $\{D_i\} \stackrel{\text{def}}{=} (D_i, \bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$ 는 좌표계  $\{D_i^*\}$ 가 링크의 변형에 의한점  $D_i^*$ 의 병진  $\bar{w}_i$ 와 회전  $\bar{\varphi}_i$ 에 의한 좌표계이며  $\{C_{i+1}\} \stackrel{\text{def}}{=} (C_{i+1}, \bar{X}_{i+1}, \bar{Y}_{i+1}, \bar{Z}_{i+1})$ 는 좌표계  $\{D_i\}$ 가  $\bar{X}_i$  방향으로 링크 비틀림각  $\alpha_i$ 만큼 회전과  $\bar{Z}_{i+1}$  방향으로 관절각  $\theta_{i+1}$ 만큼 회전 및 관절거리  $d_{i+1}$ 만큼 병진이 순차로 수행된 좌표계로서 i+1번째 링크의 기준좌표계이다.

벡터  $\bar{u}_i, \bar{w}_i, \bar{c}_i, \bar{\varphi}_i, \bar{b}_{i+1}$  및  $\bar{r}_i$ 는 다음과같이 정의되고

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{u}(P_i), \bar{w}_i \stackrel{\text{def}}{=} \bar{u}(D_i), \bar{c}_i \stackrel{\text{def}}{=} \bar{u}(D_i), \bar{\varphi}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{curl} \bar{u}(D_i) \\ \bar{b}_{i+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{C}_i C_{i+1}, \bar{r}_i \stackrel{\text{def}}{=} \bar{r}_i^* + \bar{w}_i \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

위치 및 변위 벡터들은 다음과같이 기준좌표계  $\{C_i\}$ 에 대한 성분으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{r}_i &= {}^i r_x \bar{X}_i + {}^i r_y \bar{Y}_i + {}^i r_z \bar{Z}_i \\ \bar{w}_i &= {}^i w_x \bar{X}_i + {}^i w_y \bar{Y}_i + {}^i w_z \bar{Z}_i \\ \bar{c}_i &= {}^i c_x \bar{X}_i + {}^i c_y \bar{Y}_i + {}^i c_z \bar{Z}_i \\ \bar{\varphi}_i &= {}^i \varphi_x \bar{X}_i + {}^i \varphi_y \bar{Y}_i + {}^i \varphi_z \bar{Z}_i \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

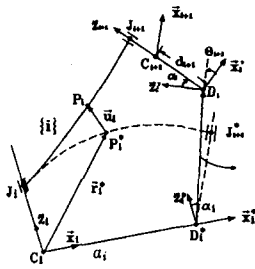


그림.1 유연링크좌표계

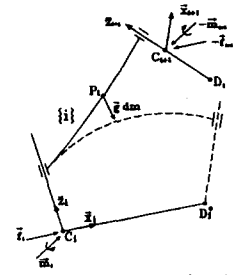


그림.2 링크(i)상의 작용력

## 2.2 가정

링크의 변형은 미소하고 재질은 선형탄성동은이며 관절부는 변형이 없다고 가정하면 다음과같은 표현식이 성립된다.

$$\begin{aligned} \bar{E}(P_i) &= \frac{1}{2}(\text{grad}\bar{u}_i + (\text{grad}\bar{u}_i)^T) \\ \Leftrightarrow \epsilon_{pq} &= \frac{1}{2}(u_{p,q} + u_{q,p}) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}(P_i) &= \bar{C}(P_i) \bar{E}(P_i) \\ \Leftrightarrow \sigma_{pq} &= \sum_r^i C_{pqrs} \epsilon_{rs} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$\bar{v}(J_i) = \bar{v}(C_i) = \bar{O} \quad (2.2.3)$$

$$\frac{1}{2} \text{curl} \bar{v}(J_i) = \frac{1}{2} \text{curl} \bar{v}(C_i) = \bar{O} \quad (2.2.4)$$

## 2.3 동차변환행렬

{C<sub>i</sub>}에서부터 {C<sub>i+1</sub>}까지 순차적으로 좌표계를 이동하여 좌표계 {C<sub>i</sub>}에 대한 좌표계 {C<sub>i+1</sub>}의 동차변환행렬 <sup>i</sup>T<sub>i+1</sub>을 구하면 다음과 같다.

$${}^i T_{D_i} = \text{Trans}(1, a_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & & & a_i \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

$${}^{D_i} T_{D_i} = \text{Elastic}({}^i w_i, {}^i \varphi_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 + {}^i \varphi_i & & & {}^i w_i \\ & - & & - \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

여기서

$${}^i w_i = \begin{pmatrix} {}^i w_x \\ {}^i w_y \\ {}^i w_z \end{pmatrix}, \quad {}^i \varphi_i = \begin{bmatrix} 0 & -{}^i \varphi_z & {}^i \varphi_y \\ {}^i \varphi_z & 0 & -{}^i \varphi_x \\ -{}^i \varphi_y & {}^i \varphi_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^{D_i} T_{C_{i+1}} &= \text{Rot}(1, \alpha_i) \text{Trans}(3, d_{i+1}) \text{Rot}(3, \theta_{i+1}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & d_{i+1} \\ & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} C\theta_{i+1} & -S\theta_{i+1} & 0 & 0 \\ S\theta_{i+1} & C\theta_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

따라서

$$\begin{aligned} {}^i T_{i+1} &\stackrel{\text{def}}{=} {}^i C_i T_{C_{i+1}} \\ &= \text{Trans}(1, a_i) \text{Elastic}({}^i w_i, {}^i \varphi_i) \text{Rot}(1, \alpha_i) \\ &\quad \text{Trans}(3, d_{i+1}) \text{Rot}(3, \theta_{i+1}) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} {}^i R_{i+1} & & & \\ - & - & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

## 2.4 속도와 가속도

순차적인 기구학적 관계를 나타내기위한 속도항과 가속도항들은 다음과 같다.

