

수동형 탐색기의 시선 각속도 측정을 이용한 접근속도 추정

탁민제 류동영
한국과학기술원 항공우주공학과

Missile Closing Velocity Estimation based on the LOS Rate Measurement of Passive Seeker

Min-Jea Tahk Dong-Young Rew
Dept. of Aerospace Engineering
KAIST

ABSTRACT

Missile and target closing velocity is used in the proportional navigation(PN) missile guidance loop. But it is difficult to estimate the closing velocity when passive seeker is used and only the Line-of-Sight(LOS) rate is available in the guidance loop. In this study, new closing velocity estimation method is developed. This method uses LOS rate measurement only and uses some characteristics of PN guidance law. The Lyapunov method is used to analyze the stability of the developed estimation method.

1. 서론

공대공 미사일 등에 널리 사용되고 자이로 방식의 적외선 탐색기는 수동형 탐색기로서 미사일로 부터 표적까지의 시선각속도(Line-of-Sight Rate ; LOS rate) 만을 측정하게 된다. 미사일의 유도방식으로서서는 비례항법이 사용되며 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$a_c = N \dot{V}_c \sigma \quad (1)$$

여기에서 a_c 는 미사일의 유도법칙에 의해 계산되는 가속도 명령이며 V_c 는 미사일과 표적의 접근속도(closing velocity), σ 는 시선각속도이다. N' 은 3~5 정도의 상수로서 유도이득(guidance gain)이라고 부르기도 한다.

일반적인 능동형 탐색기는 표적까지의 거리(range)를 직접 측정하며 도플러 효과를 이용하여 접근속도도 직접 측정 가능하다. 그러나 수동형 탐색기는 표적의 시선방향 또는 시선각속도만을 측정하게 되므로 거리 또는 접근속도는 추정을 하여야만 한다.

수동형 탐색기 중 시선방향을 직접 측정하는 탐색기는 아직까지는 실용화되어 있지는 않으나 미사일의 자세를 결정할 수 있는 관성 항법장치와 스트랩다운(Strap down) 탐색기를 이용하여 구성할 수 있다. 이러한 형태의 탐색기는 제라식 공대공 미사일에는 사용되고 있지 않으나 미국의 SDI 사업의 일환인 외기권 요격기(exoatmospheric interceptor) 등에 채택되고 있다.

시선 방향이 직접 측정되는 경우에는 칼만 필터의 구조를 갖는 추적필터(tracking filter)를 구성하여 표적까지의 거리 및 접근속도의 추정이 가능하다.(참고문헌 [1], [2],[3]), 물론 표적 상태변수의 가관측성(observability)을 위해서는 미사일의 기동이 필요하며 연속적인 시선방향의 변화가 있어야 한다.

그러나 자이로방식의 수동형 탐색기에서는 시선각속도만 측정하게 되므로 표적거리 및 접근속도 추정을 위한 추적필터의 구성이 불가능하다. 이 경우 비례항법 구현에 필요한 접근속도 V_c 를 알지 못하므로 미사일의 속도 V_m 을 대신 사용하기도 한다. 미사일의 속도가 표적속도보다 충분히 큰 경우에는 V_m 을 사용하는 것이 큰 문제가 없으나, 그렇지 못할 경우에는 유도이득이 너무 크거나 또는 너무 작게 선정된 결과를 가져오게 되며 따라서 유도성능 및 안정성이 저하하게 된다.

이 논문에서는 시선각속도만 측정하는 경우에 적절한 유도방식에 의해 접근속도를 추정하는 기법을 제안하고 있다. 이 기법은 표적의 가속도가 없고 V_c 를 알고 있는 경우 $N' = 2$ 를 사용하면 시선각속도가 불변이라는 점에 착안한 것으로서 시선각속도 변화가 0이 될 때까지 V_c 의 추정치를 개선시키는 방법을 사용하고 있다. 일단 접근속도의 추정치가 일정한 값으로 수렴하게 되면 유도이득 N' 을 3 또는 2이상의 값으로 증가시킴으로서 정상적인 비례항법으로 되돌아가게 된다.

