

비 최소위상 시스템에 대한 LQG/LTR 연구 : 최적 근사화 방법

서 병 설 강 진 식 * 이 준 영

한양대학교 전자통신공학과

A Study on the LQG/LTR for Nonminimum Phase Plant : Optimal Approximation Method

Byung Sul Suh Jin Shig Kang * Jun Young Lee

Dept. of Electronic Communication Eng. Hanyang Univ.

(Abstract)

LQG/LTR method have a theoretical constraint that it cannot applied to nonminimum phase plant. In this paper, we suggest two methods of approximation of minimum phase plant for a given nonminimum phase plant to solve this constraint. Error is discribed by additive form which can reduce its magnitude in broad frequency range. A optimal approximation method was suggesetd by using Hankel operator theory and Nehari theory. It is shown by example that the methods suggested can resolve the frequency domain constraint arised in Stein and Athans approximation.

I. 서론

최근 30여년 동안 제어이론 분야중에 가장 활발히 연구되어온 연구분야로는 Inverse Nyquist, Characteristic Root Locus, LQG, LQG/LTR, H_{∞} 등의 방법이 있다. 본 연구과제인 LQG/LTR (Linear Quadratic Gaussian / Loop Transfer Recovery) 방법은 실제 시스템 설계에 많이 활용되어온 방법인 LQG에서 발전된 것으로 설계상의 장점이 유지되고 구조가 간단하며 설계방법도 간단한 선형 다변수 제어 시스템 설계이론이다.

LQG/LTR 방법은 최소위상 (minimum phase) 플랜트인 경우에 루프 전달회복이 이루어질 수 있어 공칭 (nominal) 안정도및 성능, 그리고 안정도-강인성 및 성능-강인성등 설계상 중요한 속성들을 보장할 수 있으나[1, 3, 4, 6] 비최소위상 (nonminimum phase) 플랜트인 경우에는 루프전달회복이 불가능하여 그 속성들을 만족시킬 수 없다.[6, 7] 이와같은 비최소위상 문제를 해결하기 위한 시도로서 Stein 과 Athans[6]은 비 최소위상 모델에 곱셈형 오차를 가하여 비최소위상 플랜트 모델을 최소위상 모델로 근사화 시키는 방법을 제안하였다. 그러나 이 방법은 근사화 (approximation)로 발생하는 곱셈형 오차 (multiplicative error)가 주파수의 증가와 함께 증가하여 제한된 주파수 영역

(limited frequency range)에서만 효과적으로 이용될 수 있다.

본 논문에서는 Stein 방법보다 좀 더 광역 주파수 영역에서 오차를 줄일 수 있도록 덧셈형 오차 (additive error)를 발생하게 하는 새로운 근사방법을 제시한다. H_{∞} 다변수 설계이론의 주요 이론적 배경이 되고 있는 Hankel 오퍼레이터 등의 관련 이론을 토대로 최적(optimal)인 근사방법을 제안하며 시뮬레이션을 통하여 Stein과 Athans이 제안한 방법보다 비 최소위상 플랜트의 근사화에 잘 적용될 수 있음을 보인다.

II. 본론

이 장에서는 LQG/LTR설계에 있어 문제가 되는 비 최소위상 플랜트의 근사화 방법에 대하여 논의한다. 1절에서는 Stein과 Athans이 제안한 방법과 그 방법이 내포하는 문제점에 대하여 간단히 서술하며 2절과 3절에서는 본 논문에서 제안하는 덧셈형 모델오차를 이용한 근사화 방법에 대하여 논의한다.

2.1. Stein 과 Athans 의 근사방법

Stein 방법은 LQG/LTR의 설계 대상인 플랜트 모델 (plant model)이 비최소위상으로 주어졌을때, 그림 1에서와 같이 이 모델에 일시적으로 곱셈형 오차를 가하여 가능한 최소의 오차를 발생하여 비최소위상 플랜트 모델을 최소위상 모델로 근사화 시키는 방법이다.