$$\bar{v}(c_i) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{v}_i, \quad \bar{\omega}(c_i) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\omega}_i, \quad \bar{v}(c_i) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{v}_i, \quad \bar{\omega}(c_i) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\omega}_i \quad (2.4.1)$$

$$\bar{v}(P_i) = \bar{v} + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_i + \bar{u}_i \quad (2.4.2)$$

$$\bar{v}(P_i) = \bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}_i) + 2\bar{\omega}_i \times \bar{u}_i + \bar{u}_i \quad (2.4.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}(C_{i+1}) &= \bar{v}_{i+1} = \bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{b}_{i+1} + \bar{u}_i \\ &\quad + \bar{\varphi}_i \times d_{i+1} \bar{Z}_{i+1} + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \bar{Z}_{i+1} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

$$\bar{\omega}(C_{i+1}) = \bar{\omega}_{i+1} = \bar{\omega}_i + \bar{\varphi}_i + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \bar{Z}_{i+1} \quad (2.4.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}(C_{i+1}) &= \bar{v}_{i+1} = \bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{b}_{i+1} + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{b}_{i+1}) \\ &\quad + 2\bar{\omega}_i \times (\bar{u}_i + \bar{\varphi}_i \times d_{i+1} \bar{Z}_{i+1} + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \bar{Z}_{i+1}) \\ &\quad + \bar{u}_i + \bar{\varphi}_i \times d_{i+1} \bar{Z}_{i+1} + \bar{\varphi}_i \times (\bar{\varphi}_i \times d_{i+1} \bar{Z}_{i+1}) \\ &\quad + 2\bar{\varphi}_i \times s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \bar{Z}_{i+1} + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \bar{Z}_{i+1} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(C_{i+1}) &= \bar{\omega}_{i+1} = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\varphi}_i + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \bar{Z}_{i+1}) \\ &\quad + \bar{\varphi}_i \times s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \bar{Z}_{i+1} + \bar{\varphi}_i \\ &\quad + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \bar{Z}_{i+1} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

이때 s<sub>i</sub>는 관절지표로서 1의 값인 경우 미끄럼관절이며 0의 값인 경우 회전관절을 의미하며 s<sub>i</sub> = 1 - s<sub>i</sub>이다.

## 2.5 작용력

그림.2에서  $\bar{f}_i$ 와  $\bar{m}_i$ 는 i-1번째링크가 관절 J<sub>1</sub>에 작용하는 힘의 합력과 C<sub>i</sub>점에 대한 합모멘트를 나타내며, 또한  $\bar{v}$ 는 중력가속도이며 점 C<sub>i+1</sub>은 위치 C<sub>i+1</sub>에서의 i번째링크상의 점이다. 관절에 작용하는 관절힘 또는 관절모멘트를 τ<sub>i</sub>로 표시하고, 관절 반발력과 반발모멘트는  $\bar{f}_i^R$ ,  $\bar{m}_i^R$ 로 표시하면 다음과같은 관계식이 성립한다.

$$\bar{f}_i = s_i \tau_i \bar{Z}_i + \bar{f}_i^R \quad (2.5.1)$$

$$\bar{m}_i = s_i \tau_i \bar{Z}_i + \bar{m}_i^R \quad (2.5.2)$$

## 2.6 운동방정식

i번째 링크의 가상외력일을 δP<sub>i</sub>와 가상변형에너지를 δE<sub>d<sub>i</sub></sub>는 다음과 같다. 즉 가상외력일들은 D'Alembert원리를 사용하여 식 (2.4.1)-(2.4.3)으로부터

$$\begin{aligned} \delta P^i &= \int_{D_i} \delta \bar{v}(P_i) \cdot (\bar{v} - \bar{v}(P_i)) dm + \delta \bar{v}(C_i) \cdot \bar{f}_i \\ &\quad + \delta \bar{\omega}(C_i) \cdot \bar{m}_i - \delta \bar{v}(C_{i+1}) \cdot \bar{f}_{i+1} - \delta \bar{\omega}(C_{i+1}) \cdot \bar{m}_{i+1} \\ &= \delta \bar{v}_i \cdot (\bar{f}_i - \bar{f}_{i+1}) + \int_{D_i} (\bar{v} - \bar{v}(P_i)) dm \\ &\quad + \delta \bar{\omega}_i \cdot (\bar{m}_i - \bar{b}_{i+1} \times \bar{f}_{i+1} - \bar{m}_{i+1}) \\ &\quad + \int_{D_i} \bar{r}_i \times (\bar{v} - \bar{v}(P_i)) dm \\ &\quad - (\delta \bar{\omega}_i + \delta \bar{\varphi}_i \times d_{i+1} \bar{Z}_{i+1}) \cdot \bar{f}_{i+1} - \delta \bar{\varphi}_i \cdot \bar{m}_{i+1} \\ &\quad + \int_{D_i} \delta \bar{u}_i \cdot (\bar{v} - \bar{v}(P_i)) dm \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

가상변형에너지를 식 (2.2.3)-(2.2.4)로부터

$$\begin{aligned} \delta E_d^i &= \int_{D_i} \delta \bar{E}(P_i) : \bar{\Sigma}(P_i) dV \\ &= (\delta \bar{\omega}_i + \delta \bar{\varphi}_i \times d_{i+1} \bar{Z}_{i+1}) \cdot \int_{J_{i+1}} \bar{\Sigma} \cdot \bar{n} dA \\ &\quad + \delta \bar{\varphi}_i \cdot \int_{J_{i+1}} \bar{h}_{i+1} \times \bar{\Sigma} \cdot \bar{n} dA - \int_{D_i} \delta \bar{u}_i \cdot \text{div} \Sigma dV \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

여기서  $\vec{h}_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{C_{i+1} J_{i+1}}$

따라서  $i$ 번째 링크의 운동방정식은 다음과같은 가상일일의 변분식으로 표시된다.

$$\delta \dot{E}_d^i = \delta P^i \quad \forall \delta \vec{v}_i, \delta \vec{\omega}_i, \delta \vec{w}_i(P_i) \quad (2.6.3)$$

### 3. 링크의 이산화

#### 3.1 탄성변위, 탄성속도, 탄성가속도

연속적인 링크를 이산화하여 운동방정식을 행렬식으로 변환하기 위하여 유한요소법 및 Ritz근사법을 사용하여 탄성변위를 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= \sum_{m=1}^{N_i} \vec{U}_{im}(r_i^*) q_{em}^i(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{U}_i] \{q_e^i\} \\ \Leftrightarrow \{^i u_i\} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} ^i u_x \\ ^i u_y \\ ^i u_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{N_i} {}^i U_m q_{em}^i \stackrel{\text{def}}{=} [{}^i U_i] \{q_e^i\} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_i &= \sum_{m=1}^{N_i} \vec{W}_{im} q_{em}^i(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{W}_i] \{q_e^i\} \\ \Leftrightarrow \{^i w_i\} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} ^i w_x \\ ^i w_y \\ ^i w_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{N_i} {}^i W_m q_{em}^i \stackrel{\text{def}}{=} [{}^i W_i] \{q_e^i\} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_i &= \sum_{m=1}^{N_i} \vec{\Phi}_{im} q_{em}^i(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{\Phi}_i] \{q_e^i\} \\ \Leftrightarrow \{^i \varphi_i\} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} ^i \varphi_x \\ ^i \varphi_y \\ ^i \varphi_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{N_i} {}^i \Phi_m q_{em}^i \stackrel{\text{def}}{=} [{}^i \Phi_i] \{q_e^i\} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

