

일차 dynamic 을 갖는 계통에 대한 가변구조 제어기의 설계

박귀태, 최중경, 강윤관
고려대학교 공과대학 전기공학과

The design of variable structure controller for the systems having the first order dynamic

Gwi-Tae Park, Jung-Keyng Choi, Yoon-Kwan Kang
Dept. of Electrical Eng. Korea Univ.

ABSTRACT

This paper will describe the application for variable structure control theory to the first order dynamic system and verify it's robustness.

The study on the first order dynamic system control which has been essential part for the control of servo motor (AC, DC) systems has been excluded in the study of variable structure control system(VSCS) because this first order system was not applicable to the previous variable structure control theory. So, for the robustness control of first order dynamic system with variable structure control theory, we propose modified switching function synthesis which guarantees the advantages of conventional VSCS and removes reaching phase which regards as shortcomings in VSCS. And we demonstrate the practical potential of implementation about this theory by simulation results of AC motor variable speed control.

1. 서론

가변구조제어는 슬라이딩모드라는 독특한 동특성으로 인해 얻어지는 제어 효과로 인해 1960년 이후 부터 그 이론 및 적용에 있어 꾸준한 연구가 계속되었다. 초기의 이론적 연구는 오차신호 또는 그 값의 미분치가 피드백 되는 2차 선형계통에 대한 연구가 대부분이었다. 그러나 그후 선형 단일입력계통에 대한 모든 차수에 대해 이론이 확장됨과 더불어 70년대 이후부터 그 연구폭이 더 넓어져 다변수 계통에 대한 연구가 진행되었다. 또한 필연적으로 이 기간 동안에는 슬라이딩 모드를 갖는 VSCS(variable structure control system)의 설계원리 뿐만 아니라 이것들을 연구하기 위한 수학적 수단이 다시 새로이 고안되어야 했으며 실제 실현을 위해 최근의 제어이론 및 필터링 이론의 도움을 크게 받아야 했다.

실제적 적용에 있어서는 로보트 제어 및 DC 와 AC 서보계 제어에 대한 적용 연구가 활발하며 특히 최근에 있어서는 가변 속도 제어 영역에 있어 슬라이딩 모드 제어 기법을 이용하는 것이 큰 흥미를 끌고있다. 이것은 이 제어 방법이 매우 정확하고 파라미터 변동 및 부하에 대해 둔감한 특성을 갖고있기 때문이다. 하지만 이러한 장점을 갖고 있는 가변구조 제어를 일차의 dynamic을 갖고 있는 모터의 속도제어 및 그 밖의 일차 계통에 응용하기 위해서는 VSCS 연구에서 그 동안 배제되었던 일차 계통에 대한 이론의 적합성과 가능성을 검토해 보아야 한다.

가변구조 제어의 장점들이 상태공간상에서 표현되는 스위칭 평면을 따라 원점으로 수렴하는 동차 특성을 나타내는 슬라이딩 모드의 실현에 의해 얻어지기 때문에 상태가 하나 뿐인 일차 계통에 있어 그 하나의 상태로 스위칭 평면을 구성하게되면 슬라이딩 모드의 발생을 확신할 수 없게되어 가변구조제어의 목적을 달성하기가 어렵다. 그러므로 본 논문에서는 가변구조의 기본이론 설명 후 기존의 가변구조 제어이론을 일차 계통에 적용한 결과를 서술하고 이의 문제점을 보완하는 수정된 알고리즘을 제시하는 방향으로 하겠다. 그리고 이 제시된 이론을 AC 모터 속도제어에 응용한 결과와 PI 제어 결과를 비교 분석하여 그 이론의 유효성을 보이겠다.

