'91 韓國自動制御學術會議論文集 1991. 10.22~24

비구조적인 불확정성을 갖는 선형시스템의 강인 안정성

°김 진 훈 변 증 남
한국과학기술원 전기및전자공학과

Robust Stability of Linear Systems with Unstructured Uncertainty

Jin-Hoon Kim Zeungnam Bien
Dept. of Elect. Eng.
Korea Advanced Institute of Science and Technology

ABSTRACT

In this paper, the robust stability and the quadratic performance of linear uncertain systems are studied. A quadratic Lyapunov function candidate with time-varying matrix is derived to provide robust stability bounds. Also upper bounds of a quadratic performance is given under the assumption that the uncertain system is stable. Both the robust stability bounds and the upper bounds of a quadratic performance are obtained as solutions of a class of modified Lyapunov equations.

1. 서 론

시스템의 제어를 위하여는 시스템을 잘 나타낼 수 있는 수학적 모델을 근간으로하여 시스템이 원하는 성능을 나타낼 수 있도록 제어기를 설계한다. 이 때 시스템을 기술하는 시스템 모델의 정확성은 시스템 성능 뿐만 아니라 안정성에까지 영향을 미치게 되므로 정확한 시스템 모델은 필수적이다. 그러나 어느 경우에서나 물리적인 시스템을 수학적으로 정확하게 오류없이 기술한다는 것은 현실적으로 불가능하다. 따라서 시스템 모델이란 정도의 차이는 존재하나 실제 시스템의 동적특성과는 항상 모델링 오차 및 외란에 기인한 오차가 존재하며 이런 오차에도 불구하고 시스템의 안정성을 보장하도록 하는 제어기를 구하는 문제를 "강인제어(robust control)"라 하며 최근의 제어문제 분야에서 많은 사람의 주목과 함께 많은 결과가 있다[1]-[8]. 특히 안정성에 중점을 둔 문제를 "강인 안정성 문제"이라하며 시스템의 성능(performance)에 촛점을 둔 문제를 "강인 성능 문제"이라고도 한다.

제어 분야의 모든 경우처럼 강인제어 분야에서도 주파수 영역(frequency domain)과 시간영역(time domain)에서 각각 다루어졌으며, 시간영역에서의 강인제어는 Patel과 Toda[1]에 의하여 본격적으로 상태공간(state-space)에서 다루어졌으며 그 이후로 이를 보완 발전시킨 많은 결과가 있다[2]-[8]. 또한 주파수 영역에서도 많은 결과가 있다.

상태공간에서 기술된 다음과 같은 시스템 선형 불확정 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A(t))x(t)+(B+\Delta B(t))u(t) \quad (1)$$

여기서 x는 n-차원 상태 벡터, u는 m-차원 제어 벡터이고 ΔA와 ΔB는 시스템의 불확정성을 나타내는 한정된(bounded) 행렬이다. 일반성을 잃지 않고 이후로 $[A,B]$는 제어가능쌍이라 가정한다. 위의 시스템 (1)에 다음의 제어를 가하면

$$u(t)=-Fx(t) \quad (2)$$

일반적으로 다음과 같은 폐회로 시스템을 얻게 된다.

$$\dot{x}(t)=[A_c+\Delta A_c(t)]x(t) \quad (3)$$

여기서 $A_c=A-BF$이고 $\Delta A_c(t)=\Delta A(t)-\Delta B(t)F$이다. 위에서 $[A,B]$가 제어 가능쌍이라 했으므로 항상 A_c는 안정성 행렬(고유치의 실수부가 음)로 할 수 있으므로 이후로 A_c는 안정성 행렬 이라 가정한다.