2. 2차원 공간에서의 종말 유도

그림 1과 같은 요격상황을 생각해 보자. 그림 1에서 표적은 x방향으로만 움직인다고 가정하며 미사일은 일정한 접근속도 V_c 로 x방향으로 전진하며 또한 y방향으로도 움직인다. 표적과 미사일의 y좌표는 각각 y_T, y_M 로 표시된다.

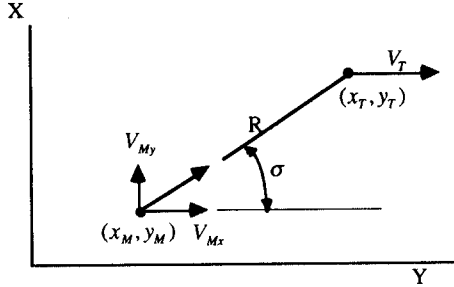


그림 1 2차원 미사일 및 표적관련 기하
Fig 1 Two dimensional missile-target geometry

표적거리 R 에 비해 y_T 와 y_M 이 작다고 가정할 때 시선각 σ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma = \frac{y_T - y_M}{R} \quad (2)$$

(2)식을 미분하면 시선각속도 $\dot{\sigma}$ 에 대한 표현을 구할수 있다.

$$\dot{\sigma} = -\frac{\dot{R}}{R^2}(y_T - y_M) + \frac{1}{R}(\dot{y}_T - \dot{y}_M) \quad (3)$$

(3)식을 다시 한번 미분하여 시선각 가속도 $\ddot{\sigma}$ 를 계산하면

$$\ddot{\sigma} = \frac{2(\dot{R})^2}{R^3}(y_T - y_M) - \frac{2\dot{R}}{R^2}(\dot{y}_T - \dot{y}_M) + \frac{1}{R}(\ddot{y}_T - \ddot{y}_M) \quad (4)$$

가 된다. (4)식을 정리하면

$$\ddot{\sigma} = -\frac{2\dot{R}}{R} \left[-\frac{\dot{R}}{R^2}(y_T - y_M) + \frac{1}{R}(\dot{y}_T - \dot{y}_M) \right] + \frac{1}{R}(\ddot{y}_T - \ddot{y}_M) \quad (5)$$

이 되므로 (3)식을 (5)식에 대입하면 다음식이 된다.

$$\ddot{\sigma} = -\frac{2\dot{R}}{R}\dot{\sigma} + \frac{1}{R}(\ddot{y}_T - \ddot{y}_M) \quad (6)$$

여기에서 $\dot{R} = -V_c$ 을 대입하고 표적이 기동을 하지 않는다고 가정하면 ($\ddot{y}_T = 0$), (6)식은

$$\ddot{\sigma} = \frac{1}{R}(2V_c\dot{\sigma} - \ddot{y}_M) \quad (7)$$

이 된다.

$\dot{\sigma}$, $\ddot{\sigma}$, \ddot{y}_M 은 측정 또는 추정 가능한 변수들이나 표적거리 R 은 측정 불가능하므로 (7)식에서 볼수 있듯이 접근속도 V_c 는 직접계산될 수 없다. 그러나 시선각속도가 일정하게 유지된다면, 즉 $\dot{\sigma} = 0$ 이면 (7)식은 다음과 같이 된다.

$$\ddot{y}_M = 2V_c\dot{\sigma} \quad (8)$$

(8)식은 $N' = 2$ 인 비례항법을 나타내고 있다.