2. 기본이론

가변구조 제어이론은 상태공간상에서 어떤 특정한 슬라이딩 초평면을 정하고 이에 대한 상태벡터의 위치에 따라 상태벡터를 이 초평면으로 향하도록 하는 불연속적인 입력을 가해줌으로써 상태벡터가 빠른 속도로 이 슬라이딩 초평면을 따라 원점으로 수렴케 하는 슬라이딩모드를 발생시켜 여러가지 좋은 특성을 얻는 것이다. [1] 이 이론을 다음의 단일입력 계통에 대해 적용해 보자.

$$\dot{X} = A X + b U \quad (1)$$

$$U = -(K^t + \Delta K^t) X \quad (2)$$

여기서 $X(\in R^{n \times 1})$ 는 상태벡터이고, $A(\in R^{n \times n})$ 및 $b(\in R^{n \times 1})$ 는 계통행렬이며 $U(\in R)$ 는 제어입력으로 고정이득 $K^t(\in R^{1 \times n})$ 와 가변이득 $\Delta K^t(\in R^{1 \times n})$ 를 갖는다. 이때 스위칭평면은 다음과 같이 정의 된다.

$$S = C^t X = \sum_{i=1}^n C_i X_i \quad (3)$$

그리고 $S>0$, $S<0$ 인 영역 모두에서 상태벡터가 스위칭평면에 hitting 하게 하여 슬라이딩 모드라는 동특성을 발생시키는 조건으로 다음과 같은 슬라이딩 조건이 있다.

$$S \dot{S} < 0 \quad (4)$$

(1), (2), (3)식과 (4)식에 의해 슬라이딩 조건을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$S \dot{S} = C^t [A X - b (K + \Delta K)^t X] S < 0 \quad (5)$$

그리고 이 조건을 만족하기 위한 이득성분들은 다음의 (6)식에 의해 표현되어진다.

$$K^t = (C^t b)^{-1} C^t A$$

$$\Delta K_i^t = \begin{cases} \alpha_i > 0 \text{ 만약 } S X_i > 0 \text{ 이고 } C^t b > 0 \\ \text{또는 } S X_i < 0 \text{ 이고 } C^t b < 0 \text{ 이면} \\ \beta_i < 0 \text{ 만약 } S X_i < 0 \text{ 이고 } C^t b > 0 \\ \text{또는 } S X_i > 0 \text{ 이고 } C^t b < 0 \text{ 이면} \end{cases}$$

(6)

$$(\alpha_i, \beta_i : \text{constant})$$

그러므로 우리는 상태공간에서 $S(x)=0$ 이라는 초평면을 설정하고 상태벡터가 이 초평면을 향하게 하는 조건인 $S(x) \dot{S}(x) < 0$ 을 $S < 0, S > 0$ 인 부분 모두에서 만족시켜 주게 하기 위해 상태벡터가 이 초평면을 가로지를 때 마다 계통의 구조를 바꾸어주어 그림 2.1 과 같은 궤적을 얻게 되었다. $S(x)$ 는 상태 공간상의 초평면으로 상태공간의 원점을 지나며 그 C^t 값들은 다음과 같이 계통의 상태들이 이상적인 슬라이딩 모드에 있을 때의 페루프 특성 방정식이 안정하도록 선택한다.

$$\dot{X} = [A - b (C^t b)^{-1} C^t A] X \quad (7)$$

위의 슬라이딩 모드에 상태벡터들이 들어가게 되면 궁극적으로 계통의 운동을 (7)식이 지배하게 되므로 계통의 차수가 하나 줄어 들면서 파라미터 및 외란에 둔감한 가변구조제어 고유의 특성을 얻을 수 있다[2].

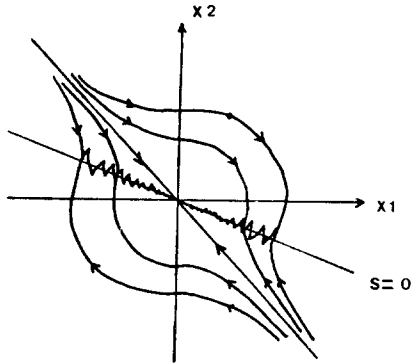


그림 2.1 2 차 가변구조계의 슬라이딩 모드
Fig. 2.1 The sliding mode of 2-nd order variable structure control system

3. 일차 계통에 대한 가변구조 제어 알고리즘의 적용

먼저 다음과 같은 일차 계통을 정의 한다.

$$\dot{X}_1 = a_1 X_1 + b U + f \quad (8)$$

$X_1 (\in \mathbb{R}^1)$ 은 상태변수 이며 $a_1 (\in \mathbb{R}^1)$ 및 $b (\in \mathbb{R}^1)$ 는 계통의 파라미터들 이고 f 는 외란으로 다음과 같은 변동의 한계치를 갖는다고 가정한다.

$$\begin{aligned} a_{1\min} < a_1 < a_{1\max} \\ b_{\min} < b < b_{\max} \\ f_{\min} < f < f_{\max} \end{aligned}$$

입력 $U (U \in \mathbb{R}^1)$ 는 가변 입력으로 다음과 같이 구성되어 진다.

$$U = \Delta K_1 X_1 + \Delta K_f \quad (9)$$

ΔK_1 은 상태 X_1 에 대한 가변이득이며 ΔK_f 는 외란 보상을 위한 가변치이다.

