'91 韓國自動制御學術會議論文集 1991. 10.22~24

패러미터와 잡음전력이 불확실한 시스템에 대한 LQG 제어기 설계

오 원 근 서 병 설

한양대학교 공과대학 전자통신공학과

LQG Design Under Plant Perturbation and Uncertain Noise Covariance

Won-Geun Oh Byung-Suhl Suh

Dept. of Electronic Communication Eng.
Han Yang Univ.

ABSTRACT

In this paper, a linear stocastic dynamic system with norm - bounded plant perpurbations and norm -bounded noise covariance is studied. Instead of Bellman-Gronwall inequality used in previous study, Lyapunov stability theorem is used to derive stability condition. The new condition is of more compact form than the previous result.

1. 서론

일반적으로 제어계는 플랜트와 그에 야기되는 잡음에 대한 정확한 수학적 표현을 가정하고 있다. 그러나 실제의 플랜트에는 모델 단순화, 선형화, 플랜트에 대한 불완전한 지식, 모델의 부정확성, 모델 선택의 잘못 등으로 인하여 불확실성 (uncertainty)이 존재하게 되고 또한 잡음전력에도 가우시안 (Gaussian)이 아니거나 stationary 가 아닌 잡음일때는 불확실성이 존재하게 된다. 강인성 (robustness)이란 이와같은 불확실성에 대해 제어기가 어느 정도까지 요구되는 성능을 만족시킬 수 있는가를 나타낸다.

최근 섭동된 (perturbed) 플랜트의 강인한 제어에 대한 많은 연구 결과들이 나오고 있으며 이같은 연구는 크게 전달함수 (transfer function) 적인 접근법 , 패러미터 공간 (parametric space) 에서의 접근법, 상태공간(state space) 에서의 접근법 등으로 나눌 수 있고 본 논문에서는 섭동된 플랜트를 상태공간에서 구조화되지 않은 불확실성 (unstructured uncertainty) 으로 표현하였다.

상태공간에서 강인한 제어기의 설계법으로 플랜트의 패러미터에만 불확실성이 있는 경우[4],[8]나 잡음전력이 불확실한 경우에[7] 대해서는 많은 연구가 있었다. 그러나 대부분 상태궤환이 가능한 경우를 다루었기 때문에 실제 플랜트에 적용되기는 힘들고 좀 더 실제상황에 가까운 관측기 (observer)를 사용한 모델기준 보상기(MBC : model based compensator)의 강인성을 다룬 연구결과도 있으나 시스템에 들어오는 잡음전력의 불확실성을 고려하지 않았기 때문에 플랜트와 잡음전력에 동시에 불확실성이 존재하는 경우가 대부분인 실제 플랜트에 적용하기는 무리가 있었다. 이렇게 플랜트 패러미터와 잡음전력에 동시에 불확실성이 존재하는 시스템에 대해서는 minimax 이론과 Bellman - Gronwall 부등식을 사용한 Chen ,Dong 의 연구가 있다.

본 논문에서는 시스템 패러미터에 구조화되지 않은 불확실성 (unstructured uncertainty)이 있고 동시에 잡음전력에도 노옴(norm)이 제한된 불확실성이 있는 시스템에 대해 Chen ,Dong 의 연구에서 사용했던 Bellman- Grownwall 부등식 대신에 Schur 분해 (Schur decomposition)와 Lyapunov 안정도 이론을 이용하여 Chen,Dong 의 결과보다 더욱 간단한 형태의 폐루프의 안정도가 보장되기 위한 충분조건을 구했다.

2 장에서는 플랜트에 대한 가정과 문제제기를 하고 3장은 표준 LQG 시스템과 minimax 제어기에 대한 설명이며 4장에서 Lyapunov 안정도 이론을 이용하여 안정조건을 유도하고 설계방법에 대해 논하며, 5 장에는 예제 , 6장은 결론이다.