여기서  $N_i$ 는 탄성자유도수

$$[\vec{U}_i] \text{는 유한요소 결점변수 } \{q_e^i\} \text{의 보간함수의 행렬} \\ [\vec{W}_i] = [\vec{U}_i]_{\vec{r}_i^* = \vec{o}_i, \vec{x}_i} \quad (3.1.4)$$

$$[\vec{\Phi}_i] = \left[ \frac{1}{2} \text{curl} \vec{U}_i \right]_{\vec{r}_i^* = \vec{o}_i, \vec{x}_i} \quad (3.1.5)$$

식(3.1.1)~(3.1.5)를 이용하여 탄성속도항과 탄성가속도항들을 구하면 다음과 같다.

$$\vec{u}_i = [\vec{U}_i] \{q_e^i\} \Leftrightarrow \{^i \dot{u}_i\} = [{}^i \dot{U}_i] \{q_e^i\} \quad (3.1.6)$$

$$\vec{w}_i = [\vec{W}_i] \{q_e^i\} \Leftrightarrow \{^i \dot{w}_i\} = [{}^i \dot{W}_i] \{q_e^i\} \quad (3.1.7)$$

$$\vec{\varphi}_i = [\vec{\Phi}_i] \{q_e^i\} \Leftrightarrow \{^i \dot{\varphi}_i\} = [{}^i \dot{\Phi}_i] \{q_e^i\} \quad (3.1.8)$$

$$\vec{u}_i = [\vec{U}_i] \{q_e^i\} \Leftrightarrow \{^i \ddot{u}_i\} = [{}^i \ddot{U}_i] \{q_e^i\} \quad (3.1.9)$$

$$\vec{w}_i = [\vec{W}_i] \{q_e^i\} \Leftrightarrow \{^i \ddot{w}_i\} = [{}^i \ddot{W}_i] \{q_e^i\} \quad (3.1.10)$$

$$\vec{\varphi}_i = [\vec{\Phi}_i] \{q_e^i\} \Leftrightarrow \{^i \ddot{\varphi}_i\} = [{}^i \ddot{\Phi}_i] \{q_e^i\} \quad (3.1.11)$$

#### 3.2 운동방정식

변분식 (2.6.3)의 가상변형에너지율  $\delta \dot{E}_d^i$ 는 다음과같이 표시되며

$$\begin{aligned} \delta \dot{E}_d^i &= \int_{D_i} \delta \dot{E}(P_i) : \dot{\Sigma}(P_i) dV \\ &= \int_{D_i} \{\delta \dot{e}\}^T \{\sigma\} dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{\delta \dot{q}_e^i\}^T \left[ \int_{D_i} [B^i]^T [D^i] [B^i] dV \right] \{q_e^i\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \{\delta \dot{q}_e^i\}^T [K_{ee}^i] \{q_e^i\} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } \{e^i\} &= (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23} + \epsilon_{32}, \epsilon_{31} + \epsilon_{13}, \epsilon_{12} + \epsilon_{21})^T \\ &= [B^i] \{q_e^i\} \end{aligned}$$

$\{\sigma^i\} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12})^T = [D^i] \{e^i\}$   
가상의력일일  $\delta P^i$ 는 관성력, 관성력과 중력에 의한 가상의력일일  $\delta \dot{A}^i, \delta P_j^i, \delta P_G^i$ 로 구분되어 다음과같이 표시된다.

$$\delta P^i = -\delta \dot{A}^i + \delta P_j^i + \delta P_G^i \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{A}^i &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{D_i} \delta \vec{v}(P_i) \cdot \dot{\vec{v}}(P_i) dm \\ &= \left\{ \begin{matrix} \delta v_i \\ \delta \omega_i \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} m_i \mathbf{1} & -m_i {}^i \vec{r}_i \\ m_i {}^i \vec{r}_i & {}^i I_i \end{matrix} \right\} \begin{Bmatrix} {}^i \dot{v}_i \\ {}^i \dot{\omega}_i \end{Bmatrix} + \left[ \int_{D_i} [{}^i U_i] dm \right] \{q_e^i\} \\ &\quad + \left\{ \begin{matrix} m_i {}^i \omega_i {}^i \omega_i {}^i \vec{r}_i + 2 {}^i \omega_i \left[ \int_{D_i} [{}^i U_i] dm \right] \{q_e^i\} \\ {}^i \omega_i {}^i I_i {}^i \omega_i + 2 \left[ \int_{D_i} {}^i \vec{r}_i \cdot {}^i \omega_i [{}^i U_i] dm \right] \{q_e^i\} \end{matrix} \right\} \\ &\quad + \{\delta q_e^i\}^T \left\{ \left[ \int_{D_i} [{}^i U_i]^T dm, \int_{D_i} -[{}^i U_i]^T {}^i \vec{r}_i dm \right] \begin{Bmatrix} {}^i \dot{v}_i \\ {}^i \dot{\omega}_i \end{Bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \int_{D_i} [{}^i U_i]^T [{}^i U_i] dm \right] \{q_e^i\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \int_{D_i} [{}^i U_i]^T {}^i \omega_i {}^i \omega_i {}^i \vec{r}_i dm + 2 \left[ \int_{D_i} [{}^i U_i]^T {}^i \omega_i [{}^i U_i] dm \right] \{q_e^i\} \right\} \right\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \{\delta v^i\}^T \{[M_{vv}^i] \{\dot{v}^i\} + [M_{v\omega}^i] \{\dot{\omega}^i\} + \{f_{vc}^i\}\} \\ &\quad + \{\delta \dot{q}_e^i\}^T \{[M_{\omega v}^i] \{\dot{v}^i\} + [M_{\omega\omega}^i] \{\dot{\omega}^i\} + \{f_{\omega c}^i\}\} \\ &\quad + \{f_{ec}^i\}\} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \delta P_j^i &\stackrel{\text{def}}{=} \delta \vec{v}(C_i) \cdot \vec{f}_i + \delta \vec{w}(C_i) \cdot \vec{m}_i - \delta \vec{v}(C_{i+1}^-) \cdot \vec{f}_{i+1} \\ &\quad - \delta \vec{w}(C_{i+1}^-) \cdot \vec{m}_{i+1} \\ &= \left\{ \begin{matrix} \delta v_i \\ \delta \omega_i \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} {}^i f_i \\ {}^i m_i \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} {}^i f_{i+1} \\ {}^i m_{i+1} \end{matrix} \right\} \\ &\quad + \{\delta q_e^i\} \left\{ -[{}^i W_i]^T [{}^i f_{i+1}] - [{}^i \Phi_i]^T [d_{i+1} {}^i Z_{i+1} \{^i f_{i+1}\} + \{^i m_{i+1}\}] \right\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \{\delta v^i\}^T \{f_{vj}^i\} + \{\delta q_e^i\}^T \{f_{\omega j}^i\} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \delta P_G^i &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{D_i} \delta \vec{v}(P_i) \cdot \vec{g} dm \\ &= \left\{ \begin{matrix} \delta v_i \\ \delta \omega_i \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} m_i \{^i g\} \\ m_i {}^i \vec{r}_i \{^i g\} - {}^i \vec{g} \left[ \int_{D_i} [{}^i U_i] dm \right] \{q_e^i\} \end{matrix} \right\} \\ &\quad + \{\delta q_e^i\}^T \left\{ \left[ \int_{D_i} [{}^i v]^T dm \right] \{^i g\} \right\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \{\delta v^i\}^T \{f_{vG}^i\} + \{\delta q_e^i\}^T \{f_{\omega G}^i\} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