3.1 기존의 스위칭평면을 이용한 가변구조제어

위의 일차 계통에 대해 기존의 스위칭 평면을 설계하면 (10) 과 같고 그 슬라이딩 모드 조건과 이 조건을 만족하게되는 제어이득은 다음과 같이 구해진다.

$$S = C_1 X_1 \quad (10)$$

$$S \dot{S} < 0 \quad (11)$$

$$S = C_1 a_1 X_1 + C_1 b U + C_1 f \quad (12)$$

$$S \dot{S} = (C_1 a_1 + C_1 b \Delta K_1) X_1 S + (C_1 f + C_1 b \Delta K_f) S \quad (13)$$

$$\Delta K_1 = \begin{cases} \Delta K_1^+ < \min[-a_1/b] & \text{if } S X_1 > 0 \\ \Delta K_1^- > \max[-a_1/b] & \text{if } S X_1 < 0 \end{cases}$$

$$\Delta K_f = \begin{cases} \Delta K_f^+ < \min[-f/b] & \text{if } S > 0 \\ \Delta K_f^- > \max[-f/b] & \text{if } S < 0 \end{cases} \quad (14)$$

위의 이득성분을 갖는 제어 입력을 계통에 가해주면 슬라이딩 조건을 만족시켜 주게되어 $S=0$ 인 스위칭 평면 근방에서 계속적인 채터링 현상을 계속 일으키면서 이탈하지 않는 특성을 얻을 수 있다. 하지만 이 스위칭 평면 자체가 하나의 평형점으로 가변제어 입력에 의해서 그 점 주위에서 채터링을 발생하며 왔다 갔다 하는 섭동 운동을 일으킬 수는 있지 상태 X_1 값을 점차적으로 줄여들게 하는 근본적인 슬라이딩 모드를 발생시킬 수는 없다. 만약 파라미터 변동이나 외란이 없는 계통이라면 그 가변이득 값을 시간에 따라 nominal 값으로 가계 해준다면 X_1 상태의 점근적인 수렴을 이끌어 낼 수는 있다. 그러나 제어중에 발생하는 파라미터 변동과 외란에는 그 견실성을 발휘할 수 없으므로 기존의 가변구조 제어 알고리즘으로는 VSCS 고유의 장점들을 얻을 수 없는 것이다.

그러므로 이 다음절에서는 기존의 스위칭평면에 의한 문제점을 보완하여 일차 계통에 대해서도 견실성을 보장할 수 있는 수정된 스위칭평면에 의한 가변구조 제어 알고리즘에 대해 서술 하겠다.

3.2 새로운 스위칭평면을 이용한 가변구조 제어 알고리즘

식 (8)과 같은 일차 계통의 제어를 위해 우리는 다음과 같은 적분치를 갖는 수정된 스위칭 평면을 제안한다.

$$S = X_1 + C_1 \int X_1 = 0 \quad (15)$$

이 스위칭 평면에 대한 슬라이딩 모드 조건식을 만족하는 제어 입력을 구성하기 위해서는 다음 (16)식과 같은 Lyapunov 함수를 정의하고 이의 일차 미분값이 negative definite 가 되도록 하는 (17)식과 같은 슬라이딩조건이 만족되도록 입력 이득성분을 구해야 한다.

$$V = 1/2 (S^2) \quad (16)$$

$$\dot{V} = S \dot{S} < 0 \quad (17)$$

이를 위해 다음 (18), (19)식과 같은 전개과정이 필요로 하며 최종적으로 (17)식을 만족하는 가변입력 이득성분이 (20)식과 같이 결정된다.

