

안정도 여유를 고려한 준최적 H₂ 설계 기법

박 기 현

성균관대학교 전기공학과

On the Suboptimal H₂ Design for Improved Stability Margin

Park Kiheon

Dept. of Electrical Engineering, Sung-Kyun-Kwan University

Abstract

A mixed H₂ / H_∞ design methodology is suggested for a single-input-single-output system. Suboptimal H₂ controllers stabilizing the closed loop system under the additive uncertainty are obtained. An extended Nevanlinna-Pick algorithm is used to obtain the suboptimal controllers.

1. 서론

70년대 말부터 선형제어 분야에서는 H₂ 및 H_∞로 대표되는 주파수 영역의 제어기 설계 기법이 활발히 개발되었다[1,2,11-14]. H₂ 설계는 다중형태의 평가함수를 최소화 시키는 제어 기법으로서 시스템의 성능을 고려할 때 유리하다. H_∞ 설계는 시스템 내부 및 외부에 존재하는 불확실성을 고려할 때 편리하다. H_∞ 설계의 장점은 기존의 제어 이론에서 경험적으로 설명하던 부분을 수학적 모델로 정리할 수 있다는 점에 있다. 그러나 H_∞ 기법만으로는 제어시스템의 다양한 사양요구를 충족시키기는 어려우며 기존의 H₂ 기법과의 결합이 필요하게 된다. 이 분야에서 많은 연구가 진행중이지만[3,4] 아직 뚜렷한 결과는 없는 편이다.

일반적인 H_∞ 문제가 Nevanlinna-Pick 문제와 밀접한 관련이 있다는 것은 잘 알려진 사실이다[1-5]. Bongiorno와 Youla[6]는 H₂ / H_∞ 결합문제를 풀기 위해서는 strictly proper 유리함수들 중에서 H_∞ 문제의 해를 구하는 것이 필요함을 밝혔다. 이 논문에서는 이와 같은 접근방식으로 단일력 단출력 시스템에 대한 H₂ / H_∞ 결합문제를 다루고 있다.

모든 함수들은 복소수 인수(argument) s를 갖는 유리함수로 제한하기로 하며 혼동의 우려가 없는 한 함수의 인수들은 생략하기로한다. 기호 "Re s"는 "복소수 인수 s의 실수부"를 의미하며 기호 "=: "는 "정의에 의해"의 의미이다. 이 논문의 Blaschke product B_p(s)는

$$B_p(s) = \prod_{i=1}^N \frac{s - \bar{a}_i}{s + a_i}$$

의 형태로 주어지는 유리함수로 정의한다. 또한 M이 유한한 양의 실수라 할때 집합 HM과 SHM은

$$HM = \{ u(s) | u(s) \text{는 폐우평면} (\operatorname{Re} s \geq 0) \text{에서 해석적(analytic) 이고 } |u(s)| \leq M \}$$

$$SHM = \{ u(s) | u(s) \text{는 폐우평면에서 해석적이고 } |u(s)| < M \}$$

으로 정의한다. 특별히, H_∞는 폐우평면에서 해석적이고 크기(modulus)가 유한한 함수들의 집합이다. H_∞에 속하는 함수 u(s)의 H_∞ norm 값 ||u(s)||_∞는

$$\|u(s)\|_{\infty} = \sup_s \{ |u(s)| ; \operatorname{Re} s \geq 0 \}$$

으로 정의한다. ā는 복소수 a의 공액복소수를 표시한다. 또한 G₊(s)는 G(-s)를 나타내며 G(s)의 부분분수 표시에서 (G)₊, (G)₋는 각기 폐좌평면과 우평면의 극점을 포함하는 부분을 나타낸다.

2. H₂/H_∞ 혼합 문제의 설정

이 장에서는 그림 1의 제어 시스템에 대하여 성능 최적화(H₂ 설계) 문제와 안정도 여유(H_∞ 설계) 문제를 결합시키는 방법을 제시하겠다.