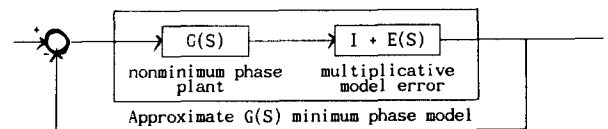


그림 1 곱셈형 오차를 갖는 플랜트
Fig 1 Plant with multiplicative error

플랜트 전달함수를 최소위상 전달함수와 전대역통과 인수의 곱으로 표현하면 식 (1)로 된다.

$$G(S) = G_m(S) B_z(S) \quad (1)$$

여기서 $G(S)$ 는 비최소위상 플랜트 전달함수, $G_m(S)$ 는 최소위상 플랜트 전달함수를 나타낸다. 그리고 $B_z(S) = \prod(S-z_i) / \prod(S+z_i)$ 를 의미하며 $z_i (i=1, 2, \dots, r)$ 는 우 평면 영점들로 다항식이 성립한다.

$$B_z(S) B_z(S)^H = I \quad (2)$$

식 (2)에서의 췌첨자 H 는 복소 췌이행렬(complex conjugate transpose)을 나타낸다. 전대역 통과 인수의 크기는 1이므로 식 (1)은 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$G(S) = G_m(S) B_z(S) \approx G_m(S) \quad (3)$$

이 근사과정에서 발생하는 오차는 다음과 같은 곱셈형 오차(multiplicative error)로 표현할 수 있다.

$$G(S) = G_m(S) [I + E(S)] \quad (4)$$

식(3)에 의한 근사화로 발생하는 곱셈형 오차는 식(4)에서 $[I + E(S)]$ 부분이 된다. 예를 들어, $S = +z$ 인 영점에 대해서, $G(S)$ 와 $E(S)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$G(S) = G_m(S) \frac{S - z}{S + z} \quad (5)$$

$$E(S) = \frac{-2z}{S + z} \quad (6)$$

주파수 영역에서의 오차함수식 (6)에서 오차함수 $E(S)$ 의 크기는 우평면 영점의 위치에 의존하게 되어 제한된 주파수(frequency) 영역에서만 사용될 수 있는 제한성을 갖는다. 또한 이 근사화 방법은 우평면 영점이 곱셈형 오차에 그대로 포함되어 LQG/LTR을 설계하는데 있어서 이득과 페루우프 극점의 trade-off현상을 가져온다.

2.2. 새로운 근사방법

1 절에서 Stein 과 Athans 의 근사방법은 근사화로 발생하는 오차때문에 제한된 주파수 영역에서만 사용될 수 있음을 보였다. 본 논문에서는 Stein 과 Athans 의 방법과 유사하게 개루프 비최소위상 플랜트 모델이 설계대상으로 주어졌을때, 광역 주파수 영역에서도 가능한 최소의 오차가 발생하도록 그림 2와 같은 구조를 갖는 덧셈형 오차 (additive error)를 추가하여 비최소위상 플랜트 모델을 최소위상 모델로 근사화 시키는 방법에 대하여 논의한다.

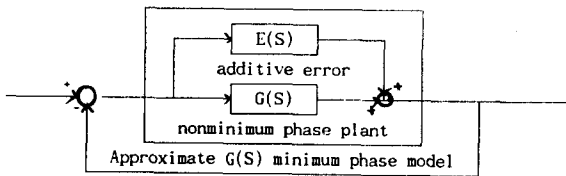


그림 2 덧셈형 오차를 갖는 플랜트
Fig. 2 Plant with additive error

그림 2에서 비최소위상 플랜트와 오차는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$G(S) + E(S) = \underline{G}(S) \quad (7)$$

여기서 $G(S)$ 는 비최소위상 플랜트 전달함수, $\underline{G}(S)$ 는 근사화된 비최소위상 플랜트 전달함수이고 $E(S)$ 는 주파수 영역에서의 오차함수이다. 근사화는 오차함수 $E(S)$ 의 크기를 전 주파수 영역에서 가능한 한 작음 값이 되도록 하며 주파수 특성에 맞는 비최소위상 플랜트를 선정하려면 다음과 같은 방법으로 수행된다.

1단계 : 오차함수 $E(S)$ 를 다음과 같은 형태로 가정한다.

$$E(S) = \frac{S(b_n - 2S^{n-2} + b_{n-2}S^{n-3} + \dots + b_1S + b_0)}{a_nS^n + a_{n-1}S^{n-1} + \dots + a_1S + a_0} \quad (8)$$

$n=1, 2,$

여기서 $E(S)$ 의 차수(order)는 설계대상으로 주어진 플랜트 전달함수의 차수에 의해 결정된다.