2. 시스템 표현 및 문제제기

시스템 패러미터와 잡음전력에 동시에 불확실성이 존재하는 시스템을 다음과 같이 나타내자.

$$x(t) = (A + \Delta A(t))\, x(t) + (B + \Delta B(t))\, u(t) + \xi(t)$$
$$y(t) = (C + \Delta C(t))\, x(t) + \theta(t) \qquad (1)$$

여기서 A, B, C, $\xi(t)$, $\theta(t)$ 는 공칭모델의 패러미터 이며 섭동량 $\Delta A(t), \Delta B(t), \Delta C(t)$ 는 다음과 같이 제한되어 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \Delta A &\in \{ \| \Delta A(t) \| \} \le \alpha \\ \Delta B &\in \{ \| \Delta B(t) \| \} \le \beta \\ \Delta C &\in \{ \| \Delta C(t) \| \} \le \gamma \end{aligned} \tag{2}$$

또한 잡음전력도 $\xi(t)$와 $\theta(t)$의 공칭전력 Ξ_o , Θ_o 를 중심으로 다음과 같이 제한되어 있다고 하자.

$$\begin{aligned} \Xi &\in \xi_o = \{ \| \Xi - \Xi_o \| \} \le n_1 \\ \Theta &\in \theta_o = \{ \| \Theta - \Theta_o \| \} \le n_2 \end{aligned} \tag{3}$$

위의 식 (2), (3) 에서 $\alpha, \beta, \gamma, n_1, n_2$ 는 경험 또는 실험으로 알 수 있는 일정한 양의 상수이고 공칭값에 대한 섭동량의 노음 (norm)의 최대값을 나타낸다.

이와같이 개루프 시스템에 섭동이 있을 경우에 표준 LQG 방법으로 구한 제어입력 u(t)는 일반적으로 전체 폐루프 시스템을 안정시키지 않는다. 그러므로 본 논문에서는 표준 LQG 를 수정하여 (2), (3) 식으로 주어지는 섭동과 잡음전력의 불확실성에도 전체 폐루프를 안정시키는 제어입력 u(t)를 구하는 방법에 대해 논한다.

3. LQG 최적제어기, minimax 제어기

3.1 LQG 최적제어기

다음과 같이 표현되는 선형 시불변 시스템 (linear time-invariant system)을 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) + \xi(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + \theta(t) \end{aligned} \tag{4}$$

이 시스템은 가제어 (controlable), 가관측 (obserbable) 이라 가정하며 잡음의 성질은 다음과 같다고 가정한다.

- $E\xi(t) = E\theta(t) = 0$
- $\xi(t), \theta(t)$ 는 백색 가우시안 잡음.
- $\mathrm{cov}\{ \xi(t), \xi(\tau) \} = \Xi\delta(t-\tau),\ \Xi \ge 0$
- $\mathrm{cov}\{ \theta(t), \theta(\tau) \} = \Theta\delta(t-\tau),\ \Theta \ge 0$
- $\theta(\cdot)$, $\xi(\cdot)$는 서로 독립이다. (5)

LQG 최적제어기 문제는 식 (4), (5) 와 같은 시스템에 대해 다음과 같은 평가함수 (cost function)를 최소화 시키는 제어입력 u(t)를 구하는 것이다.

$$J = \lim_{T\to\infty} E \int_0^T [\, x^T(t)Qx(t) + \rho u^T(t)Ru(t) \,]\, dt \tag{6}$$

이때 u(t)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(t) &= -K_c x_e(t) \\ K_c &= (1/\rho)R^{-1}B^TP \\ 0 &= PA + A^TP + Q - (1/\rho)PBR^{-1}B^TP \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $x_e(t)$는 다음과 같은 칼만필터의 출력 이다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= Ax_e(t) + Bu(t) + K_f[\, y(t) - Cx_e(t) \,] \\ K_f &= \Sigma C^T\Theta^{-1} \\ 0 &= A\Sigma + \Sigma A^T + \Xi - \Sigma C^T\Theta^{-1}C\Sigma \end{aligned} \tag{8}$$

LQ 레귤레이터의 이득 K_c 와 칼만필터의 이득 K_f 는 각각 독립적으로 설계되며 이렇게 설계된 LQG 의 극점은 모두 s 평면의 좌반부 (LHP)에 위치하여 전체 폐루프시스템은 안정하게 된다.

3.2 불확실한 잡음전력에 대한 minimax 제어기

불확실한 잡음전력을 가진 시스템의 모델과 이에 대한 평가함수가 아래식과 같다고 가정하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) + \xi(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + \theta(t) \end{aligned} \tag{9}$$

$$J = \lim_{T\to\infty} E \int_0^T [\, x^T(t)Qx(t) + \rho u^T(t)Ru(t) \,]\, dt \tag{10}$$

여기서 $Q=Q^T \ge 0$, $R=R^T > 0$ 이고
$[A, Q^{1/2}]$ 가관측(observable)
$[A, \Xi^{1/2}]$ 가제어(controllable) 이다.