2.1 H₂ 설계 문제

그림에서 ε_a(t)와 ε_m(t)는 백색 잡음이며 파워 주파수 밀도 함수(power spectral density function)는 각기 G_a와 G_m으로 표시한다. G_m은 양의 실수값이며 G_a는 일반성을 잃지 않고 1로 하겠다. 전달함수 Ṗ(s)와 P_o(s)는 strictly proper이고, 그림의 부시스템 부분은

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + G_1 r(t) + G_2 \varepsilon_a(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) \quad (2)$$

의 상태공간 모델을 갖는다고 하자. 여기서 F, G₁, G₂, H는 각기 qxq, qx1, qx1, 1xq의 상수 행렬이고 (F, G₁)과 (F, G₂)는 제어 가능이고 (F, H)는 관측가능으로 가정한다. 식(1), (2)에 의해

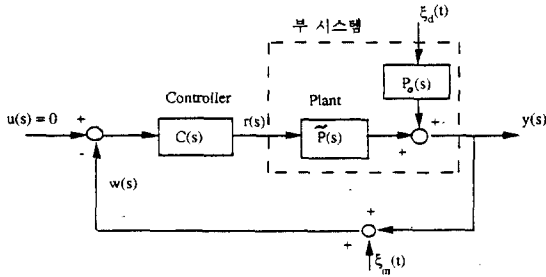


그림 1. 기본적인 궤환제어 시스템

$$y(s) = \tilde{P}(s)r(s) + P_0(s)\xi_d(s) \quad (3)$$

의 표현을 얻게 되는데 이때

$$\tilde{P}(s) = H(sI-F)^{-1}G_1, \quad P_0(s) = H(sI-F)^{-1}G_2 \quad (4)$$

이다. 그림에서 플랜트 입력 $r(s)$ 를 외부 입력들로써 표시하면

$$r(s) = P(s)u(s) - R(s)(\xi_m(s) - P_0(s)\xi_d(s)) \quad (5)$$

으로 되는데 이때 루프전달함수 $R(s)$ 는

$$R(s) = (1 + C(s)\tilde{P}(s))^{-1}C(s) \quad (6)$$

로 정의되는 양이다. 식 (6)을 $C(s)$ 에 대하여 다시 풀면

$$C(s) = (1 - R(s)\tilde{P}(s))^{-1}R(s) \quad (7)$$

가 되는데 식 (6), (7) 은 C 와 R 사이의 1:1 대응 관계를 나타내고 있으며 따라서 제어기 $C(s)$ 를 설계하는 것은 루프전달함수 $R(s)$ 를 설계하는 것과 동가이다.

최적 H_2 설계 문제는, 폐루프 시스템을 안정화 시키는 제어기들 중에서 주어진 자승 형태의 평가함수를 최소화시키는 제어기를 찾는 문제이다. $G_e(s)$ 와 $G_r(s)$ 를 각기 시스템 오차 $e(s) = u(s) - y(s)$ 와 플랜트 입력 $r(s)$ 의 파워 주파수 밀도 함수라고 하면

$$E = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [G_e(s) + kG_r(s)] ds \quad (8)$$

는 대표적인 자승형태의 평가함수이다. 여기서 k 는 가중치 상수로서 항상 양의 실수이다. 공칭플랜트 $\tilde{P}(s)$ 를

$$\tilde{P}(s) = B(s)/A(s) \quad (9.1)$$

와 같이 서로 소(coprime)인 다항식 A, B 의 비로써 표시하면 항상

$$A(s)X(s) + B(s)Y(s) = 1, \quad X(s) \neq 0 \quad (9.2)$$

을 만족하는 다항식 $X(s), Y(s)$ 가 존재한다.

보조 정리 1 [11,12] : 그림 1의 폐루프 시스템을 안정화 시키는 루프 전달함수 $R(s)$ 는

$$R(s) = A(s)(Y(s) + K(s)A(s)) \quad (10)$$

의 형태이며 이러한 $R(s)$ 를 admissible $R(s)$ 라 하자. 이때 $K(s)$ 는 폐루프평면에서 해석적인 임의의 유리함수이다.