$$S = a_1 X_1 + b U + f + C_1 X_1 \quad (18)$$

$$S \dot{S} = (a_1 + C_1 + b \Delta K_f) X_1 S + (f + b \Delta K_f) S \quad (19)$$

$$\Delta K_f = \begin{cases} \Delta K_f^+ < \min[-(a_1+C_1)/b] & \text{when } S X_1 > 0 \\ \Delta K_f^- > \max[-(a_1+C_1)/b] & \text{when } S X_1 < 0 \end{cases}$$

$$\Delta K_f = \begin{cases} \Delta K_f^+ < \min[-f/b] & \text{when } S > 0 \\ \Delta K_f^- > \max[-f/b] & \text{when } S < 0 \end{cases} \quad (20)$$

그리고 위의 가변 이득성분으로 구성되는 제어입력에 의해 발생하는 슬라이딩 모드의 안정성을 결정하는 스위칭 평면 계수 C_1 을 설정하기 위해서는 슬라이딩 모드의 특성방정식을 구해야한다. 이를 위해서는 실제 인가되는 가변 제어입력의 평균치를 취한 등가 제어입력을 이용하여야 한다. 그 입력은 다음과 같이 표현된다.

$$U_{eq} = -(1/b) [(a_1 + C_1) X_1 + f] \quad (21)$$

이 등가입력에 의한 페루프 방정식이 다음과 같은 이상적인 슬라이딩모드 특성방정식이 된다.

$$X_1 = -C_1 X_1 \quad (22)$$

여기서 (22)식은 슬라이딩 모드를 나타내는 동특성으로 $S=0$ 이 만족될 때의 스위칭 평면 S 의 미분치와 같고 우리가 C_1 값을 양수로 선택하면 상태 X_1 이 평형점으로 수렴함을 알 수 있다.

$$S = X_1 + C_1 X_1 = 0 \quad (23)$$

$$\therefore X_1 = -C_1 X_1$$

이상의 가변구조제어에 의한 슬라이딩모드의 발생을 살펴보면 가변구조 제어계의 동작 모드가 초기 상태벡터의 위치에서 부터 스위칭평면에 hitting 하기 전까지의 reaching phase 와 상태벡터가 처음 스위칭평면에 hitting 하고난 이후의 스위칭평면을 따라 원점으로 수렴하는 슬라이딩모드로 나누어짐을 알 수 있다. 그리고 이 두 모드중 reaching phase 는 가변구조제어에 있어 장점으로 여겨지는 견실성이 보장받지 못하는 모드로서 주 제어 대상으로 연구되어져 왔다. 그러므로 본 논문에서는 이러한 가변구조제어에서의 취약점을 제거하기 위해 제한된 스위칭평면에 포함된 적분기의 초기치를 조절하는 방법을 제안한다.

(15)식과 같은 스위칭 평면 구성에 있어 포함된 적분값의 초기치를 우리가 임의로 선택할 수 있으므로 만약 그 초기치를 $I(0)$ 라 할 때 다음 (24)식과 같이 선택해 주면 초기상태에서 부터 슬라이딩 모드를 발생시킬 수 있음을 알 수 있다.

$$C_1 I(0) + X_1(0) = 0$$

$$I(0) = -X_1(0)/C_1 \quad (24)$$

이 방법에 의해 가변구조 제어에 있어 취약점으로 알려진 reaching phase 가 제거된 2 차 가변구조 제어계의 상태공간 궤적을 그림3.1 에 나타냈고 본 알고리즘의 전체 블럭 다이어그램은 다음 그림3.2 와 같다. 그리고 이 장에서 서술된 새로운 가변구조 제어 알고리즘에 의해 VSCS 의 견실성이 보장되고 reaching phase 가 제거됨을 다음장의 시뮬레이션을 통해 보이겠다.