수동형 탐색기의 경우 V_c 는 측정되지 않으므로 (1)식의 비례항법은 V_c 의 추정치 \hat{V}_c 을 이용해서 다음과 같이 구현된다.

$$a_c = N'\hat{V}_c\dot{\sigma} \quad (9)$$

가속도 명령 a_c 가 시간 지연 없이 \ddot{y}_M 으로 나타난다고 하면 $N' = 2$ 의 경우 (9)식은

$$\ddot{y}_M = 2\hat{V}_c\dot{\sigma} \quad (10)$$

이 된다. (8)식과 (10)식으로부터

$$\ddot{\sigma} = 0 \quad \text{if} \quad V_c = \hat{V}_c \quad (11)$$

임을 알수 있다. 그러므로 $N' = 2$ 인 비례항법을 사용하는 경우 $\ddot{\sigma} = 0$ 이 되는 \hat{V}_c 가 바로 실제의 접근속도가 된다. V_c 와 \hat{V}_c 가 같지 않으면 이때의 시선각가속도 $\ddot{\sigma}$ 는 (7)식과 (10)식으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\ddot{\sigma} = \frac{2}{R}(V_c - \hat{V}_c)\dot{\sigma} \quad (12)$$

3. 접근속도 추정기법 I

먼저 접근속도의 추정오차로부터 다음과 같은 변수를 정의한다.

$$P = \frac{1}{2}(V_c - \hat{V}_c)^2 \quad (13)$$

여기에서 V_c 는 상수라고 가정한다. Lyapunov의 방법을 이용하면 \hat{V}_c 가 V_c 로 수렴하기 위한 조건은

$$\dot{P} = -(V_c - \hat{V}_c) \dot{\hat{V}}_c < 0 \quad (14)$$

이다. 그러므로 \hat{V}_c 가 항상 식(14)를 만족하게 설정되면 $\dot{\hat{V}}_c$ 는 V_c 로 수렴하게 된다. (12)식을 이용하여 (14)식을 다시 쓰면

$$\dot{P} = -\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} R \dot{\hat{V}}_c < 0 \quad (15)$$

가 된다. 여기에서 $R > 0$ 이므로 $\dot{\hat{V}}_c$ 를

$$\dot{\hat{V}}_c = k \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma}, \quad k > 0 \quad (16)$$

로 정하면 (15)식은 항상 만족되게 된다.

(16)식에서 k 를 상수로 하면 (16)식을 적분하여 \hat{V}_c 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\hat{V}_c(t) = k \ln[\dot{\sigma}(t) / \dot{\sigma}(t_0)] + \hat{V}_c(t_0) \quad (17)$$

여기에서 t_0 는 (16)식을 이용한 \hat{V}_c 의 추정이 시작된 시간이며 t 는 현재 시간이며 $\dot{\sigma}(t_0)$ 및 $\hat{V}_c(t_0)$ 는 초기 시간의 시선각속도와 접근속도 추정치를 나타낸다.

(17)식을 $\dot{\sigma}(t_0)$ 에 대해 정리하면

$$\dot{\sigma}(t) = \exp\left\{\frac{1}{k}(\hat{V}_c(t) - \hat{V}_c(t_0))\right\} \dot{\sigma}(t_0) \quad (18)$$

그러므로 $\hat{V}_c(t)$ 가 실제의 접근속도 V_c 에 수렴하면 이때의 시선각속도 $\dot{\sigma}_{ss}$ 는

$$\dot{\sigma}_{ss} = \exp\left\{\frac{1}{k}(V_c - \hat{V}_{c0})\right\} \dot{\sigma}_0 \quad (19)$$

이 되며 이때부터 시선각속도는 상수값으로 유지된다. (19)식에서 $\dot{\sigma}_0$ 와 \hat{V}_{c0} 는 각각 $\dot{\sigma}(t_0)$ 와 $\hat{V}_c(t_0)$ 를 나타낸다.