유리함수 $\Lambda(s), Q(s)$ 를

$$A*(\tilde{P}*\tilde{P} + kQ)A = \Lambda*A \quad (11)$$

$$A(P_0P_0* + G_m)A* = QQ* \quad (12)$$

의 두식의 Wiener - Hopf spectral factor 라고 하자.

보조 정리 2 [12-14]

a) 그림 1의 폐루프 시스템을 안정화시키고 (8) 식의 평가함수가 유한한 값을 갖게하는 모든 제어기 (이러한 제어기를 유한 H_2 제어기라 하자)의 형태는

$$R(s) = AA^{-1}((AA^{-1}YQ)_- + \{\Gamma\}_+ + Z) Q^{-1}A \quad (13)$$

으로 주어지는데 이때

$$\Gamma = \Lambda\epsilon^{-1}B*P_0P_0*A*Q\epsilon^{-1} \quad (14)$$

이고 $Z(s)$ 는 폐루프평면에서 해석적 (analytic) 이고 strictly proper인 임의의 유리함수(rational function)이다.

b) 유한 H_2 제어기중, (8)식의 평가함수를 최소화 시키는 최적 H_2 제어기 $\tilde{R}(s)$ 는 $Z(s)=0$ 인 경우이다. 즉

$$\tilde{R}(s) = AA^{-1}((AA^{-1}YQ)_- + \{\Gamma\}_+)Q^{-1}A \quad (15)$$

c) 최적 제어기 경우와 유한 H_2 제어기 경우의 평가함수를 각기 \tilde{E} 와 E 로써 표시하면

$$E = \tilde{E} + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Z(s)Z*(s)ds \quad (16)$$

이 성립한다.

식(16)은 최적제어기 \tilde{R} 대신 (13) 식의 준 최적 제어기 $R(s)$ 를 사용할 때의 평가함수의 증가량을 표현하고 있다.

2.2 안정도 여유 문제

그림 1에서 실제 플랜트 $P(s)$ 는 공칭 플랜트 전달함수 $\tilde{P}(s)$ 와

$$P(s) = \tilde{P}(s) + \theta(s) \quad (17)$$

의 관계가 있다 하자. 여기서 $\theta(s)$ 는 안정함수 (즉 폐루프평면에 극점이 없는 함수)로 가정 한다. 이 경우 전체 시스템의 안정도를 판별 하는 특성 다항식 $\Delta(s)$ 는[11]

$$\Delta(s) = \Delta_c\Delta_p^*\Delta_\theta(1 + C(\tilde{P}+\theta)) \quad (18)$$

$$= \Delta_c\Delta_p^*\Delta_\theta(1 + C\tilde{P})(1 + (1+C\tilde{P})^{-1}C\theta) \quad (19)$$

$$= \Delta_c\Delta_p^*(1 + C\tilde{P})\Delta_\theta(1 + R\theta) \quad (20)$$

으로 주어진다. 이때 $\Delta_c, \Delta_p^*, \Delta_\theta$ 는 각기 부 시스템 $C(s), \tilde{P}(s), \theta(s)$ 의 특성 다항식 이고 $\Delta_c\Delta_p^*(1+C\tilde{P})$ 는 공칭 모델 $\tilde{P}(s)$ 에 대한 폐루프 시스템의 특성 다항식 이다. 식(20)에서 $\theta(s)$ 가 안정함수이므로 Δ_θ 는 Strict Hurwitz 다항식이

고 따라서 공칭모델 \tilde{P} 에 대하여 시스템이 안정화 되어 있다면 $\Delta(s)$ 가 S.Hurwitz 다항식이 되기위한 필요충분조건은

$$1 + R(s)\theta(s) \neq 0, \quad \text{Re } s \geq 0 \quad (21)$$

이 된다(이 때 $\Delta_c \Delta_p (1 + \tilde{C}\tilde{P}) \Delta_0$ 가 다항식이라는 사실이 이용된다). 식(21)은 플랜트에 불확정성 요소 $\theta(s)$ 가 있을 때 전체 시스템의 안정도가 유지되는지의 여부를 판단해주는 식이며 따라서 안정도 여유 문제와 직접 관련되는 식이다.