2단계 : 비최소위상 모델 $\underline{G}(S)$ 의 결정은 분자는 비최소위상 영점을 가능한 한 큰 값으로 선정하고, 분모는 계산상 편리를 위해 $G(S)$ 와 $E(S)$ 의 공통분모를 취한다. 단 $G(S)$ 와 $E(S)$ 의 공통분모를 취하여 차수 (order)가 크게 증가하면 설계상 어려움이 따르므로 차수의 증가를 가져오지 않는 방향으로 $\underline{G}(S)$ 의 분모가 결정되어야 한다. 그리고 $\underline{G}(S)$ 의 비최소위상 영점은 $G(S)$ 와 $E(S)$ 의 공통분모를 취하여 만들어지는 함수에 대하여 분자의 차수로 결정된다.

3단계 : 2단계에 이어 $G(S)$ 가 결정되면, 오차함수 $E(S)$ 의 미지계수 (unknown coefficient)들은 식 (7)에 의해 결정된다.

이 방법은 오차함수 $E(S)$ 를 식 (8)로서 취함에 의해 $E(S)$ 의 크기는 저주파 영역이나 고주파 영역에서는 무시할 정도로 작아질 수 있다. 그리고 중간 주파수 영역 (mid-frequency range)에서는 $\underline{G}(S)$ 의 비최소위상 영점을 적합하게 선정하여 $E(S)$ 의 크기를 조정될 수 있는 융통성을 갖고 있어 본 논문에서 제시한 새로운 방법은 Stein 과 Athans 의 방법에 비교할 때 넓은 주파수 영역에서 오차의 크기를 줄일 수 있다.

2.3. 최적 $\underline{G}(S)$ 의 선정

설계대상으로 주어진 비최소위상 플랜트 전달함수에 가능한 광범위한 주파수 영역에서 오차를 줄일 수 있도록 덧셈형 오차를 가하여 비최소위상 플랜트 전달함수를 비최소위상 플랜트 전달함수로 근사화 시킬 수 있는 방법이 제시 되었다. 이 근사화 방법은 Stein방법보다는 보다 광범위한 영역에서 오차를 줄일 수 있지만 비최소위상 플랜트 전달함수 $\underline{G}(S)$ 의 분자부분인 비최소위상 영점의 선정이 임의적이고 $E(S)$ 와 $\underline{G}(S)$ 의 공통분모를 분모로 결정하는 것은 차수가 증가하는 요인이 된다.

이 절에서는 $\underline{G}(S)$ 의 선정이 너무 임의성을 띠고 있는 문제점을 개선시키기 위해서 ∞ 다변수 선형 시스템 설계이론에 기초를 이루는 Hankel 오퍼레이터 이론과 Nehari 이론 등을 이용하여 최적인 $\underline{G}(S)$ 를 구하는 방법에 대하여 서술한다.

설계대상인 비최소위상 플랜트 전달함수 $G(S)$ 를 내부인수 (inner factor)와 외부인수(outer factor)로 다음과 같이 분해 (factorization)된다. [7, 8, 9, 10]

$$G(S) = G_i(S) G_o(S) \quad (9)$$

여기서 $G_i(S)$ 는 내부함수로 $G_i^{-1}(S) G_i(S) = I$ 를 만족하고 우평면 영점을 갖으며 $G_o(S)$ 는 외부함수로 우평면 영점을 갖지 않는 함수이다. 최적 근사화 문제는 비최소위상 플랜트 전달함수 $G(S)$ 와 최소위상 플랜트 전달함수 $\underline{G}(S)$ 와의 오차 $E(S)$ 가 최소로 되도록 $\underline{G}(S)$ 를 결정하는 것으로 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\inf \| \underline{G}(S) - G(S) \| \quad (10)$$

식 (9)를 식 (10)에 대입하면 다음과 같다.

$$\inf \| G_i(S)[G_i^{-1}(S)\underline{G}(S) - G_o(S)] \| \quad (11)$$

식 (11)에서 $G_o(S)$ 는 외부함수로 최소위상 영점과 안정된 극점을 갖으며, $G_i^{-1}(S)\underline{G}(S)$ 는 내부인수의 역과 외부인수와의 곱으로 비최소위상 영점인 불안정 극점을 포함하여 안정된 극점을 갖는 $G_o(S)$ 와 불안정 극점을 갖는 $G_i^{-1}(S)\underline{G}(S)$ 와의 가장 가까운 거리(distance)를 구하는 Nehari문제로 귀착된다.