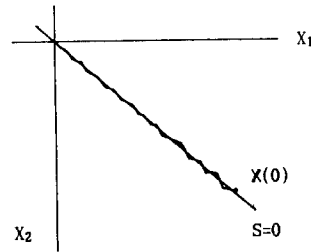


그림 3.1 2 차 가변구조 제어계에서 Reaching Phase 가 제거된 모습

Fig. 3.1 The sliding mode of 2-nd order variable structure control system with no reaching phase

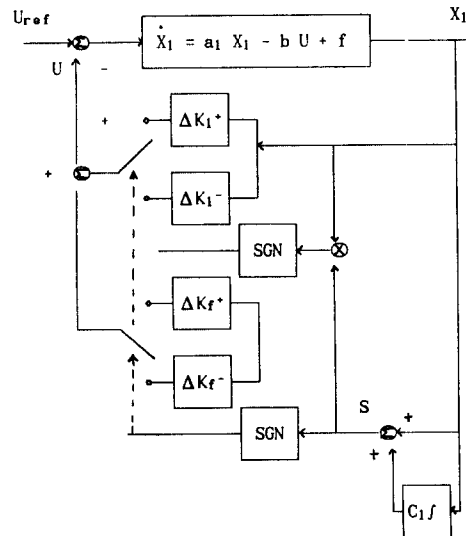


그림 3.2 제안된 가변구조제어계의 블럭 다이어그램
Fig. 3.2 The block diagram of proposed VSCS

4. 시뮬레이션 연구 및 검토

본 장에서는 연구 결과의 유용성을 보이기 위해 다음과 같은 일차 AC 모터계통의 속도 제어에 PI 제어 기법과 제안된 가변구조 제어 방법을 응용한 시뮬레이션 결과를 비교 도시 하고자 한다.

$$X_1 = a_1 X_1 - b U + f \quad (25)$$

$$\begin{cases} X_1 = \omega - \omega_{ref} \\ a_1 = -B/J \\ b = (3P/4J)(L_m/L_r) \lambda_{der} \\ f = -(B/J)\omega_{ref} - (1/J)T_L \\ \omega_{ref} = 100 \text{ (rad/s)} \\ X_1(0) = -100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1min} < a_1 < a_{1max} \\ b_{min} < b < b_{max} \\ f_{min} < f < f_{max} \\ a_{1min} = -2.4160, a_{1max} = 2.584 \\ b_{min} = 110.373, b_{max} = 130.373 \\ f_{min} = -56.9572, f_{max} = -36.9572 \end{cases}$$

4.1 PI 제어기 설계

외란 f 에 대한 영향을 제거하기 위해서는 외란 관측기를 이용하는 방법도 있지만 여기서는 그 정상상태 오차를 줄이기 위해 PI 제어기를 사용한다. PI 제어 입력의 구성은 다음과 같다.

$$U = K_p X_1 + K_i \int X_1 \quad (26)$$

입력 이득 K_p, K_i 를 구하기 위해 계통에 Laplace 변환을 취하고 그 페루프 방정식을 살펴보자.

$$sX_1(s) = a_1 X_1(s) - b U(s) + f/s + X_1(0) \quad (27)$$

$$U(s) = (K_p + K_i/s) X_1(s) \quad (28)$$

$$[s - a_1 + b(K_p + K_i/s)] X_1(s) = f/s + X_1(0) \quad (29)$$

위의 페루프 방정식의 특성근이 $\lambda_1(-5), \lambda_2(-6)$ 가 되도록 PI 이득을 선정하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_p &= (a_1 - \lambda_1 - \lambda_2)/b \\ K_i &= (\lambda_1 \cdot \lambda_2)/b \end{aligned} \quad (30)$$

그리고 (29)식에 의해 구해진 $X_1(s)$ 값에 최종치 정리를 사용하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX_1(s) = 0$$

그러나 PI 입력을 결정할 때 파라미터와 외란의 nominal 값을 사용하였기 때문에 그 제어 결과가 만족하게 나오리 라고 기대하기는 어려움을 미리 알 수 있다. 이 시뮬레이션 결과를 그림 (5.i)에 도시하였다.

4.2 제안된 가변구조 제어기 설계

먼저 슬라이딩 모드를 빠르고 안정하게 하는 스위칭 평면을 설정하자.

$$S = X_1 + C_1 \int X_1 = 0 \quad (31)$$

슬라이딩 모드에 있을 때는 다음의 (32), (33)식이 유지되므로 (32)식의 스위칭평면에 의한 슬라이딩모드는 (33)식과 같이 표현된다. 이 슬라이딩 모드가 안정하고 빠르게 하기 위해서 C_1 값을 6 으로 정한다.

$$S = X_1 + C_1 \int X_1 = 0 \quad (32)$$

$$S = X_1 + C_1 X_1 = 0 \quad (33)$$

그리고 입력 결정은 다음과 같이 슬라이딩 모드 조건을 만족하게 결정한다.