가정 1 : 플랜트 섭동항 $\theta(s)$ 는

$$0 < |\theta(j\omega)| < |v(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (22)$$

의 범위에 있으며 함수 $v(s)$ 는 안정하고 최소위상이다. 식(22)에서 $\theta(s)$ 의 범위를 제한하는 함수 $v(s)$ 를 **외곽함수**라 부른다.

이제 식(21)의 내용과 가정 1의 내용을 함께 생각하면 다음의 정리를 얻을 수 있다.

보조 정리 3 : 그림 1의 페루프 시스템이 (22)식을 만족하는 모든 $\theta(s)$ 에 대하여 안정되기 위한 필요충분 조건은 루프전달함수 $R(s)$ 가 공칭모델 $\tilde{P}(s)$ 에 대하여 전체 시스템을 안정시키고 모든 ω 값에 대하여

$$|R(j\omega)v(j\omega)| < 1, \quad (23)$$

$$(\text{혹은 등가적으로 } \|R(s)v(s)\|_\infty < 1) \quad (24)$$

을 만족시키는 것이다.

보조 정리 3의 증명은 흔히 Nyquist D-contour 방식을 이용하여 유도하지만 이 논문에서는 특성 다항식 (Characteristic polynomial) 개념[11]을 이용하였다.

이상의 분석결과를 통하여 페루프 시스템의 안정도 여유 문제를 다루는 두 가지 접근방식을 생각할 수 있다. 첫째로 가정 1의 외곽함수 $v(s)$ 를 정확히 구할 수 있는 경우를 고려하자. 이 경우는 당연히 식 (23) 혹은 (24)를 만족하는 $R(s)$ 를 구하는 문제로 귀착되는데 흔히 **강인 안정기 (robust stabilizer)** 문제라고 지칭한다. 다음으로는 외곽함수 $v(s)$ 를 정확히 구할 수 없을 경우에 (23)식을 새로운 각도로 해석하는 접근방식을 생각할 수 있다. 식 (23)으로부터 페루프 시스템의 안정화 조건은 모든 ω 에 대하여

$$|v(j\omega)| < \left| \frac{1}{R(j\omega)} \right| \quad (25)$$

으로 표현되는데 이 경우 안정도 여유를 "시스템의 안정도를 깨지 않는 섭동항 $\theta(j\omega)$ 의 최대크기"로 생각한다면, 식 (25)의 $v(j\omega)$ 의 상한값 $1/|R(j\omega)|$ 이 클수록 시스템의 안정도 여유는 크게 되고 따라서

$$\sup_{\substack{R \\ \text{admissible}}} \inf_{\omega} \left| \frac{1}{R(j\omega)} \right| = \inf_{\substack{R \\ \text{admissible}}} \sup_{\omega} |R(j\omega)| \quad (26)$$

$$= \inf_{\substack{R \\ \text{admissible}}} \|R(s)\|_\infty \quad (27)$$

의 최적화 문제로 귀착된다. 식 (27)과 같은 형태의 문제를 **역 안정도 여유(Reciprocal Stability Margin) 최소화** 문제로 부르기로 하자. 일반적으로 페루프 시스템의 안정화가 보장되는 외곽함수 $v(s)$ 의 범위가

$$|v(j\omega)| < \left| \frac{1}{\Psi(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega \quad (28)$$