Nehari 이론[1]은 L_{∞} 공간에 속한 행렬함수 R 이 주어졌을 때 R 에 가장 가까운 거리에 있는 H_{∞} 공간에 속한 행렬함수 X 가 존재하며 그 최소거리는 $\|R-X\| = \|\Gamma_R\|$ 관계에 있다는 것이다. 여기서 $\|\Gamma_R\|$ 는 R 함수의 Hankel 오퍼레이터의 노름(norm)으로, L_{∞} 행렬함수 R 로부터 임의의 H_{∞} 행렬까지의 거리를 나타낸다. 따라서 근사화 문제는 식 (12)를 최소로 하는 H_{∞} 행렬 X 를 구하는 문제로 된다.

$$\text{dist}(R, H_{\infty}) = \inf\{ \|R-X\| : X \in H_{\infty} \} \quad (12)$$

여기서 R 은 실계수(real rational) 함수로 strictly proper 하며 $\text{Re } S \leq 0$ 에서 해석적(analytic)이다. 그리고 X 는 실계수(real rational) 함수로 proper 하고 $\text{Re } S \geq 0$ 에서 해석적인 함수이다. 설계대상으로 주어진 비최소위상 전달함수를 내부함수(inner function)와 외부함수(outer function)로 분해하고 근사화 오차를

$$E(S) := \underline{G}(S) - G(S) \quad (13)$$

로 정의하고 미지인 무계함수를 $W_1(S)$ 라하면 오차식 (13)은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} E_1(S) &:= W_1(S) E(S) \\ &= W_1(S) [\underline{G}(S) - G_i(S)G_o(S)] \end{aligned} \quad (14)$$

$$= G_i(S) [G_i^{-1}(S)W_1(S)\underline{G}(S) - W_1(S)G_o(S)] \quad (15)$$

$$= G_i(S) [G_i^{-1}(S)W_2(S) - W_1(S)G_o(S)] \quad (16)$$

여기서 $W_2(S)$ 는 $\underline{G}(S)$ 와 $G(S)$ 의 주파수 영역 특성을 고려하여 선택한 무계행렬이다. 식(16)에 ∞ 노름을 취하면

$$\begin{aligned} \|E_1(S)\|_{\infty} &= \|G_i(S) [W_2(S) - W_1(S)G_o(S)]\|_{\infty} \\ &= \| [G_i^{-1}(S)W_2(S) - W_1(S)G_o(S)] \| \end{aligned} \quad (17)$$

이 되어 Nehari 문제로 전환된다. 그리고 $G_i^{-1}(S)W_2(S)$ 를 안정인 부분과 비 안정인 부분으로 나누면 비 안정인 부분은 상태공간으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

근사오차의 하한(lower bound)인 Hankel 연산자 Γ_R 의 ∞ 노름을 구하기 위한 제어 그래미언(controllability gramian) L_c 과 관측그래미언(observability gramian) L_o 는 다음의 Lyapunov 방정

식의 해로 구하여진다.

$$AL_c + L_cA^T + BB^T = 0$$

$$A^T L_o + L_o A + C^T C = 0 \quad (19)$$

$\Gamma_R^* \Gamma_R$ 와 $L_c L_o$ 는 같은 고유값(>0)을 갖으므로 λ 를 $\lambda := [\lambda \max(L_c L_o)]^{1/2}$, ω 를 λ 에 대응하는 고유벡터라고 하면 근사화 오차의 하한은 $\|\Gamma_R\|_{\infty} = \lambda$ 가 된다. $f(S)$ 와 $g(S)$ 를 식 (20)으로 정의하면

$$f(S) := \begin{bmatrix} A & \omega_0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad g(S) := \begin{bmatrix} -A^T & L_{o0}/\lambda \max^{1/2} \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

비 안정인 $G_i^{-1}(S)W_2(S)$ 에서 최소거리에 있는 안정인 전달함수 $W_1(S)G_o(S)$ 는 다음과 같다.

$$W_1(S)G_o(S) = W_2(S) - \lambda f(S)/g(S) \quad (21)$$

따라서 미지 전달함수 행렬 $W_1(S) = [W_2(S) - \lambda f(S)/g(S)]G_o^{-1}(S)$ 로 구하여지며 최적 근사모델 $\underline{G}(S)$ 와 오차함수 $E(S)$ 는 각각 다음식으로 된다.