(19)식에서 볼 수 있듯이 정상상태(steady-state)에서의 시선각속도 $\dot{\sigma}_{ss}$ 는 V_c 의 함수이므로 사전에 미리 계산될 수 없다. 그러나 (19)식으로부터 $\dot{\sigma}_0$ 와 $\dot{\sigma}_{ss}$ 의 정성적인 관계를 살펴볼 수 있다. 즉, 초기 추정치 \hat{V}_{c0} 가 V_c 보다 작은 경우에는 미사일의 가속도 명령이 $N=2$ 의 비례항법의 가속도 명령보다 작으므로 시선각속도가 증가하게 된다. 반대로 \hat{V}_{c0} 가 V_c 보다 큰 경우에는 정상상태의 시선각속도 $\dot{\sigma}_{ss}$ 는 초기치 $\dot{\sigma}_0$ 보다 작게 된다. 이를 식으로 표시하면 아래와 같다.

$$\dot{\sigma}_{ss} > \dot{\sigma}_0 \quad \text{if} \quad \hat{V}_{c0} < V_c \quad (20)$$

$$\dot{\sigma}_{ss} < \dot{\sigma}_0 \quad \text{if} \quad \hat{V}_{c0} > V_c$$

한편, 상수 k 는 수렴속도를 결정하며 k 가 클수록 $\dot{\sigma}_{ss}$ 는 $\dot{\sigma}_0$ 와 가까운 값이 되게 된다.

4. 접근속도 추정기법 II

앞에서 기술한 추정기법 I은 \hat{V}_c 가 실제 접근속도 V_c 에 수렴했을 때의 시선각속도 $\dot{\sigma}_{ss}$ 를 미리 설정할 수 없다는 단점이 있다. 즉 V_c 의 추정만을 목표로 하기 때문에 추정이 성공적으로 완료된다 하더라도 $\dot{\sigma}_{ss}$ 가 미사일의 기동능력으로 볼때 너무 크게 될 가능성도 있다. 이절에서는 $\dot{\sigma}_{ss}$ 가 원하는 값이 되도록 하면서 V_c 를 추정하는 기법에 대하여 고찰해 본다.

먼저 표기를 간단히 하기 위하여 다음을 정의한다.

$$X = \dot{\sigma} \quad (21)$$

$$Y = \hat{V}_c \quad (22)$$

원하는 $\dot{\sigma}_{ss}$ 의 값을 X_0 라 하고 실제 접근속도 V_c 를 Y_0 라 하면 (21)식과 (22)식은 X_0 와 Y_0 로부터의 오차 x, y 를 정의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X = X_0 + x \quad (23)$$

$$Y = Y_0 + y \quad (24)$$

(12)식을 위의 정의를 사용하여 다시 쓰면

$$\dot{x} = -\frac{2y}{R}(X_0 + x) \quad (25)$$

가 되며 오차의 2차항을 무시하면

$$\dot{x} = -\frac{2X_0}{R}y \quad (26)$$

이 된다. 한편 추정식은 (16)식에 시선각속도 오차 x 에 관계되는 항을 추가하여 다음과 같이 가정한다.

$$\dot{y} = \alpha x + \beta \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} \quad (27)$$

(12)식에서

$$\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} = \frac{2}{R}(V_c - \hat{V}_c) = -\frac{2y}{R} \quad (28)$$

이므로 (27)식은

$$\dot{y} = \alpha x - \frac{2\beta}{R} y \quad (29)$$

가 된다. 여기에서 α 와 β 는 안정성 분석을 통해 결정되게 된다.

(26)식과 (29)식은 시선각속도 오차 x 및 접근속도의 추정오차 y 가 작을 경우의 x, y 에 대한 미분방정식이다. 그러므로 시선각속도 $\dot{\sigma}$ 와 접근속도 추정치 \hat{V}_c 가 각각 원하는 값인 σ_s 와 V_c 에 가까이 갔을 때 그 값들로 수렴하는가 하는 것을 보기 위해서는 (26)식과 (29)식으로 기술되는 시스템의 안정성을 분석해 보아야 한다.