여기에서 $\xi(t), \theta(t)$ 는 평균이 0 인 백색 가우시안잡음 프로세스 (zero mean white Gaussian process) 이며 그의 잡음전력 Ξ, Θ 는 확실하게 알 수 없는 값이라고 가정한다. 이러한 시스템에 대한 minimax 제어기문제는 평가함수 $J(\cdot)$ 가 잡음전력의 특정한 값에 대해 최악의 값을 가질때 이 특정한 잡음전력 값에 대한 평가함수를 최소로 하는 제어입력 u(t) 를 구하는 것으로 다음과같이 요약 할 수 있다.

(요 약) 불확실한 잡음전력을 가진 시스템에 대한 minimax 제어기 [3], [7]

식 (10) 의 평가함수에 대한 잡음전력의 최악의 값은 ($\Xi_o + n_1 I$, $\Theta_o + n_2 I$) 이며, 잡음전력에 불확실성을 가진 시스템 (9) 에 대한 강인한 minimax 제어기는 잡음전력의 최악의 값 $\Xi_o + n_1 I$, $\Theta_o + n_2 I$ 에 대해 설계한 LQG 제어기와 같다. 즉,

$$\begin{aligned} u(t) &= -K_c x_e(t) \\ K_c &= (1/\rho)R^{-1}B^TP \\ 0 &= PA + A^TP + Q - (1/\rho)PBR^{-1}B^TP \end{aligned} \tag{11}$$

이고 $x_e(t)$ 는 다음과 같이 잡음전력을 최악의 값인 $\Xi_o + n_1 I$, $\Theta_o + n_2 I$ 로 놓았을때 칼만필터의 출력이다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= Ax_e(t) + Bu(t) + K[\, y(t) - Cx_e(t) \,] \\ K &= \Sigma C^T(\Theta_o + n_2 I)^{-1} \\ 0 &= A\Sigma + \Sigma A^T + (\Xi_o + n_1 I) - \Sigma C^T(\Theta_o + n_2 I)^{-1}C\Sigma \end{aligned} \tag{12}$$

이와같은 minimax 제어기는 식 (3) 으로 주어지는 잡음전력의 불확실성에 대해서 전체 폐루프 시스템을 안정시킨다.

이렇게 설계된 minimax 제어기는 적응 (adaptive)제어기에 비해 구조가 간단하므로 잡음전력의 변화량이 적은 경우에 많이 사용된다. 그러나 최악의 경우를 고려하여 설계하였기 때문에 공칭 모델에 대한 성능이 좋지 않으며 잡음전력의 변화량이 큰 경우에는 conservatism 이 커지므로 사용하기 힘든 단점이 있다.

4. 강인한 LQG 제어기 설계

4.1 안정조건

(11)~(12)의 minimax 제어기는 잡음전력에만 불확실성이 있는 경우에는 안정도가 보장되지만 잡음전력과 시스템의 패러미터에 동시에 불확실성이 존재하는 경우에는 안정도가 보장된다고 할 수 없다.

섭동된 전체 폐루프 시스템의 안정도를 보장하기위해 (11)~(12) 의 minimax 제어기가 식 (2)로 주어지는 패러미터의 섭동에도 안정하기 위한 조건을 구해보자.

$e(t) = x(t) - x_e(t)$ 라고 놓으면 (4),(11),(12) 에서 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK_c & BK_c \\ 0 & A-K_fC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A(t)-\Delta B(t)K_c & \Delta B(t)K_c \\ \Delta A(t)-\Delta B(t)-K_f\Delta C(t) & \Delta B(t)K_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \tag{13}$$

여기서 다음과 같이 새로운 변수를 정의하면

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} A-BK_c & BK_c \\ 0 & A-K_fC \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_c(t) = \begin{bmatrix} \Delta A(t)-\Delta B(t)K_c & \Delta B(t)K_c \\ \Delta A(t)-\Delta B(t)-K_f\Delta C(t) & \Delta B(t)K_c \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -K_f \end{bmatrix}$$

$$n(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \tag{14}$$

그러면 (13) 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$z(t) = A_c\, z(t) + A_c(t)\, z(t) + W\, n(t) \tag{15}$$

(15) 식의 안정도가 보장되기 위한 조건을 구하기 위해 Schur 분해와 Lyapunov 안정도 이론을 이용하면 아래의 정리를 얻을 수 있다.