의 형태로 표현될 때 $\Psi(s)$ 를 **역 안정도 여유 함수**로 부르기로 하고

$$M_0 =: \inf_{R \text{ admissible}} \|\Psi(s)\|_\infty \quad (29)$$

의 값을 주어진 섭동 모델에 대한 **최대 안정도 여유**라고 부른다. 이제까지의 내용으로 보면 식 (17)과 같은 덧셈형 섭동에 대해서는 $\Psi(s)=R(s)=(1 + C(\tilde{s})\tilde{P}(s))^{-1}C(s)$ 임을 알 수 있다. 일반적으로 플랜트 불확정성의 모델이 바뀌면 Ψ 의 형태도 바뀔 것이므로 M_0 값을 지칭할 때 구체적인 섭동 모델을 표시하는 것은 중요하다.

2.3 안정도 여유를 고려한 H_2 설계 문제

이제 2장의 1절과 2절의 내용을 통합하는 문제를 생각해 보자. 먼저

$$f(s) = A^{-1}((A^{-1}YQ)^{-1} + (\Gamma)^{-1})Q^{-1}Au \quad (30)$$

$$g(s) = A^{-1}Q^{-1}Au \quad (31)$$

로 정의하자. 이제 플랜트가 가정 1에서 정의된 섭동항을 (17)식과 같이 가질 때, (8)식의 평가함수 값을 유한하게 하며 동시에 전체 시스템을 안정화시키는 제어를 선택하는 문제를 생각해 보자. 이 문제는, $Z(s)$ 가 페우평면 해석적이고 strictly proper하다는 조건하에서

$$\|R(s)v(s)\|_\infty = \|f(s)+g(s)Z(s)\|_\infty < 1 \quad (32)$$

의 부등식을 만족하는 $Z(s)$ 를 찾아내는 문제로 귀착된다. 이러한 문제가 표준 H_∞ [9,10] 문제와 다른 점은 $Z(s)$ 의 strictly proper조건 때문에 $s=\infty$ 의 보간조건이 추가되는 것이다.

3. 주요 결과

H_∞ 문제와 Nevanlinna-pick 문제가 밀접한 관계가 있다는 것은 잘 알려져 있다. 이 장의 1 절에서는 표준 N-P 문제, 2 절에서는 확장된 N-P 문제, 3 절에서는 안정도를 고려한 H_2 제어기 설계 문제의 해를 각기 다루겠다.

3.1 Nevanlinna-pick 문제

Nevanlinna-pick (NP)문제: 다음의 복소수 쌍을 생각하자.

$$(a_i, \beta_i), \quad 1 \leq i \leq n \quad (33)$$

여기서 $\text{Re } a_i > 0$ 이고 $i \neq j$ 경우에는 $a_i \neq a_j$ 이다. 이제 H_∞ 에 속하고 다음의 보간 조건을 만족하는 함수 $u(s)$ 를 찾는 문제를 생각하자:

$$u(a_i) = \beta_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (34)$$

이 문제의 해의 조건은 잘 알려져있는데[7,8] 결과를 적기 전에 먼저 (33) 식의 복소수값으로부터 얻어지는 Fenyves 배열 $\beta_{i,j}$ 와 이 배열값에 의해 결정되는, 두 함수 $u_j(s)$ 와 $u_{j+1}(s)$ 사이의 homographic 변환을 정의하자 :

$$\beta_{i,j+1}(M) = \frac{M^2(a_i + \bar{a}_j)(\beta_{i,j} - \beta_{j,j})}{(a_i - a_j)(M^2 - \bar{\beta}_{j,j}\beta_{i,j})} \quad 1 \leq j \leq n-1 \quad (35)$$

$$\beta_{i,1} =: \beta_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$u_j(s) = M^2 \cdot \frac{(s - a_j)u_{j+1}(s) + \beta_{j,j}(s + \bar{a}_j)}{M^2(s + \bar{a}_j) + \bar{\beta}_{j,j}(s - a_j)u_{j+1}(s)} \quad (36)$$

여기서 식 (35)의 인수 M은 배열값 β_j 가 M의 함수값임을 명시하고 있다. 식(36)에서 u_{j+1} 에서 u_j 를 얻는 homographic 변환은

$$u_j(s) = L_j(M, s) u_{j+1}(s) \quad (37)$$

의 간략한 식으로 표현할 수 있는데 여기서도 역시 변환식이 M의 함수임이 명시되어 있다.