$$\underline{G}(S) = W_1^{-1}(S)W_2(S) \quad (22)$$

$$E(S) = \underline{G}(S) - G(S) \quad (23)$$

위의 근사화에서 $f(S)/g(S)$ 는 $W_2(S)$ 와 같은 극-영점 구조를 갖으며 $\underline{G}(S)$ 는 식 (23)을 구하는 과정에서 우평면의 극-영점이 서로 상쇄(cancel)되어 최소위상이 된다. 또한 LQG/LTR을 적용하는 과정에도 식 (22)의 $\underline{G}(S)$ 가 최소위상이 되므로 되어 Stein과 Athans의 방법에서 문제점이던 이득과 페루프 극점에서의 trade-off현상과 주파수 영역의 제약을 개선함을 알 수 있다.

III. 시뮬레이션

본 논문에서 제시한 새로운 근사방법의 타당성을 입증하기 위한 시뮬레이션 예제 모델로 다음과 같은 단일 입력력 비최소 위상 플랜트를 고려 하였다.

$$G(S) = \frac{(S-1)(S-5)}{S(S+2)^2}$$

주어진 플랜트는 1과 5에 우 평면 영점을 갖으며 원점과 -2에 극점을 갖는다. 본 논문의 2.2절에서 제안한 근사 방법을 적용하기 위한 비최소위상 영점으로는 비최소위상 영점의 상(image)인 1과 5, 극점인 2로 선택 하면 근사화를 위한 비최소위상 플랜트는 표 1과 같다.

표 1 근사화를 위한 비최소위상 플랜트
Table 1 Minimum phase plant for approximation

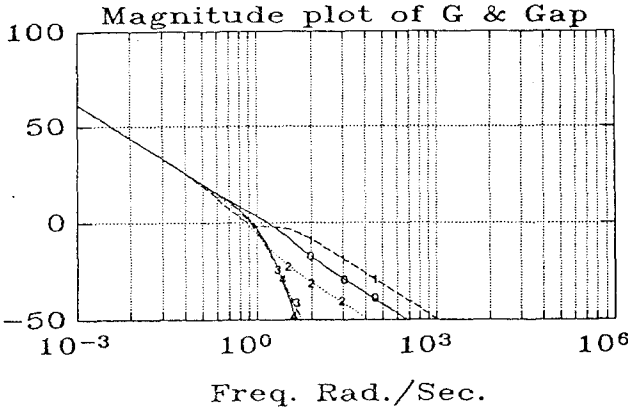
$(S+1)^5$	$\frac{S^5 + 5S^4 + 10S^3 + 10S^2 + 5S + 1}{0.3025S^6 + 2.375S^5 + 7.096S^4 + 9.801S^3 + 5.76S^2 + 0.8S}$
$(S+2)^5$	$\frac{S^5 + 10S^4 + 40S^3 + 80S^2 + 80S + 32}{4.325S^6 + 36.16S^5 + 116.48S^4 + 176.64S^3 + 120.32S^2 + 25.6S}$
$(S+5)^5$	$\frac{S^5 + 25S^4 + 250S^3 + 1250S^2 + 3125S + 3125}{196.595S^6 + 1713.7S^5 + 5870.7S^4 + 9834.3S^3 + 8000S^2 + 2500S}$

식 (7)을 이용하여 구한 오차함수들을 표 2에 나타내었다.

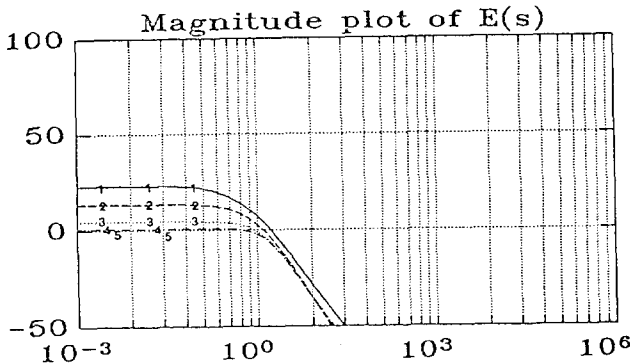
표 2 오차함수 E(S)
Table 2 Error function

$(S+1)^5$	$6.981S + 2.858$
	$0.30195S^3 + 1.162S^2 + 1.24S + .2$
$(S+2)^5$	$-3.32S + 30.32$
	$4.32S^3 + 18.88S^2 + 23.68S + 6.4$
$(S+5)^5$	$-195.59S + 1059.6$
	$196.59S^3 + 927.33S^2 + 1375S + 625$

그림 3과 4에 근사화된 플랜트 G(S)와 E(S)에 대한 Bode선도를 보였다.