(정리 1)

만약 $\mathrm{Re}[\lambda_i(A_c)] < -\eta$ 인 η 가 존재한다면 다음 식을 만족하는 일원행렬 (unitary matrix) U 가 존재한다.

$$U^H A_c U < -\eta I\ ,\ \eta > 0 \tag{16}$$

(증명)

A_c 행렬에 Schur 분해를 하고 A_c의 고유값을 $\lambda_i, i=1,\ldots,n$ 이라 놓으면

$A_c = U\,T\,U^H = U(D + M)U^H$

$D = \mathrm{diag}\ \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$

M = strictly upper triangular 행렬

U = 일원행렬 (unitary matrix)

이므로 $U^H A U = T$ 이고 이때 T 는 주대각선에 A_c 의 고유값을 갖는 upper triangular 행렬이다.[5] 또한 $\mathrm{Re}[\lambda_i(A_c)] < -\eta$ 이므로 $\mathrm{Re}[\lambda_i(U^H A_c U + \eta I)] < 0$ 이고 이것은 $U^H A_c U + \eta I$ 행렬이 음의 한정행렬 (negative definite matrix)임을 의미한다. 그러므로 $U^H A_c U < -\eta I$ 이다.

□ 증명끝 □

(정리 2)

정리 1 의 η 가 다음 식을 만족하면 (11)~(12) 의 minimax 제어기는 (1)~(3) 으로 표현되는 섭동된 개루프 시스템을 안정시키고 전체 폐루프 시스템의 출력은 잡음전력의 강도에 비례하는 일정한 값으로 점근적으로 수렴한다.

$$\eta > 2\alpha + \beta\,\|K_c\| + \gamma\,\|K_f\| \tag{17}$$

(증명)

식 (15) 의 minimax 제어기에 대하여 다음과 같이 Lyapunov 함수를 잡으면,

$$V(z(t)) = z^T(t)Pz(t)$$

여기에서 $P = P^T > 0$ 이다. 이에대한 미분 (Lyapunov derivative)은

$$\begin{aligned} V(z(t)) &= z^T(t)Pz(t) + z^T(t)Pz(t) \\ &= z^T(t)(\,A_c^TP + PA_c\,)z(t) \\ &\quad + z^T(t)(\Delta A_c^T(t)P + P\Delta A_c(t))z(t) \\ &\quad + n^T(t)W^TPz(t) + z^T(t)PWn(t) \\ &\le z^T(t)(\,A_c^TP + PA_c\,)z(t) \\ &\quad + 2\,\|z^T(t)P\|\,\|\Delta A_c(t)z(t)\| \\ &\quad + 2\,\|n^T(t)W^T\|\,\|Pz(t)\| \end{aligned} \tag{19}$$

(14) 식 에서 Schwartz 부등식을 사용하면

$$\Delta A_c(t)z(t) = \begin{bmatrix} \Delta A_c(t)x(t) - \Delta B(t)K_cx_e(t) \\ \Delta A(t)x(t)-\Delta B(t)K_cx_e(t)-K_f\Delta C(t)x(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\|\Delta A_c(t)z(t)\| \\ &\quad \le \|\,\Delta A_c(t)x(t) - \Delta B(t)K_cx_e(t)\,\| \\ &\qquad + \|\Delta A_c(t)x(t)-\Delta B(t)K_cx_e(t)-K_f\Delta C(t)x(t)\| \\ &\quad \le 2\,\|\Delta A_c(t)\|\,\|x(t)\| + 2\,\|\Delta B(t)\|\,\|K_c\|\,\|x_e(t)\| \\ &\qquad + \|K_f\|\,\|\Delta C(t)\|\,\|x(t)\| \\ &\quad \le (\,2\,\alpha + 2\,\beta\,\|K_c\| + \gamma\,\|K_f\|\,)\,\|z(t)\| \end{aligned}$$

$$\|W\| \le \|I\| + \|I\| + \|K_f\| \le 2 + \|K_f\|$$

$$\begin{aligned} \|n(t)\| &\le \|\xi(t)\| + \|\theta(t)\| \\ &\le \sqrt{\mathrm{tr}(\Xi_o+n_1I)} + \sqrt{\mathrm{tr}(\Theta_o+n_2I)} \end{aligned} \tag{20}$$