(26)식과 (29)식을 함께 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2X_o}{R} \\ \alpha & -\frac{2\beta}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (30)$$

(30)식은 선형형태를 가지고 있으나 표적거리 R 은 시간 에 따라

$$R(t) = R_o - V_c t \quad (31)$$

과 같이 변하므로 시변 시스템이다. 이러한 시스템의 안정성을 근사적으로 구하기 위해 시간이 동결되어 있다 (frozen time)고 가정하면, (30)식의 특성방정식(characteristic equation)은

$$s(s + \frac{2\beta}{R}) + \frac{2X_o}{R}\alpha = 0 \quad (32)$$

이 된다. 그러므로 (32)식의 두근이 모두 왼쪽 복소수 평면에 있기 위한 조건은

$$\alpha > 0, \beta > 0 \quad (33)$$

동결시간의 가정하에서의 안정성 분석은 표적거리 R 의 변화에 비해 변수 x 와 y 의 변화가 빠른 경우에는 타당한 분석방법이기는 하나 엄밀한 분석방법은 아니다.

R 이 고정되어 있다는 가정없이 안정성을 분석하기 위하여 먼저 다음과 같은 함수를 가정하자.

$$Q = \gamma x^2 + y^2, \gamma > 0 \quad (34)$$

(34)식을 미분하고 (26)식과 (29)식을 대입하면 다음을 얻

는다.

$$\dot{Q} = (-\frac{4\gamma X_o}{R} + 2\alpha)xy - \frac{4\beta}{R}y^2 \quad (35)$$

그러므로 α, β 를

$$\alpha = \frac{2\gamma X_o}{R}, \beta > 0 \quad (36)$$

로 정하면

$$\dot{Q} < 0, t \geq t_o \quad (37)$$

이므로 $Q(t)$ 는 단조 감소 함수가 되며 x 와 y 는 발산하지 않음을 알 수 있다.

(36)식에서 실제 표적거리 R 은 미지수이므로 추정식 (29)에서 α 를 (36)과 같이 정확히 변화시키는 것은 불가능하다. 그러나 (28)식에서와 같이 y 의 부호를 알 수 있으므로 α 의 값을 적절히 조절하여 $\dot{Q} < 0$ 이 되도록 하는 것이 가능하다. $\gamma = 0$ 인 경우는 시선각속도 $\dot{\sigma}$ 에 대한 조건이 없으므로 추정기법 I과 동일한 결과가 됨을 볼 수 있다.

5. 시뮬레이션

시뮬레이션은 접근속도 추정기법 I과 추정기법 II로 나누어서 수행하였다. 시뮬레이션에서 사용된 데이터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{M_o} &= 0.0 \text{ ft} & y_{M_o} &= 0.0 \text{ ft} \\ x_{T_o} &= 10000 \text{ ft} & y_{T_o} &= 30000 \text{ ft} \\ v_{M_o} &= 3000 \text{ ft/sec} & v_{T_o} &= 1000 \text{ ft/sec} \end{aligned}$$

여기서 x_{M_o}, y_{M_o} 는 미사일의 초기위치, x_{T_o}, y_{T_o} 는 표적의 초기위치, v_{M_o} 과 v_{T_o} 는 각각 미사일과 표적의 초기속도를 의미한다. 미사일의 초기 발사각은 표적을 향하는 방향으로 가정하였다. 접근속도 추정에서 초기 접근속도 추정값은 미사일의 초기속도를 이용하였다.

그림 2와 3은 추정기법 I을 사용한 접근속도 추정 시뮬레이션 결과이다. 그림 2의 시뮬레이션에서 사용한 이득은 $K=3.0E+4$ 그림 3의 시뮬레이션에서 사용한 이득은 $K=1.0E+5$ 로 이득을 크게 할 수록 빠르게 접근속도에 수렴함을 알 수 있다. 두 시뮬레이션에서 시선각속도는 동일한 어느 한 값에 수렴하며 수렴하는 시선각속도의 값은 $6.677E-3(\text{rad/sec})$ 이다.