여기서  $m_i$ 는 링크의 질량이며  $\vec{r}_i$ 는 점  $C_i$ 에 대한 질량중심 위치벡터이고  $I_i$ 는 점  $C_i$ 에 대한 관성행렬이다.

따라서 변분식 (3.2.1)로부터 다음과같은 링크( $i$ )의 운동방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} [M_{vv}^i] \{\dot{v}^i\} + [M_{v\omega}^i] \{\dot{\omega}^i\} + \{f_{vc}^i\} \\ [M_{\omega v}^i] \{\dot{v}^i\} + [M_{\omega\omega}^i] \{\dot{\omega}^i\} + \{f_{\omega c}^i\} + [B_{ee}^i] \{q_e^i\} + [K_{ee}^i] \{q_e^i\} \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} \{f_{vj}^i\} + \{f_{vG}^i\} \\ \{f_{\omega j}^i\} + \{f_{\omega G}^i\} \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

여기서  $[B_{ee}^i] \{q_e^i\}$ 는 구조감쇠력(Structural damping force)이다.

#### 4. Manipulator의 운동방정식

##### 4.1 작용력

식(2.5.1)~(2.5.2)로부터  $i$ 번째 관절에 작용하는 힘과 모멘트는 다음과같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \bar{f}_i = s_i \tau_i \bar{z}_i + {}^i f_X^R \bar{x}_i + {}^i f_Y^R \bar{y}_i + {}^i f_Z^R \bar{s}_i \bar{z}_i \\ \bar{m}_i = \bar{s}_i \tau_i \bar{z}_i + {}^i m_X^R \bar{x}_i + {}^i m_Y^R \bar{y}_i + {}^i m_Z^R s_i \bar{z}_i \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{m}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_i \bar{z}_i \\ \bar{s}_i \bar{z}_i \end{Bmatrix} \tau_i \\
& \quad + \begin{Bmatrix} {}^i f_X^R \\ {}^i f_Y^R \\ {}^i m_X^R \\ {}^i m_Y^R \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{z}_i \end{Bmatrix} \\
& \quad + \begin{Bmatrix} {}^i f_Z^R \\ s_i {}^i m_Z^R \end{Bmatrix} \bar{z}_i \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \{ \bar{P}_i \} \tau_i + \{ \bar{Q}_i \} \{ f_R \} \\
& \Leftrightarrow \{ f_j^i \} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} f_i \\ m_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_i {}^i Z_i \\ \bar{s}_i {}^i Z_i \end{Bmatrix} \tau_i \\
& \quad + \begin{Bmatrix} {}^i X_i {}^i Y_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^i X_i {}^i Y_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_R \\ \bar{z}_i \end{Bmatrix} \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \{ {}^i P_i \} \tau_i + \{ {}^i Q_i \} \{ f_R \} \quad (4.1.1)
\end{aligned}$$

여기서  $\{ {}^i P_i \}$ 와  $\{ {}^i Q_i \}$ 는 조건  $[{}^i Q]{}^T \{ {}^i P \} = \{ 0 \}$ 와  $\{ {}^i P_i \}{}^T \{ {}^i P_i \} = 1$ 을 만족하는 관절사영행렬(joint projection matrix)과 관절사영여행렬(joint projection complementary matrix)이다.

따라서 식 (3.2.4)의 강체운동에 의한 관절력  $f_{i,j}^i$ 와 탄성운동에 의한 관절력  $f_{i,j}^i$ 는 다음과같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
\{ f_{i,j}^i \} &= \begin{Bmatrix} f_i - {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} \\ m_i - {}^i b_{i+1} {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} - {}^i R_{i+1} {}^{i+1} m_{i+1} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} f_i \\ m_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^i R_{i+1} & 0 \\ {}^i b_{i+1} {}^i R_{i+1} & {}^i R_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{i+1} f_{i+1} \\ {}^{i+1} m_{i+1} \end{Bmatrix} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \{ f_j^i \} - [{}^i S_v]{}^T \{ f_j^{i+1} \} \quad (4.1.2) \\
&\{ f_{i,j}^i \} \\
&= - \left\{ [{}^i W_i]{}^T {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} + [{}^i \Phi_i]{}^T d_{i+1} {}^i \bar{Z}_{i+1} {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} \right. \\
&\quad \left. + [{}^i \Phi_i]{}^T {}^i R_{i+1} {}^{i+1} m_{i+1} \right\} \\
&= - \left[ [{}^i W_i]{}^T {}^i R_{i+1} + [{}^i \Phi_i]{}^T d_{i+1} {}^i \bar{Z}_{i+1} {}^i R_{i+1}, [{}^i \Phi_i]{}^T {}^i R_{i+1} \right] \begin{Bmatrix} {}^{i+1} f_{i+1} \\ {}^{i+1} m_{i+1} \end{Bmatrix} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} - [{}^{i+1} S_e]{}^T \{ f_j^{i+1} \} \quad (4.1.3) \\
&\text{단}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{ f_j^{n+1} \} &= \begin{Bmatrix} {}^{i+1} f_{i+1} \\ {}^{i+1} m_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -{}^{tool} f_{i,tool} \\ -{}^{tool} m_{i,tool} \end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} - \{ f^{tool} \}, \\
\{ tool \} &= \{ C_{n+1} \}
\end{aligned}$$

여기서  $n$ 은 강체자유도수를 나타내며  $\bar{f}_{i,tool}$ 와  $\bar{m}_{i,tool}$ 은 Manipulator계의 외부에서 tool에 작용하는 힘과 모멘트이다.