이 되고 이 식들을 (19) 에 대입하면

$$\begin{aligned} V(z(t)) &\le z^T(t)(\,A_c^TP + PA_c\,)z(t) \\ &\quad + 2\,(\,2\,\alpha + 2\,\beta\,\|K_c\| + \gamma\,\|K_f\|\,)\,\|P\|\,\|z(t)\|^2 \\ &\quad + 2\,(\,2 + \|K_f\|\,)\,(\sqrt{\mathrm{tr}(\Xi_o+n_1I)} + \sqrt{\mathrm{tr}(\Theta_o+n_2I)}) \\ &\qquad \times \|Pz(t)\| \end{aligned}$$

이 된다. 여기에서 (16)식의 U 는 일원행렬 (unitary matrix) 이기 때문에 nonsingular 이므로 $z(t) = Uy(t)$로 좌표변환을 하고 $P = U\,U^H = I$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} &V(y(t)) \\ &\le y^T(t)(\,U^HA_c^TU + U^HA_cU\,)y(t) \\ &\quad + 2\,(\,2\,\alpha + 2\,\beta\,\|K_c\| + \gamma\,\|K_f\|\,)\,\|y(t)\|^2 \\ &\quad + 2\,(\,2 + \|K_f\|\,)\,(\sqrt{\mathrm{tr}(\Xi_o+n_1I)} + \sqrt{\mathrm{tr}(\Theta_o+n_2I)}) \\ &\qquad \times \|y(t)\| \\ &\le 2\,[\,-\eta + (\,2\,\alpha + 2\,\beta\,\|K_c\| + \gamma\,\|K_f\|\,)\,]\,\|y(t)\|^2 \\ &\quad + 2\,(\,2 + \|K_f\|\,)\,(\sqrt{\mathrm{tr}(\Xi_o+n_1I)} + \sqrt{\mathrm{tr}(\Theta_o+n_2I)}) \\ &\qquad \times \|y(t)\| \end{aligned} \tag{22}$$

(22) 식의 우변을 $\|y(t)\|$ 에 대하여 그래프로 나타내면 그림 1. 과 같다.

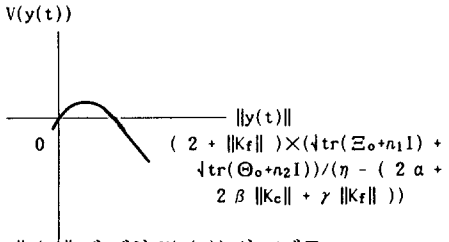

그림 1. $\|y(t)\|$ 에 대한 V(y(t)) 의 그래프

그러므로 $\eta = -\mathrm{Re}[\lambda_i(A_c)] > 2\alpha + 2\beta\|K_c\| + \gamma\|K_f\|$ 가 성립하면 $\|y(t)\|$는 $t\to\infty$ 일때 일정한 값 $(2 + \|K_f\|)(\sqrt{tr}(\Xi_o+n_1 I) + \sqrt{tr}(\Theta_o+n_2 I))/(\eta - (2\alpha + 2\beta\|K_c\| + \gamma\|K_f\|))$ 에 점근적으로 수렴하게 된다. 그런데

$$\|z(t)\| = \|Uy(t)\| = y^T(t)\,U^H\,U\,y(t) = \|y(t)\| \quad , \forall t$$

$$\lim_{t\to\infty}\|z(t)\| = \lim_{t\to\infty}\|y(t)\| = (2 + \|K_f\|)(\sqrt{tr}(\Xi_o+n_1 I) + \sqrt{tr}(\Theta_o+n_2 I))/(\eta - (2\alpha + 2\beta\|K_c\| + \gamma\|K_f\|)) \tag{23}$$

이므로 $\|z(t)\|$ 는 $t\to\infty$ 일때 잡음 전력의 크기와 섭동량에 비례하는 일정한 값보다 작아지게 되며 전체 폐루프는 점근적인 안정도를 갖는다.