보조정리 4 [8] : NP 문제의 해 $u(s)$ 가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$(i) |\beta_{k,k}(M)| < M \quad 1 \leq k \leq n \quad (38)$$

혹은

$$(ii) |\beta_{k,k}(M)| < M \quad 1 \leq k \leq m-1 < n-1 \quad (39)$$

$$|\beta_{m,m}(M)| = M \quad (40)$$

$$\beta_{i,m}(M) = \beta_{m,m} \quad m+1 \leq i \leq n \quad (41)$$

인 경우이다. (i)의 경우 임의의 해 $u(s)$ 는

$$u(s) = L_1(M, s)L_2(M, s) \cdots L_n(M, s)u_{n+1}(s) \quad (42)$$

로 얻어지는데 $u_{n+1}(s)$ 는 H^{∞} 에 속하는 임의의 함수이다. 앞의 NP 문제에서, (34)식의 보간 조건을 만족하는 함수 $u(s)$ 를 집합 H^{∞} 내에서 찾지 않고 SHM 내에서 찾는다 하자. 이 경우에는, 해 $u(s)$ 가 존재하는 필요 충분조건은 보조정리 4의 (38)식으로 주어지며[8,17], 이 때의 해는 (42)식의 형태로 주어지는데, 단 $u_{n+1}(s)$ 는 SHM에 속하는 임의의 함수이다.

3.2 확장된 Nevanlinna-pick 문제

H_2 와 H_{∞} 최적화 기법이 결합된 제어기 설계 문제에서는 표준 H_{∞} 문제와는 조금 다른 형태의 H_{∞} 문제를 풀어야 한다. 이 절에서는 이러한 특수한 형태의 H_{∞} 문제를 다루기로 한다. 먼저 확장된 NP 문제부터 살펴보자.

확장된 NP 문제 : SHM에 속하고

$$u(a_i) = \beta_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (43)$$

$$u(\infty) = \beta_{\infty} \quad (44)$$

의 보간조건을 만족하는 함수 $u(s)$ 를 구해보자. 여기서 a_i 는 (33)식에서와 같다.

정리 1 [15]: 확장 NP 문제의 해 $u(s)$ 는

$$u(s) = L_1(M, s)L_2(M, s) \cdots L_n(M, s)u_{n+1}(s) \quad (45)$$

로 구해지는데 $u_{n+1}(s)$ 는 SHM에 속하며 $u_{n+1}(\infty) = \beta_{\infty, n+1}$

을 만족하는 임의의 함수이다. 여기서 $\beta_{\infty, n+1}$ 은

$$\beta_{\infty, j+1} = \frac{M^2(\beta_{\infty, j} - \beta_{j,j}(M))}{M^2 - \beta_{j,j}(M)\beta_{\infty, j}}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (46)$$

$$\beta_{\infty, 1} = \beta_{\infty} \quad (47)$$

의 공식에 의해 얻어지는 값이며 $\beta_{j,j}$ 는 (35)에서 정의된 대로이다.

다음에는 특수한 H_{∞} 문제를 제시하고 이 문제가 확장된 NP 문제로써 해결될 수 있음을 보이겠다.

가정 2 : 주어진 함수 $f(s)$, $g(s)$ 는 패우명면 ($\text{Re } s \geq 0$)에서 해석적이고 $g(s)$ 의 패우명면 영점(zero) a_i , $i=1 \rightarrow n$ 는 서로 다르고 단순(simple)하다. 또한 $f(a_i) \neq 0$, $i=1 \rightarrow n$ 이다.

가정 3 : $g(s)$ 는 허수축 $s = j\omega$ 의 유한한 구간에서 영점을 갖지 않는다.