#### 4.2 속도와 가속도

식 (2.4.4)-(2.4.7)로부터  $\{ C_{i+1} \}$ 의 속도항들과 가속도항들은 다음과같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
& \{ v^{i+1} \} \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} {}^{i+1} v_{i+1} \\ {}^{i+1} \omega_{i+1} \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} {}^{i+1} R_i {}^i v_i - {}^{i+1} R_i {}^i \bar{b}_{i+1} {}^i \omega_i + {}^{i+1} R_i {}^i W_i \dot{q}_i - {}^{i+1} R_i {}^i \bar{Z}_{i+1} {}^i \Phi_i \dot{q}_i \\ \quad + s_{i+1} {}^{i+1} Z_{i+1} \dot{q}_{i+1} \\ {}^{i+1} R_i {}^i \omega_i + {}^{i+1} R_i {}^i \Phi_i \dot{q}_i + \bar{s}_{i+1} {}^{i+1} Z_{i+1} \dot{q}_{i+1} \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} {}^{i+1} R_i & {}^{i+1} R_i {}^i \bar{b}_{i+1} \\ 0 & {}^{i+1} R_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^i v_i \\ {}^i \omega_i \end{Bmatrix} \\
& + \begin{Bmatrix} {}^{i+1} R_i ({}^i W_i - d_{i+1} {}^i \bar{Z}_{i+1} {}^i \Phi_i) \\ {}^{i+1} R_i {}^i \Phi_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{q}_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} s_{i+1} {}^{i+1} Z_{i+1} \\ \bar{s}_{i+1} {}^{i+1} Z_{i+1} \end{Bmatrix} \dot{q}_{i+1} \\
& \stackrel{\text{def}}{=} [{}^{i+1} S_v] \{ v^i \} + [{}^{i+1} S_\omega] \{ \dot{q}_i \} + [{}^{i+1} P] \dot{q}_{i+1} \\
& \text{단} \quad \{ v^{n+1} \} = [{}^{n+1} S_v] \{ v^n \} + [{}^{n+1} S_\omega] \{ \dot{q}_n \} \quad (4.2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \dot{v}^{i+1} \} \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} {}^{i+1} \dot{v}_{i+1} \\ {}^{i+1} \dot{\omega}_{i+1} \end{Bmatrix} \\
& = [{}^{i+1} S_v] \{ \dot{v}^i \} + [{}^{i+1} S_\omega] \{ \dot{q}_i \} + [{}^{i+1} P] \ddot{q}_{i+1} + \{ {}^{i+1} \gamma \} \\
& \text{단} \quad \{ \dot{v}^{n+1} \} = [{}^{n+1} S_v] \{ \dot{v}^n \} + [{}^{n+1} S_\omega] \{ \dot{q}_n \} \\
& \{ {}^{i+1} \gamma \} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} {}^{i+1} R_i ({}^i \bar{\omega}_i {}^i \bar{\omega}_i b_{i+1} + {}^i \dot{\bar{\varphi}}_i {}^i \bar{\varphi}_i d_{i+1} + {}^i Z_{i+1} \\ \quad + 2 {}^i \bar{\omega}_i ({}^i \bar{\omega}_i + {}^i \dot{\bar{\varphi}}_i d_{i+1} + {}^i Z_{i+1} + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} + {}^i Z_{i+1}) \\ \quad + 2 {}^i \dot{\bar{\varphi}}_i s_{i+1} \dot{q}_{i+1} + {}^i Z_{i+1}) \\ {}^{i+1} R_i ({}^i \bar{\omega}_i ({}^i \dot{\bar{\varphi}}_i + \bar{s}_{i+1} \dot{q}_{i+1} + {}^i Z_{i+1}) + {}^i \dot{\bar{\varphi}}_i \bar{s}_{i+1} \dot{q}_{i+1} + {}^i Z_{i+1}) \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

#### 4.3 기구학적 제한

좌표frame(i)의 속도  $v^i$ 와 가속도  $\dot{v}^i$ 는 식 (4.2.1)과 (4.2.2)로부터 강체자유도 $\{q_r\}$ 와 탄성자유도 $\{q_e\}$ 그리고 base의 속도와 가속도의 함수로 다음과같이 표현된다.

$$v^i = D_e^i \dot{q}_e + D_r^i \dot{q}_r + b^i \quad (4.3.1)$$

$$\dot{v}^i = D_e^i \ddot{q}_e + D_r^i \ddot{q}_r + c^i \quad (4.3.2)$$

여기서

$$D_r^i = \left[ \prod_{k=2}^i k S_v^i P, \dots, \prod_{k=1}^i k S_v^i S_v^{i-1} P, i P, 0, \dots, 0 \right]$$

$$D_e^i = \left[ \prod_{k=2}^i k S_v^i S_e, \dots, \prod_{k=1}^i k S_v^i S_v^{i-1} S_e, i S_e, 0, \dots, 0 \right]$$

$$b^i = \left\{ \prod_{k=1}^i k S_v^i v^0 \right\}$$

$$c^i = \left\{ \prod_{k=1}^i k S_v^i v^0 + \prod_{k=2}^i k S_v^i \gamma + \dots + \prod_{k=1}^i k S_v^i i \gamma + i \gamma \right\}$$

또한 링크(i)의 탄성 변위, 속도 및 가속도를 Manipulator의 탄성자유도를 표시하면 다음과같다.

$$q_e^i = E^i \dot{q}_e, \dot{q}_e^i = E^i \ddot{q}_e, \ddot{q}_e^i = E^i \ddot{q}_e \quad (4.3.3)$$

$$\text{여기서} \quad E^i = [0, \dots, 1, \dots, 0]$$

#### 4.4 운동방정식

Manipulator의 전체자유도 $\{q_r\}$ 과 $\{q_e\}$ 에 대한 가상일률의 변분식

$$\delta \dot{A} + \delta \dot{E}_d = \delta P_G + \delta P_J \quad \forall \delta \dot{q}_r, \delta \dot{q}_e \quad (4.4.1)$$

로부터 Manipulator운동방정식을 구하면 다음과같다.