그림 4-7은 추정기법 II를 사용한 시뮬레이션이다. 그림 4.5는 정상상태에서의 시선각속도에 대한 요구를 $0.01(\text{rad/sec})$ 로 정할 경우의 접근속도 추정상황이다. 초기에 추정된 접근속도가 실제 접근속도보다 작은 것은 원하는 정상상태의 시선각속도가 시뮬레이션 I에서의 결

과로 얻어지는 정상상태의 시선각속도 보다 크게 설정되어 원하는 정상상태 시선각속도에 근접할 때까지 가속도 명령을 작제하기위함이다.

그림 6.7은 요구하는 정상상태에서의 시선각속도를 0.03(rad/sec)로 하였을 때의 접근속도 추정 상황이다. 앞에서의 접근속도 추정과 반대로 추정초기에 추정된 접근속도가 실제의 접근속도 보다 작은 것을 볼 수 있다.

그림 8.9는 표적이 속도방향에 수직하게 1g의 가속도로 기동하는 경우의 접근속도 추정결과이다. 이 경우 요구되는 정상상태 시선각속도로의 수렴은 이루어지지만 속도 추정에서는 일정한 추정오차가 발생함을 알 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 시선각속도 만의 측정이 가능한 수동형 탐색기를 사용하는 미사일의 비례항법 시스템에서 미사일과 표적간의 접근속도를 추정할 수 있는 새로운 추정기법을 개발하여 2차원 평면에서의 시뮬레이션을 통하여 개발된 추정기법의 성능을 검토하고 Lyapunov 방법을 이용하여 추정 알고리즘의 안정성을 분석하였다. 시뮬레이션의 결과 표적의 기동이 없는 경우는 정확한 접근속도 추정이 가능하다는 것을 확인하였으며 표적의 기동이 있는 경우에는 접근속도 추정에 일정한 오차를 가지게 됨을 확인하였다.

참고문헌

- [1] T. L. Song, J. L. Speyer, "A Stochastic Analysis of a Modified Gain Extended Kalman Filter with Applications to Estimation with Bearing Only Measurements," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, pp.940-949, Oct. 1985.
- [2] M. J. Tahk, J. L. Speyer, "Use of Intermittent Maneuvers for Miss Distance Reduction in Exoatmospheric Engagements," AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, August 1989.
- [3] J. L. Speyer, K. D. Kim, M. J. Tahk, "Passive Homing Missile Guidance Law Based on New Target Maneuver Models," *J. Guidance*, vol. 13, pp.803-812, Sept. 1990.
- [4] S. C. Nardone, V. J. Aidala, "Observability Criteria For Bearings-Only Target Motion Analysis," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-17, pp.161-166, Mar. 1981.
- [5] S. E. Hammel, V. J. Aidala, "Observability Requirements for Three-Dimensional Tracking via Angle Measurements," *IEEE Trans. Aerosp Electron. Syst.*, vol. AES-21, pp. 200-207, Mar. 1985.

- [6] A. G. Lindgren, K. F. Gong, "Position and Velocity Estimation Via Bearing Observations," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-14, pp.564-577, July 1978.
- [7] P. Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance*, AIAA, 1990.
- [8] P. Gamell, D. J. East, *Guided Weapon Control Systems*, Pergamon Press, 1977.
- [9] 류혁, 수동형 호우밍 미사일의 요격성능 향상을 위한 적응 단속기동, 한국과학기술원, 1991.