$$S \dot{S} = (a_1 + C_1 + b \Delta K_1) X_1 S + (f + b \Delta K_f) S < 0 \quad (34)$$

$$\Delta K_1 = \begin{cases} \Delta K_1^+ < \min[-(a_1 + C_1)/b] = -0.0687 & \text{when } S X_1 > 0 \\ \Delta K_1^- > \max[-(a_1 + C_1)/b] = -0.0275 & \text{when } S X_1 < 0 \end{cases}$$

$$\Delta K_f = \begin{cases} \Delta K_f^+ < \min[-f/b] = 0.2834 & \text{when } S > 0 \\ \Delta K_f^- > \max[-f/b] = 0.5160 & \text{when } S < 0 \end{cases} \quad (35)$$

다음으로 적분값의 초기치는 reaching phase 를 제거하기 위해 다음과 같이 선택한다.

$$I(0) = -X_1(0)/6 = 16.666 \quad (36)$$

이 제안된 이론에 의한 시뮬레이션 결과를 그림 4.i에 도시하였다.

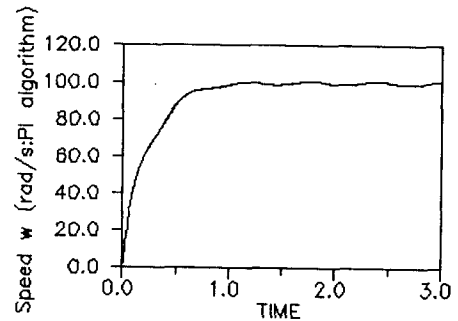


그림 4.1 PI 제어를 적용한 일차의 AC 속도 제어계통에서의 속도 ω 의 궤적
Fig. 4.1 The trajectory of speed ω by PI control

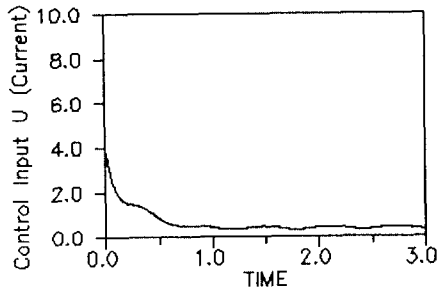


그림 4.2 PI 제어 입력
Fig. 4.2 The PI control input

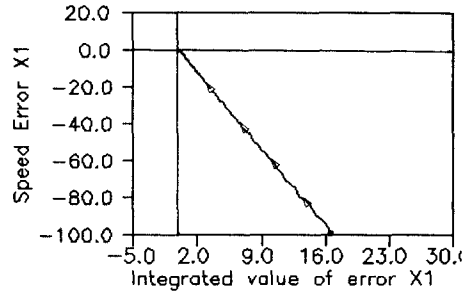


그림 4.5 제안된 가변구조 제어알고리즘에 의한 AC 속도 제어계통에서의 속도 오차와 그의 적분값을 상태로한 상태공간 궤적
Fig. 4.5 The trajectory of state space by proposed VSSC.

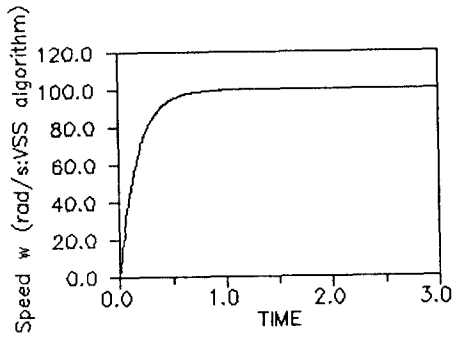


그림 4.3 제안된 가변구조 제어알고리즘을 적용한 AC 속도 제어계통에서의 속도 ω 의 궤적
Fig. 4.3 The trajectory of speed ω by proposed VSSC

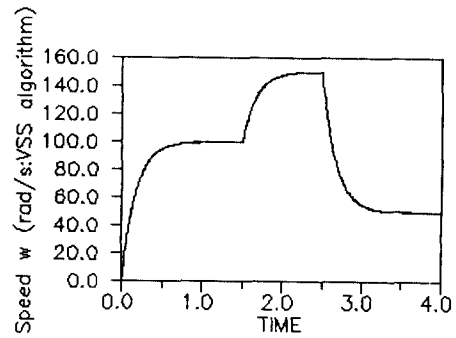


그림 4.6 제안된 가변구조 제어알고리즘을 적용한 AC 모터 가변 속도 제어계통에서의 속도 ω 의 궤적
Fig. 4.6 The trajectory of speed ω by proposed VSSC for variable speed control