$$\begin{aligned}
& \delta \dot{A} \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n \delta \dot{A}^i \\
& = \sum_{i=0}^n \left\{ \delta v^i{}^T (M_{vv}^i \dot{v}^i + M_{ve}^i \dot{q}_e^i + f_{vc}^i) + \delta q_e^i{}^T (M_{ev}^i \dot{v}^i + M_{ee}^i \dot{q}_e^i + f_{ec}^i) \right\} \\
& = \delta \dot{q}_e^T \left( [E^0{}^T M_{ee}^0 E^0] \dot{q}_e + [E^0{}^T (M_{ev}^0 v^0 + f_{ec}^0)] \right) \\
& + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta \dot{q}_r^T \left( [D_r^i{}^T M_{vv}^i D_r^i] \dot{q}_r + [D_r^i{}^T M_{ve}^i D_e^i + D_r^i{}^T M_{ve}^i E^i] \dot{q}_e \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [D_e^i{}^T (M_{vv}^i c^i + f_{vc}^i)] \right) + \delta \dot{q}_e^T \left( [D_e^i{}^T M_{ev}^i D_r^i + E^i{}^T M_{ee}^i D_e^i] \dot{q}_r \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [D_e^i{}^T M_{ev}^i D_e^i + D_e^i{}^T M_{ve}^i E^i + E^i{}^T M_{ee}^i D_e^i + E^i{}^T M_{ee}^i E^i] \dot{q}_e \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [D_e^i{}^T (M_{vv}^i c^i + f_{vc}^i) + E^i{}^T (M_{ev}^i c^i + f_{ec}^i)] \right) \right\} \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \delta \dot{q}_e^T (M_{ee}^{(0)} \dot{q}_e + f_{ec}^{(0)}) \\
& + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta \dot{q}_r^T (M_{rr}^{(i)} \dot{q}_r + M_{re}^{(i)} \dot{q}_e + f_{rc}^{(i)}) + \delta \dot{q}_e^T (M_{er}^{(i)} \dot{q}_r + M_{ee}^{(i)} \dot{q}_e + f_{ec}^{(i)}) \right\} \\
& = \delta \dot{q}_r^T \left( \sum_{i=1}^n M_{rr}^{(i)} \dot{q}_r + \sum_{i=1}^n M_{re}^{(i)} \dot{q}_e + \sum_{i=1}^n f_{rc}^{(i)} \right) \\
& + \delta \dot{q}_e^T \left( \left( \sum_{i=1}^n M_{er}^{(i)} \right) \dot{q}_r + \left( \sum_{i=0}^n M_{ee}^{(i)} \right) \dot{q}_e + \left( \sum_{i=0}^n f_{ec}^{(i)} \right) \right) \quad (4.4.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta \dot{E}_d \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n \delta \dot{E}_d^i = \sum_{i=0}^n \delta \dot{q}_e^i{}^T (\mathbf{B}_{e_e}^i \dot{q}_e^i + \mathbf{K}_{e_e}^i \dot{q}_e^i) \\
& = \delta \dot{q}_e^T \left( \left[ \sum_{i=0}^n (\mathbf{E}^i{}^T \mathbf{B}_{e_e}^i \mathbf{E}^i) \right] \dot{q}_e + \left[ \sum_{i=0}^n (\mathbf{E}^i{}^T \mathbf{K}_{e_e}^i \mathbf{E}^i) \right] \dot{q}_e \right) \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \delta \dot{q}_e^T \left( \left[ \sum_{i=0}^n \mathbf{B}_{e_e}^{(i)} \right] \dot{q}_e + \left[ \sum_{i=0}^n \mathbf{K}_{e_e}^{(i)} \right] \dot{q}_e \right) \quad (4.4.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta P_G \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n \delta P_G^i = \sum_{i=0}^n \{ \delta v^i{}^T \mathbf{f}_{v_G} + \delta \dot{q}_e^i{}^T \mathbf{f}_{e_G} \} \\
& = \delta \dot{q}_e^T (\mathbf{E}^0{}^T \mathbf{f}_{e_G}^0) + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta \dot{q}_r^T (\mathbf{D}_r^i{}^T \mathbf{f}_{v_G}^i) + \delta \dot{q}_e^T (\mathbf{D}_e^i{}^T \mathbf{f}_{v_G}^i + \mathbf{E}^i{}^T \mathbf{f}_{e_G}^i) \right\} \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \delta \dot{q}_e^T \mathbf{f}_{e_G}^0 + \sum_{i=1}^n \left( \delta \dot{q}_r^T \mathbf{f}_{r_G}^i + \delta \dot{q}_e^T \mathbf{f}_{e_G}^i \right) \\
& = \delta \dot{q}_e^T \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{r_G}^i \right) + \delta \dot{q}_e^T \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{f}_{e_G}^i \right) \quad (4.4.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta P_J \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n \delta P_J^i = \sum_{i=0}^n \{ \delta v^i{}^T \mathbf{f}_{v_J} + \delta \dot{q}_e^i{}^T \mathbf{f}_{e_J} \} \\
& = \delta \dot{q}_e^T (\mathbf{E}^0{}^T \mathbf{f}_{e_J}^0) + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta \dot{q}_r^T (\mathbf{D}_r^i{}^T \mathbf{f}_{v_J}^i) + \delta \dot{q}_e^T (\mathbf{D}_e^i{}^T \mathbf{f}_{v_J}^i + \mathbf{E}^i{}^T \mathbf{f}_{e_J}^i) \right\} \\
& = \delta \dot{q}_e^T \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_r^i{}^T \mathbf{f}_{v_J}^i \right) + \delta \dot{q}_e^T \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_e^i{}^T \mathbf{f}_{v_J}^i + \sum_{i=0}^n \mathbf{E}^i{}^T \mathbf{f}_{e_J}^i \right) \\
& = \delta \dot{q}_e^T \left( (\mathbf{S}_v^{-1} \mathbf{P})^T (\mathbf{S}_v^T \mathbf{f}_J) - \mathbf{D}_r^T \mathbf{E}^{n+1} \mathbf{S}_v^T \mathbf{f}^{n+1} \right) \\
& + \delta \dot{q}_e^T \left( (\mathbf{S}_v^{-1} \mathbf{S}_e)^T (\mathbf{S}_v^T \mathbf{f}_J) - \mathbf{D}_e^T \mathbf{E}^{n+1} \mathbf{S}_v^T \mathbf{f}^{n+1} \right. \\
& \quad \left. - (\mathbf{S}_e^T \mathbf{f}_J) - \mathbf{E}^{n+1} \mathbf{S}_e^T \mathbf{f}^{n+1} \right) \\
& = \delta \dot{q}_e^T (\mathbf{P}^T \mathbf{f}_J + \mathbf{D}_r^T \mathbf{E}^{n+1} \mathbf{S}_v^T \mathbf{f}^{n+1}) \\
& + \delta \dot{q}_e^T (\mathbf{D}_e^T \mathbf{E}^{n+1} \mathbf{S}_v^T \mathbf{f}^{n+1} + \mathbf{E}^{n+1} \mathbf{S}_e^T \mathbf{f}^{n+1}) \\
& = \delta \dot{q}_e^T (\tau + \mathbf{D}_r^T \mathbf{E}^{n+1} \mathbf{f}^{n+1}) + \delta \dot{q}_e^T \mathbf{D}_e^T \mathbf{E}^{n+1} \mathbf{f}^{n+1} \quad (4.4.5)
\end{aligned}$$