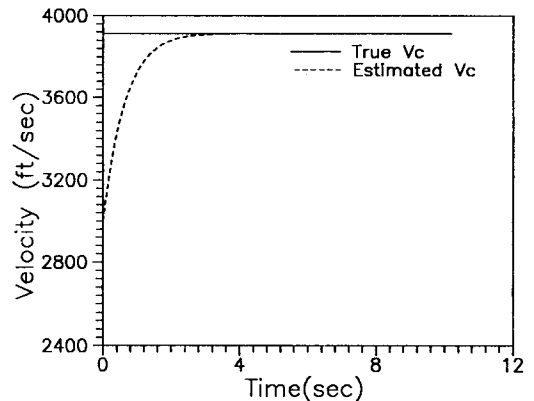


그림 2 접근속도 추정(추정기법 I, $K=3.0E+4$)
Fig. 2 Closing velocity estimation(Method I, $K=3.0E+4$)

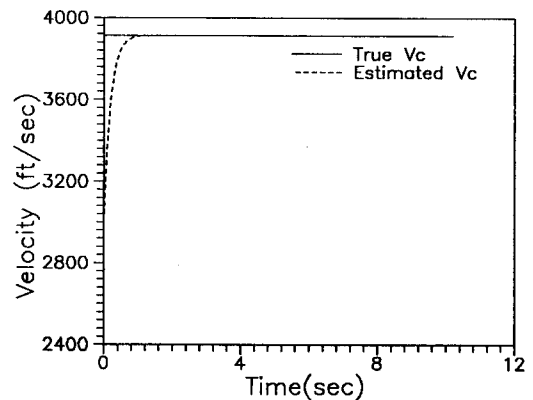


그림 3 접근속도 추정(추정기법 I, $K=1.0E+5$)
Fig. 3 Closing velocity estimation(Method I, $K=1.0E+5$)

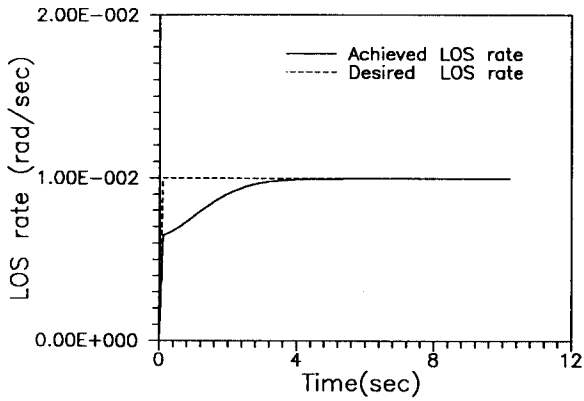


그림 4 시선각속도 제어(추정기법 II, $\dot{\sigma}_{ss}=1.0E-2$)
 Fig. 4 LOS rate control(Method II, $\dot{\sigma}_{ss}=1.0E-2$)

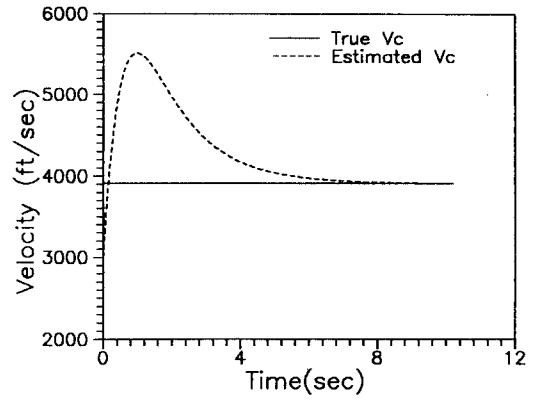


그림 7 접근속도 추정(추정기법 II, $\dot{\sigma}_{ss}=0.5E-2$)
 Fig. 7 Closing velocity estimation(Method II, $\dot{\sigma}_{ss}=0.5E-2$)