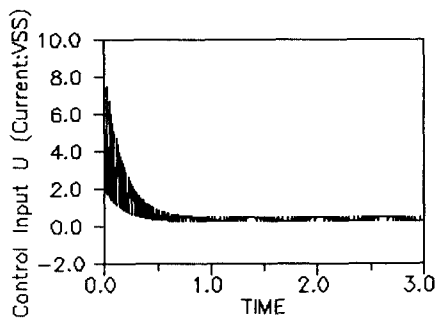


그림 4.4 제안된 가변구조 제어 입력
Fig. 4.4 The proposed VSS control input

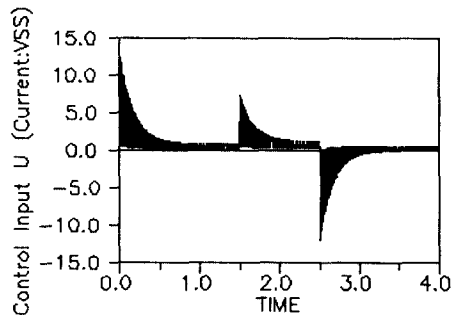


그림 4.7 AC 모터 가변 속도 제어를 위해 제안된 가변구조 제어 입력
Fig. 4.7 The proposed VSS control input for variable speed control of AC motor

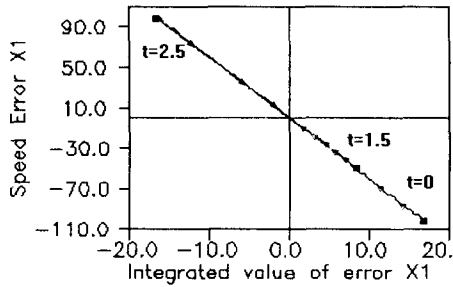


그림 4.8 제안된 가변구조 제어알고리즘을 적용한 AC 모터 가변 속도 제어계통에서의 속도 오차와 그의 적분값을 상태로한 상태공간 궤적

Fig. 4.8 The trajectory of state space by proposed VSSC for variable speed control

5. 결론

본 논문은 가변구조제어(variable structure system control, VSSC)이론의 적용에 있어 배제되었던 일차 dynamic 을 갖는 계통에 대해서도 가변구조 이론을 적용해 좋은 제어 효과를 얻을 수 있음을 보이는데 그 목적을 두었다. 개발된 가변구조 제어 알고리즘을 일차의 dynamic 을 갖는 AC 모터의 속도제어에 대해 시뮬레이션한 결과 기존의 PI 제어기에 비해 그 견실성이 뛰어난 것을 입증할 수 있었고 종래의 가변구조 제어기의 설계시 취약점인 reaching phase 까지 제거할 수 있었다. 앞으로의 연구 목적으로는 이 제안된 제어기법의 실제 적용을 통해 그 유효성을 확인하는데 있겠다.

참고 문헌

- [1] V. I. Utkin, Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems, Moscow, Soviet Union : MIR Publishers, 1978.
- [2] —, " Variable structure systems with sliding modes", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, no. 2, pp. 212-222, 1977
- [3] —, " Variable structure systems - present and future " , Automat. Remot Contr., vol. 40 , no. 9, pp. 1105-1120, 1983.
- [4] H. Hashimoto, K. Maruyama, Y. Arai, "Practical realization of VSS controller for Robotic arm", IECON' 86, PP. 34-40, 1986
- [5] Harashima et al, "Tracking control of Robot manipulator using sliding mode", 15th ISLR, pp 657-664, 1985
- [6] P. K. Nandam and P. C. Sen, "Sliding mode speed control of a self-controlled synchronous motor based on state estimation and digital differentiation", IPEC pp. 291-295, 1989
- [7] C. B. Zhang et al., "Sliding mode PID variable structure control of an AC servo drive system", EPE Aachen pp. 429-432, 1989.