가정 4 : $f(s)$ 와 $g(s)$ 는 proper 함수이다.

가정 5 : $g(s)$ 의 분모와 분자의 차수는 같다.

특수한 형태의 H_{∞} 문제 : 가정 2부터 가정 5까지가 성립한다 하자. 이제 $u(s) = f(s) - g(s)Z(s)$ 의 H_{∞} norm을 최소화시키는 패우명면 해석함수 $Z(s)$ 를 strictly proper한 제한조건 하에서 구해보자.

보조정리 5 [15] : 함수 $Z(s)$ 가 특수 H_{∞} 문제의 해가 되는 필요충분 조건은 $u(s)$ 가

$$u(a_i) = \beta_i =: f(a_i), \quad 1 \leq i \leq n \quad (48)$$

$$u(\infty) = \beta_{\infty} =: f(\infty) \quad (49)$$

의 보간조건을 만족하는 확장 NP 문제의 해가 되는 것이다.

3.3 안정도를 고려한 준최적 H_2 설계

이 절에서는 2장 3절에서 제기된 H_2 설계와 H_{∞} 설계의 통합 문제에 대한 해를 구해보기로 한다.

가정 6 : $\tilde{P}(s)$ 의 분모항 $A(s)$ 의 우평면 영점들 a_i , $i=1 \rightarrow n$ 라 하자. $A(s)$ 는 $j\omega$ -축 영점을 갖지 않고 우평면 영점들은 서로 다르고 단일 근이다.

정리 2 : 유한 H_2 제어기중 (17)식의 덧셈형 섭동항에 대하여 전체시스템을 안정시키는 강인 제어기 $R(s)$ 는, M 값을 1로하고 보간조건

$$\begin{cases} u(a_i) = \beta_i, \beta_i = (\tilde{P}(s)B_p(s))^{-1} |_{s=a_i} & i=1 \rightarrow n \\ u(\infty) = 0 \end{cases} \quad (50)$$

을 만족하는 확장 NP 문제의 해를 $u(s)$ 라 할 때 $R(s) = u(s)/v(s)$ 로 주어진다. 이 때 $B_p(s)$ 는

$$B_p(s) = \prod_{i=1}^n \frac{s - \bar{a}_i}{s + a_i}$$

로 정의 되는 Blaschke product 이다.

중명: 참고 문헌 [16]의 결과에 의하면 (31) 식의 AA^{-1} , $Q^{-1}A$ 는 모두 분모 분자의 차수가 같고 따라서 가정 3, 4, 5, 가 만족된다. 또한 (31)식에서 $\{AA^{-1}yQ\}$ 은 $A(s)$ 의 우평면 영점들을 극점으로 가지므로 $f(s)$ 는 결국 $A(s)$ 의 우평면 영점을 단일극으로 갖는다. 이제 $|B_p(j\omega)| = 1$ 인 것을 이용하면 (32)식은

$$\begin{aligned} & \| f(s) + g(s)Z(s) \|_{\infty} \\ &= \| fB_p^{-1} + g(s)B_p^{-1}Z(s) \|_{\infty} < 1 \quad (51) \end{aligned}$$

이 되는데 $fB_p^{-1} =: \tilde{f}$ 는 $A(s)$ 의 우평면 영점을 갖고 있지 않으며 $g(s)B_p^{-1} =: \tilde{g}$ 는 $A(s)$ 의 우평면 영점을 같은 차수로 갖는다. 따라서 \tilde{f} 와 \tilde{g} 는 가정 2-5를 모두 만족하므로 결국 (51)식의 문제는,

$$\begin{aligned} u(a_i) &= \tilde{f}(a_i) \quad i=1 \rightarrow n \\ u(\infty) &= \tilde{f}(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

를 만족하며 SH^1 에 속하는 $u(s)$ 를 구하는 문제인데 이 해는 3장 2절에서 이미 구해졌다. 약간의 계산 과정을 거치면

$$\tilde{f}(a_i) = (\tilde{P}(s)B_p(s))^{-1} \Big|_{s=a_i} \quad (53)$$

임을 구할 수 있고 따라서 정리 2 의 결과를 얻는다. 증명 끝.