(0:G(S), 1:(S+1)⁵, 2:(S+2)⁵, 3:(S+5)⁵)
그림 3. 근사화된 플랜트 G(S)의 Bode선도
Fig 3. Approximated plant Bode plot



(0:G(S), 1:(S+1)⁵, 2:(S+2)⁵, 3:(S+5)⁵)
그림 4. 근사화 오차 E(S)의 Bode 선도
Fig. 4 Approximation error Bode Plot

그림 3과 4에서 보여주는 바와 같이 근사화를 위한 최소위상 영점음 -1로 선택할 경우 주어진 비 최소위상 플랜트의 Bode선도가 가장 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 근사화된 모델의 차수가 증가하여 설계상의 어려움이 따른다.

최적 근사화를 위하여 무게함수들과 각 무게함수들에 대한 근사화 플랜트 및 오차함수들을 표 3에 나타내었다.

표 3. 무게함수에 따른 최적근사 플랜트 및 오차함수
Table 3. Optimal approximation plant and error function for each 무게 function

무게함수	오차함수 E(S)	최적 근사 플랜트 G(S)
S+1	$-0.669S^2 + 12.597S + 1.2664$	$S^2 + 19.931S + 18.931$
10S+1	$0.3310S^2 + 6.5974S + 6.2664$	$S(3.021S^2 + 12.084S + 12.084)$
S+10	$-0.928S^2 + 7.4367S - 3.6354$	$S^2 + 17.961S + 79.614$
10S+1	$0.0721S^2 + 1.4367S + 1.3646$	$S(13.87S^2 + 55.492S + 55.492)$
100(S+1)	$-0.2792S^2 + 20.367S + 8.6458$	$S^2 + 8.9614S + 7.9614$
10S+1	$0.7208S^2 + 14.367S + 13.6458$	$S(1.387S^2 + 5.5492S + 5.5492)$

표에서 보여지는 것같이 최적 근사화로 구한 플랜트의 차수는 주어진 비 최소위상 플랜트의 차수와 같으며 극점의 위치가 동일한 것을 알 수 있다. 그림 5와 6은 무게함수들과 플랜트 및 근사 플랜트들에 대한 Bode선도를 보였으며 그림 7은 오차 함수들에 대한 Bode선도이다.

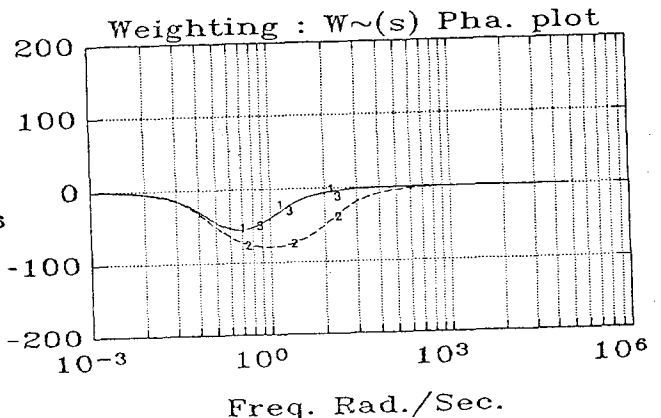
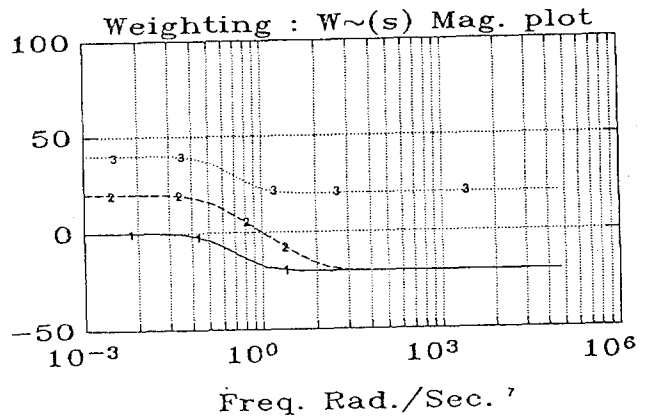


그림 5. 무게함수의 Bode 선도
Fig 5. Weighting function Bode plot
(1:W₁(S), 2:W₂(S), 3:W₃(S))