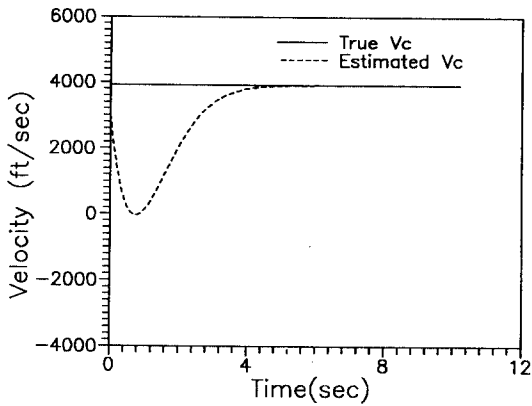


그림 5 접근속도 추정(추정기법 II, $\dot{\sigma}_{ss}=1.0E-2$)
 Fig. 5 Closing velocity estimation(Method II, $\dot{\sigma}_{ss}=1.0E-2$)

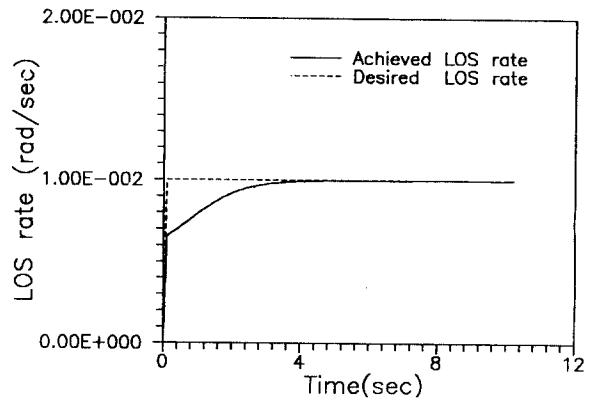


그림 8 시선각속도 제어(추정기법 II, $\dot{\sigma}_{ss}=1.0E-2$, 표적가속도=1g)
 Fig. 8 LOS rate control(Method II, $\dot{\sigma}_{ss}=1.0E-2$, Target accel. =1g)

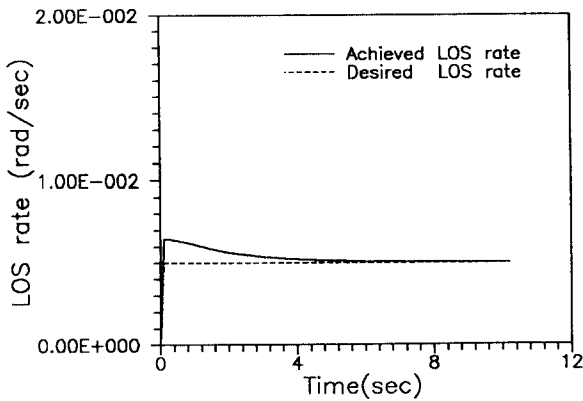


그림 6 시선각속도 제어(추정기법 II, $\dot{\sigma}_{ss}=0.5E-2$)
 Fig. 6 LOS rate control(Method II, $\dot{\sigma}_{ss}=0.5E-2$)

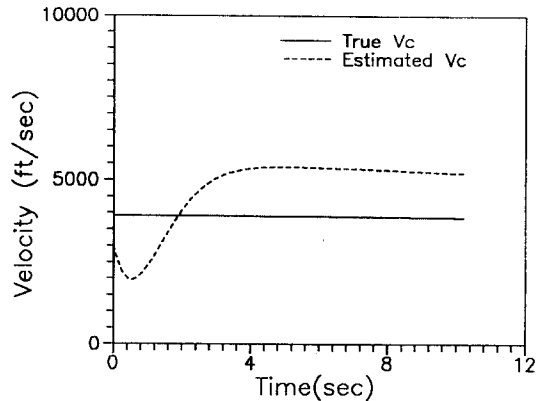


그림 9 접근속도 추정(추정기법 II, $\dot{\sigma}_{ss}=1.0E-2$, 표적가속도=1g)
 Fig. 9 Closing velocity estimation(Method II, $\dot{\sigma}_{ss}=1.0E-2$, Target accel. =1g)