4. 결론

H_2 와 H_{∞} 설계 기법을 결합시키는 한 방법이 제안되었다. 덧셈형의 섭동항이 있는 페루프 시스템을 안정시키면서 주어진 자승 평가 함수의 값을 유한하게 하는 H_2 제어기의 설계 방식이 제시되었다. 앞으로의 연구 과제는 정리 2 의 강인 제어기들 중에서 최적의 H_2 제어기를 결정하는 것이다.

참고 문헌

[1] G. Zames and B. A. Francis. "Feedback, Minimax Sensitivity, and Optimal Robustness." IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-28, pp 585-601, May 1983.

[2] B.A.Francis and G.Zames. "On H_{∞} -optimal sensitivity theory for SISO feedback systems." IEEE Trans. auto. contr., Vol AC-29, pp 9-16, Jan. 1984.

[3] J. C. Doyle, K. Zhou and B. Bodenheimer. "Optimal control with mixed H_2 and H_{∞} preformance objectives." Proc. Amer. Contr.conf., June 1989.

[4] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover and B.Bodenheimer. "Mixed H_2 and H_{∞} control." Proc. Amer.contr.conf., June 1990.

[5] Ph. Delsarte, Y. Genin and Y. Kamp. "On the role of the Nevanlinna-Pick problem in circuit and system theory." Circuit Theory and Appl., Vol.9, pp.177-187, 1981

[6] J.J.Bongiorno, Jr. and D.C. Youla. "On the design of two-degree-of-freedom multivariable feedback control systems." Report 1452-86, WRI. Polytechnic University, Farmingdale, New York, 1986.

[7] G. Pick. "Uber die Beschränkungen analytischer Funktionen, weiche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden." Math. Ann. 77, 7-23, 1916.

[8] J. L. Walsh. "Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain." American Math.Society, 1935

[9] B. A. Francis. "A course in H_{∞} control theory." Springer-Verlag, New York, 1987.

[10] B.A.Francis and J.C.Doyle. "Linear control theory with an H_{∞} Optimality criterion." SIAM J.contr. and opti., Vol. 25, pp 815-844, 1987.

[11] D.C.Youla, H. Jabr and J.J.Bongiorno, Jr., "Modern Wiener - Hopf Design of Optimal Controllers- Part II: The Multivariable Case," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-21, No. 3, pp.319-338, June 1976.

[12] D.C. Youla and J.J. Bongiorno, Jr., "A Feedback Theory of Two-Degree-of-Freedom Optimal Wiener-Hopf Design," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-30, No. 7, pp.652-665, July 1985.

[13] K.Park, and J.J.Bongiorno, Jr., "A General Theory for the Wiener - Hopf Design of Multivariable Control Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-34, pp. 619-626, June 1989.

[14] K.Park, and J.J.Bongiorno, Jr., "Wiener-Hopf Design of Servo - Regulator - Type Multivariable Control Systems Including Feedforward Compensation," Int. J. Control, Vol. 52, pp. 1189-1216, Nov. 1990

[15] 박 기현, "특수한 형태의 H_{∞} 문제에 관한 연구," 성균관 대학교 논문집 과학 기술편 제 42집 NO.1 (1991년).

[16] K. Park and D.C. Youla, "Numerical Calculation of the Optimal Three-Degree-of-Freedom Wiener-Hopf Controller," submitted for publication to Int.J. Control.(1991).

[17] H.Kimura, "Robust stabilizability for a class of Transfer Functions," IEEE Trans.on Automat.Contr. Vol. AC-29, No.9, pp.788-793, Sep. 1984.

[18] 박 기현, "안정도 여유를 증가시킨 H_2 설계기법," 91 대한 전기학회 하계학술대회 논문집 pp. 651-656.