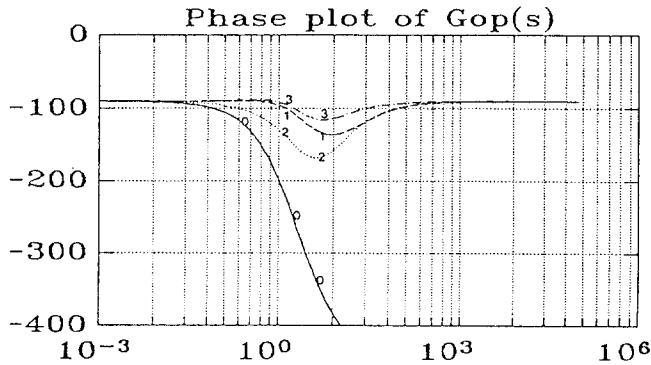
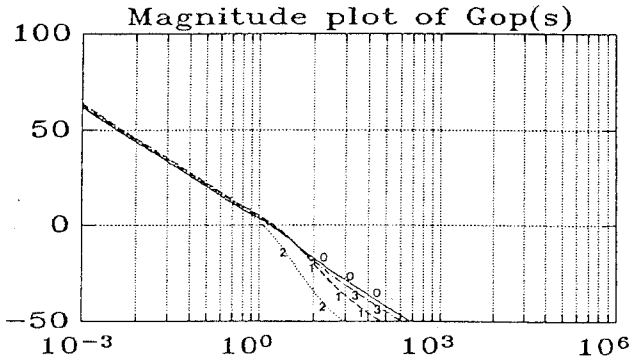


그림 6. 플랜트와 근사화 플랜트의 Bode 선도
Fig. 6. Plant and approximated plant Bode
(0: $G(S)$, 1: $W_1(S)$ plot 2: $W_2(S)$, 3: $W_3(S)$)

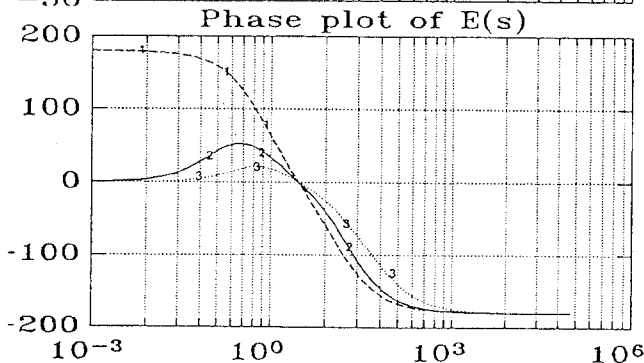
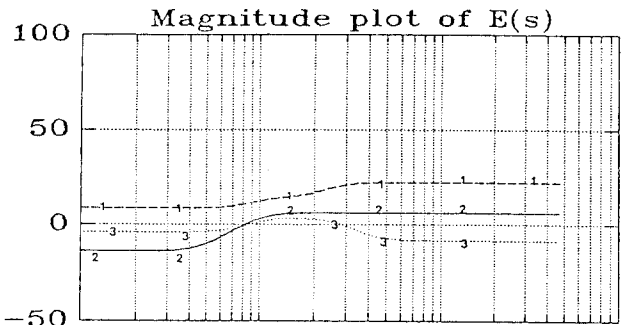


그림 7. 오차함수의 Bode 선도
Fig. 7. Error function Bode plot
(1: $W_1(S)$, 2: $W_2(S)$, 3: $W_3(S)$)

그림 6.a에 보여지는 바와 같이 무게함수의 선정에 따라 광대역에서 비최소위상 플랜트를 최소위상인 플랜트로 근사화 시킬수 있음을 알 수 있다. 그리고 주어진 플랜트와 동일한 차수의 근사화된 모델을 구할 수 있어 설계상의 복잡성을 피할 수 있게된다. Stein과 Athan의 근사화 방법에서 크기는 주어진 플랜트와 정확히 일치하지만 곱셈형의 오차에 비최소위상 영점구조를 그대로 갖게되어 LQG/LTR을 적용할 수 없다. 그러나 본 논문에서 제안한 방법은 오차함수에 비최소위상 영점을 포함하더라도 근사화된 플랜트는 최소위상으로 되어 LQG/LTR을 적용할 수 있다.