4.2 강인한 제어기 설계

(17)의 부등식은 잡음전력과 패러미터의 섭동량을 s 평면에서의 경계값으로 나타낸 것이다. 최초에 설계한 minimax 제어기의 극점이 모두 이 경계값보다 왼쪽에 있다면 이 minimax 제어기는 패러미터의 섭동에도 안정하지만 minimax 제어기의 극점이 경계값의 오른쪽에 위치하는 경우에는 (17)식은 성립하지 않게 되고 시스템은 불안정하게 된다. 이러한 경우에 전체 폐루프의 안정도를 보장하기 위해서는 좌변의 η 가 우변보다 크게 되도록 조절해야하고 이것은 A_c 행렬의 극점을 (17)식이 성립할때까지 s 평면의 좌측으로 이동시키는 것을 의미한다. A_c 행렬의 극점은 LQR 의 극점과 칼만필터의 극점으로 분리시켜서 생각할 수 있으므로 (17) 식을 만족하지 않는 극점에 해당되는 부분만 적절한 방법을 사용하여 이동시키면 된다.

이와같이 주어진 한계까지 극점을 이동시키는데는 극배치법 (pole assignment method) 또는 Lyapunov 방정식이나 Ricatti 방정식을 풀어서 LQ 레귤레이터의 극점을 이동시키는 방법등을 이용할 수 있으나 본 논문에서는 보다 간단하게 이용할 수 있는 다음의 2가지 연구결과를 이용한다.

① 정해진 안정도를 갖는 LQ 레귤레이터 [1]
표준 LQR 문제의 평가함수를 다음과 같이 바꾸면

$$J = \lim_{T\to\infty}E\frac{1}{T}\int_0^T \exp(2n_1 t)[x^T(t)Qx(t) + \rho u^T(t)Ru(t)]dt \tag{24}$$

가 되고 이것은 다음의 리카티 방정식을 푸는것과 같다.

$$0 = P(A+n_1 I) + (A+n_1 I)^T P + Q - (1/\rho)PBR^{-1}B^T P \tag{25}$$

그러면 $A-BK_c$ 행렬의 고유치는 모두 $-n_1$ 보다 작은 값을 갖게 된다.

② 정해진 안정도를 갖는 칼만필터 [3]
표준 칼만필터의 평가함수를 다음과 같이 바꾼다.

$$J=\lim_{T\to\infty}E\frac{1}{T}\int_0^T \{(y(t)-C(t)x(t))^T\Theta^{-1}(y(t)-C(t)x(t)) + (\xi^T(t)\Xi^{-1}(t)\xi(t))\}\,dt$$

여기서 $\Theta(t) = \exp(-2n_2 t)\Theta(t)$
$\Xi(t) = \exp(-2n_2 t)\Xi(t)$ 이다. (26)

이에 해당하는 리카티 방정식은 다음과 같다.

$$0 = (A+n_2 I)\Sigma + \Sigma(A+n_2 I)^T + (\Xi_o+n_1 I) - \Sigma C^T(\Theta_o+n_2 I)^{-1}C\Sigma \tag{27}$$

그러면 $A-K_fB$ 행렬의 고유치는 모두 $-n_2$ 보다 작은 값을 갖게 된다.

(11),(12) 식을 (25),(27)식으로 바꾸면 minimax 제어기의 극점은 s 평면 위에서 max $(-n_1, -n_2)$ 보다는 왼쪽에 위치하게 된다.

그림 2.는 이 설계과정을 순서도로 나타낸 것이다.

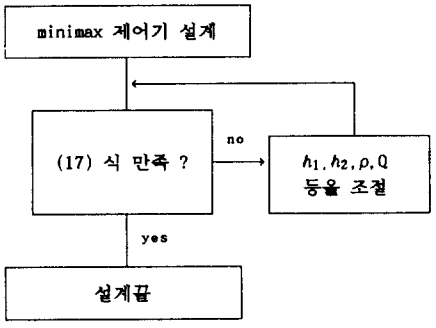

그림 2. 설계과정

5. 예 제

다음과 같은 동역학식을 갖는 선형확률 시스템이 있다고 하자. 이 시스템은 Chen, Dong 의 연구에서 보인 것으로 본 논문에서 구한 조건의 타당성을 보이기위해 선택 하였다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1.5 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2\cos(t) & 0 \\ 0 & 1.5\,e^{-4t} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} [-0.05\ 0.05] \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \xi(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.2\cos(t) & 0 \\ 0 & 0.1\sin(t) \end{bmatrix} x(t) + \theta(t)$$