식 (4.4.2)~(4.4.5)를 (4.4.1)에 대입하여 링크전체를 고려한 매니플레이터의 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{rr}^{(i)} \right] \ddot{q}_r + \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{re}^{(i)} \right] \ddot{q}_e + \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{rc}^{(i)} \right\} \\
& = \tau + \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{r_G}^{(i)} \right\} + \left\{ \mathbf{D}_r^{n+1}{}^T \mathbf{f}^{n+1} \right\} \\
& \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{er}^{(i)} \right] \ddot{q}_r + \left[ \sum_{i=0}^n \mathbf{M}_{ee}^{(i)} \right] \ddot{q}_e + \left\{ \sum_{i=0}^n \mathbf{f}_{ec}^{(i)} \right\} + \left[ \sum_{i=0}^n \mathbf{B}_{ee}^{(i)} \right] \dot{q}_e + \left[ \sum_{i=0}^n \mathbf{K}_{ee}^{(i)} \right] \dot{q}_e \\
& = \left\{ \sum_{i=0}^n \mathbf{f}_{e_G}^{(i)} \right\} + \left\{ \mathbf{D}_e^{n+1}{}^T \mathbf{f}^{n+1} \right\} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{M}_{rr}^* \ddot{q}_r + \mathbf{M}_{re}^* \ddot{q}_e + \mathbf{f}_{rc}^* = \tau + \mathbf{f}_{r_G}^* + \mathbf{f}_r^* \\ \mathbf{M}_{er}^* \ddot{q}_r + \mathbf{M}_{ee}^* \ddot{q}_e + \mathbf{f}_{ec}^* + \mathbf{B}_{ee}^* \dot{q}_e + \mathbf{K}_{ee}^* \dot{q}_e = \mathbf{f}_{e_G}^* + \mathbf{f}_e^* \end{cases} \quad (4.4.6)
\end{aligned}$$

## 5. 전산알고리즘

매니플레이터 운동방정식(4.4.6)의 탄성변위 관련항을 구하기 위하여 운동방정식의 전산화 전처리부에서 모든 유연링크를 각각 유한요소법을 사용해서 여러개의 Timoshenko보요소[6]로 분할하여 링크의 탄성변형에 큰 영향을 주지않는 고차의 탄성모드를 제거한 후 식(3.2.1)~(3.2.5)의 탄성변형에 관련된 적분항들을 시간에 종속되는 변수들과 구분하여 따로 계산하였다.

이와같이 계산된 항들은 유연링크의 운동과 무관한 고유특성치로서 다른 고유특성치와 함께 운동방정식의 전산화프로그램에서 유연링크의 매개변수로 입력되어 질량, 감쇠 및 강성행렬과 관성력, 중력 및 관절력벡터행렬의 항들은 기저링크 (0)에서부터 최종링크 (n)까지 순서대로 첨부되는 링크의 관련항들을 계산하여 순차적으로 결합해서 얻어지도록 함으로서 운동방정식의 전산화를 신속하게 수행할 수 있도록 하였다.

매니플레이터의 각각의 관절력 혹은 모멘트는 시간의 함수로 직접입력하거나, 혹은 각각의 관절이 원하는 궤적을 추적토록 하고자할 경우에는 관절의 위치 및 속도의 PD제어와 강체모델기반의 feedforward 제어를 수행할 수 있도록 프로그램내에서 계산되도록 하였다.

운동방정식의 전산화 프로그램의 순서도는 그림.3과 같다.

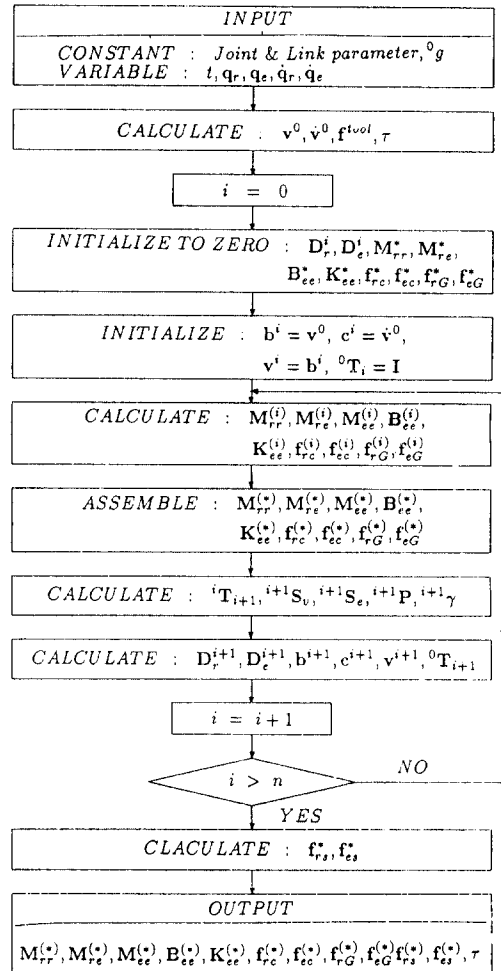


그림.3 순서도

## 6. 모의실험

표1과 같이 2종류의 모형을 식(4.4.6)과 다음과같이 정의한 궤적함수(trajectory function)

$$\theta_i \mathbf{P} \cdot \mathbf{y} = 0.05 \left( t - \frac{5}{\pi} \sin \left( \frac{\pi}{5} * t \right) \right) \begin{cases} \mathbf{p} : \text{pitch} \\ \mathbf{y} : \text{yaw} \end{cases} \quad (6.1)$$

로부터 단면적은 길이방향으로 일정하며 중력은 무시할 수 있고[참고문헌 7.8] 초기위치는 그림.4와 같다고할 경우 모의실험 1은 그림.4의 pitch-방향의 회전을 제외한 yaw-방향만의 회전상태에서 유연링크 1과 유연링크 2만을 고려하여 행하여졌으며, 모의실험 2는 그림.4의 모든 yaw-방향과 pitch-방향의 회전상태에서 유연링크 1과 유연링크 2 및 강체링크 3을 모두 고려하여 행하여졌다.