IV. 결론

다변수 시스템을 위한 설계이론인 LQG/LTR 방법은 LQG 방법에서 결여된 강인성 (robustness)을 보완하기 위해서 제안되었다. 그러나 비최소위상 플랜트가 설계대상으로 주어졌을때, LQG/LTR 혹은 MBC 보상기로 구성된 피드백 시스템의 루프전달함수 (loop transfer function)가 칼만필터루프로 간주되는 목표필터루프 (target feedback loop)로 루프전달회복을 이룰 수 없어 목표필터루프가 보장할 수 있는 설계상 중요한 고려 사항인 공칭안정도 (nominal stability), 안정도-강인성 (stability-robustness), 성능-강인성 (performance-robustness) 등을 잃게 된다. 본 논문에서는 이러한 이론적 제한성을 해결하기 위한 방안으로서 비최소위상 플랜트 모델을 최소위상 플랜트 모델로 근사화하는 방법을 제시하였다. 이 근사화 방법은 플랜트가 최소위상으로 근사화되어 모델링되기 때문에 목표필터루프로 루프전달회복이 이루어져 LQG/LTR 방법이 보장하고 있는 공칭안정도, 안정도-강인성, 성능-강인성 및 LQG/LTR 방법의 조직적이고 용이한 설계절차가 그대로 유지될 수 있다. 그리고 제시된 새로운 근사방법은 덧셈형 오차 (additive error) 형태를 취하여 오차함수 $E(S)$ 가 주파수가 감소하거나 증가함에 따라 계속 감소될 수 있는 구조를 갖으며 적당한 계수조정에 따라 그 크기가 증감될 수 있었다. 이 오차함수의 계수 결정은 최소위상 플랜트 전달함수 $G(S)$ 를 선정함에 따라 자동적으로 결정된다.

근사화 오차를 작게하는 최소위상 모델 $G(S)$ 를 결정하기 위해 설정하여야 하는 최소위상 영점은 앞에서 언급한 바와 같이 수 없는 시행착오 (trial and error)에 의해 가능하다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 H_{∞} 다변수 선형 시스템 설계이론에 기초를 이루는 Hankel 오퍼레이터 이론과 Nehari 이론 등을 이용하여 최적적인 $G(S)$ 를 구하는 방법을 제안하였다. 시뮬레이션에서 보인바와 같이 2.2절에서 제안한 방법에서 문제점이던 차수의 증가와 $G(S)$ 의 선정이 임의적이었던 점에 대하여 2.3절에서 제안된 최적 근사화는 주어진 플랜트와 동일한 차수인 근사모델을 구함으로써 Stein과 Athans이 제안한 근사 알고리즘보다 제어기 설계에 잘 적용될 수 있음을 보였다.

V. 참고문헌

- [1]. Anderson, B.D.O., and Moore, J.B., 'Linear Optimal Control', Printice-Hall, 1971.
- [2]. Kwakernaak, H., and Sivan, P., 'Linear Optimal Control Theory', Wiley- Interscience, 1972
- [3]. J.C. Doyle, "Guaranteed Margins for LQG regulator", IEEE Trans. on Auto. Contr. Vol.AC-23, Aug., 1978
- [4]. J.C. Doyle and G. Stein, "Robustness with Observers," IEEE Trans. Auto. Contr. Vol.AC-24, 1979
- [5]. J.C. Doyle and G. Stein, "Multivariable Feedback Design : Concept for Classical Mordern Synthesis," IEEE Trans. Auto. Contr., Vol.AC-26, 1981
- [6]. M. Athans and G. Stein, " The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design," IEEE Trans. Auto. Contr., Vol.AC-32, No.2, Feb. ,1987
- [7]. J.B. Moore and T.T. Tay, " Loop Recovery via H_{∞}/H^2 Sensitivity Recovery ", Int. J. of Contr. Vol-3, 1989
- [8]. B.A. Francis, 'A Course on H_{∞} Control Theory : Lecture Notes in Control and Information Sciences', Berlin : Springer-verlag, 1987
- [9]. J.C. Doyle, 'Lecture Notes. Advances in Multivariable Control. ONR/Honeywell Workshop, Mineapolis', 1984
- [10]. Vidyasager, M., 'Control System Synthesis : A Factorization Approach ', MIT Press, 1985
- [11]. M.G. Safanov and M. Athans, " Gain and Phase Margins of Multiloop LQG regulators," IEEE Trans. Auto. Contr., vor. AC-22, 1977