$\xi(t)$, $\theta(t)$ 의 잡음전력의 공칭값과 불확실성은 다음과같다.

$$\Xi_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \Theta_o = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\Xi - \Xi_o\| \le 0.7 = \rho_1 , \quad \|\Theta - \Theta\| \le 0.9 = \rho_2$$

또한 α=2, β=0.05, γ=0.2 이며, 이때 제어가중치를

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} , \quad R = 1 , \quad \rho = 1$$

로 놓고 minimax 제어기를 설계 하면

η = 1.9408
$2\alpha + \beta \|K_c\| + \gamma \|K_f\|$ = 4.2215

가 되어 (17) 식을 만족하지 않는다. 따라서 4.2 절의 방법에 따라 몇번의 시행착오후에 ρ_1 = 4, ρ_2 = 3 으로 놓고 다시 LQG 문제를 풀면

A_c 의 극점 : -6.9013 ± 2.1018 i
-6.4067 ± 2.3595 i
η = 6.4067
$2\alpha + \beta \|K_c\| + \gamma \|K_f\|$ = 6.1295

이 되어 (17) 식을 만족하며 이것은 Chen, Dong 의 것과 같은 결과이다.

6. 결 론

표준 LQG 제어기는 공칭 모델에 대해 설계되므로 패러미터나 잡음전력에 불확실성이 존재할 경우 일반적으로 안정도가 보장되지 않는다. 본 논문에서는 노옴이 제한된 패러미터의 섭동과 잡음전력의 불확실성에도 LQG 제어기의 안정도가 보장되는, 기존의 연구결과보다 간단한 형태의 조건을 구하고 이 조건에 따라 설계한 LQG 는 안정함을 예제를 통해 보였다.

본 논문에서 강인한 제어기는 섭동과 불확실성의 크기가 최대인 경우에 대해 설계되었으므로 섭동과 불확실성의 크기가 큰 경우에는 적합하지 않다. 이러한 경우 폐루프 극점을 s 평면의 왼쪽으로 이동시킬수록 식 (17)의 우변은 K_c, K_f 의 노옴에도 비례하므로 우변도 점점 커지게된다. 따라서 섭동량이 큰 경우에는 (17) 식을 만족하는 η 값이 존재하지 않을 수도 있으며 이때에는 다른 제어방법을 사용해야 한다.

7. 참고문헌

[1] B.O.D.Anderson, J.B.Moore, *Optimal Control -Linear Quadratic Methods*, Printice-Hall International, Inc 1989

[2] B.R.Bamish , A.R.Galimidi , " Robustness of Luenberger Observers : Linear Systems Stabilized via Nonlinear Control ", Automatica, Vol.22, No.4, 1986

[3] B.S.Chen, T.Y.Dong, " LQG Optimal Control System Design Under Plant Perturbation and Noise Uncertainty : a State-space Approach ", Automatica Vol.25, No.3, 1989

[4] M.Corless, J.Manela, " Control of Discrete - Time Systems", Proceedings of the ACC, 1986

[5] G.H.Golub, C.F.Van Loan, *Matrix Computations* , The Johns Hopkins University Press, 1983

[6] C.V.Hollot, " Stabilizing Uncertain Systems via an Observer ", Proceedings of the ACC, 1986

[7] D.P.Looze et al , " Minimax Control of Linear Stocastic Systems with Noise Uncertainty " , IEEE Trans. on Auto. Control, Vol.AC-28, No.9, Sep.1983

[8] M.E.Magaña, S.H.Zak, " Robust State Feedback Stabilization of Discrete-Time Uncertain Dynamical Systems ", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol.33 , No.9, Sep. 1988

[9] L.S.Shieh, H.M.Dib, S.Ganesan, " Linear Quadratic Regulators with Eigenvalue Placement in a Specified Region", Automatica, Vol.24, No.6, 1988[

[10] R.E.Skelton, *Dynamic Systems Control-Linear systems Analysis and Synthesis*, John Wiley & Son 1988