모의실험 1에 대한 결과로서 그림.5에 각 링크 끝단에서의 회전방향 순수 탄성변위를 나타냈으며, 그림.6에 링크 1은 정지시키고 링크 2만을 yaw-방향으로 90°만큼 회전시키고자 할 경우 시간에 따른 각 변위의 추종상태를 나타내었다.

모의실험 2에 대한 결과로서 그림.7에 처음 두 링크의 유연효과를 고려하지 않은 강체운동과 두 링크의 유연효과를 고려한 탄성운동 해석에 따른 매니플레이터 끝단의 yaw-방향과 pitch-방향의 위치차이를 나타내었다.

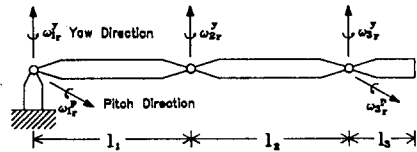


그림.4 모의실험 매니플레이터

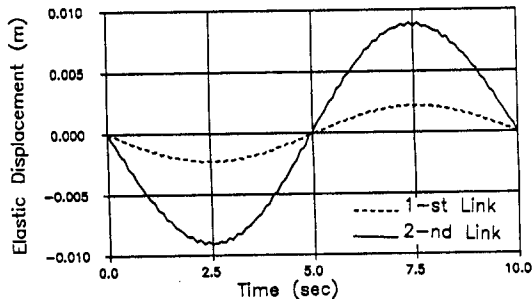


그림.5 각 링크 끝단의 탄성변위

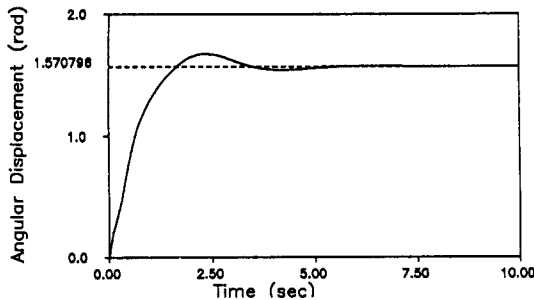


그림.6 시간응답

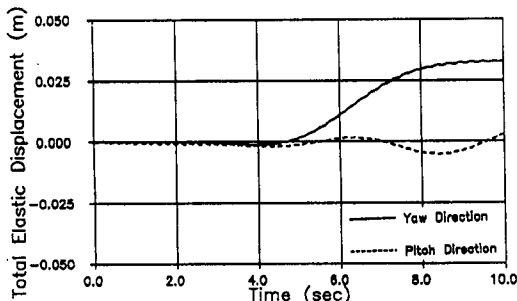


그림.7 탄성효과에 의한 매니플레이터 끝단변위차

	모의 실험 1		모의 실험 2		
	Link 1	Link 2	Link1	Link2	Link 3
길이 $l_i$ [m]	1.0	1.0	6.0	7.0	2.0
질량 $m_i$ [Kg]	0.5	0.5	140	85	95
밀도 $\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	8000	8000	7800	7800	-
부하질량 $m_p$ [Kg]	-	0.5	-	-	-
모터질량 $m_m$ [Kg]	-	2	-	-	-
탄성강도 EI	9	9	100	100	-
Yaw-면적모멘트	4.5E-11	4.5E-11	7.4573E-7	2.02E-7	-
Pitch-면적모멘트	-	-	7.4573E-7	2.02E-7	-
Roll-면적모멘트	-	-	1.4915E-6	4.04E-7	-
Yaw-관성모멘트	0.176667	0.676667	1680	1388.3	126.7
Pitch-관성모멘트	-	-	1680	1388.3	126.7
Roll-관성모멘트	-	-	0.4	0.2	0.2
모터 관성모멘트	0.01	0.01	-	-	-
위치 이득 $K_p$	5	4	-	-	-
속도 이득 $K_v$	10	2	-	-	-

단위 : 면적모멘트 [m<sup>4</sup>], 관성모멘트 [Kg·m<sup>2</sup>], 탄성강도[N·m<sup>2</sup>]

표 1. 각 LINK의 정적 및 동적 특성치

## 7. 결론

본논문에서는 복잡한 형상의 보 구조물을 체계적으로 모델링할 수 있는 유한요소법을 사용하여 유연링크의 탄성특성치를 용이하게 계산할 수 있었으며, 링크의 운동에 큰 영향을 주지 않는 고차의 탄성모드를 소거하는 모달감소법을 사용하여 모의실험의 계산시간을 줄일수 있었다.

참고문헌

- [1] Mirro, J., "Automatic feedback control of a vibrating beam", Master's thesis Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering. Rept T-571. Cambridge, Mass : C. S. Draper Lab. 1972.
- [2] Book, W. J., "Study of design and control of remote manipulators, Part II : Vibration considerations in manipulator design.", Contract rept. NAS8-28055. Cambridge, Mass. : Massachusetts Institute of Technology Department of Mechanical Engineering. Feb. 1973.
- [3] Book, W. J., "Characterization of strength and stiffness constraints on manipulator control." Proc. Symp. Theory Robots Manipulators. New York : Elsevier/North-Holland, pp28-37., Sept. 1976.
- [4] Sunada, W. , and Dubowsky, S., "The application of finite element methods to the dynamic analysis of spatial and coplanar linkage system." ASME J.Mechanical Design vol.103 : pp. 643-651 July. 1981.
- [5] John J. Craig, "Introduction to Robotics Mechanics & Control." Addison Wesley.
- [6] J. S. Przemieniecki.. " Theory of matrix structural analysis." McGRAW-HILL.
- [7] Eric Schmitz, "Dynamics and Control of a planar manipulator with elastic links. ", Proceedings of 25th Conference on Design and Control., Athen, Greece, Dec. pp. 1135-1139 1986.
- [8] I. Sharf & G. M. T. D'Eulerio., "Parallel Simulation Dynamics for Elastic Multibody Chains.", Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol.1 : pp.740-746 May. 1990.