시스템 (3)의 강인제어 문제는 Patel과 Toda[1]에의한 충분조건

$$||\Delta A_c(t)||<\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \quad (4)$$

이 제시된 후 이의 강인안정성 바운드를 크게할 수 있는 많은 결과가 있다[2]-[8]. 여기서 양확정행렬 P는 다음의 대수 Lyapunov 방정식의 해이다.

$$A'_cP+PA_c+2I=0 \quad (5)$$

본 논문에서는 폐회로 시스템 (3)의 안정성과 다음과 같이 정의된

$$J=\int_0^{\infty}[x'Wx]dt \quad (6)$$

2차(quadratic) 성능 지수의 상계 한계(upper bound)를 제시하고자 한다. 여기서 W는 양확정(positive definite) 행렬이다. 또한 본 논문에서는 지면을 줄이기위하여 증명은 생략하였으며, 자세한 내용과 증명은 참고문헌 [9]에 있다.

2. 예비 결과

이 논문에서 사용되는 몇 가지의 기호및 이의 정의를 먼저 기술한다. $\|\cdot\|$는 유클리디안 귀납 노옴, $\lambda_{max}(\cdot)$는 행렬의 최대 고유치, $\lambda_{min}(\cdot)$는 행렬의 최소 고유치, $(\cdot)'$는 행렬 또는 벡터의 트랜스포즈를, 그리고 $Tr(\cdot)$는 행렬의 트레이스를 나타낸다. 그리고 두 대칭행렬 (symmetrix matrix) X와 Y에 대하여 $X \geq Y$는 행렬 $X-Y$가 준양확정행렬(semi-positive definite matrix) 임을 나타낸다. 끝으로 I는 항등행렬 (identity matrix)를 나타낸다.

시스템의 안정성 및 성능지수의 상계 한계를 구하기에 앞서 다음의 일반적인 결과가 필요하다. 첫째, 시스템 (3)의 안정성을 보장하는 충분조건은 Lyapunov 안정조건에의하여 다음을 쉽게 얻을 수 있다.

보조정리 1 : 만약 다음의 수정된 Lyapnov 방정식의 해 $P(t)$가 한정되고 양확정이면

$$-\dot{P}(t)=A_c'P(t)+P(t)A_c+\Omega(\Delta A_c(t),P(t))+Q(t),\ t\geq 0 \quad (7)$$

시스템 (4)는 안정하다. 여기서 $\Omega(\cdot,\cdot)$는 다음을 만족하는 행렬이다.

$$\Delta A'_c(t)P(t)+P(t)A_c(t)\leq\Omega(\Delta A_c(t),P(t)) \quad (8)$$

다음은 시스템 (3)이 안정한 경우에 (6)에 정의된 2차성능지수의 한계를 나타내는 결과이다.

보조정리 2 : 폐회로 시스템 (3)가 안정하다고 하면, (6)에 정의된 성능지수는 다음의 상계 한계를 갖는다.

$$J\equiv\int_0^\infty[x'Wx]\leq x'(0)\bar{S}(0)x(0) \quad (9)$$

여기서 양확정 행렬 $\bar{S}(\cdot)$는 다음의 수정된 Lyapunov 방정식의 해이다.

$$-\dot{\bar{S}}(t)=A_c'\bar{S}(t)+\bar{S}(t)A_c+\Omega(\Delta A_c(t),\bar{S}(t))+W,\ \bar{S}(\infty)=0 \quad (10)$$

위의 결과들은 불확정성 $\Delta A_c(t)$의 종류에 관계없이 성립하는 것들이다. 그러나 위의 수식에서 볼 수 있듯이 $\Delta A_c(t)$가 주어지지 않으면 위의 결과들을 적용하는 것이 불가능하다. 따라서 위의 결과들을 이용하기위하여는 불확정성을 구별하여야한다. 즉 불확정성을 좀 더 구체적으로 기술할 필요가 있다. 본 논문에서는 불확정성이 노옴 바운드로 주어지는 비구조적인 경우에 대하여 다루려한다. 즉, 시스템 (3)에서 불확정성 $\Delta A_c(t)$가 다음과 같이

$$U_\alpha\equiv\{\Delta A_c(t):\|\Delta A_c(t)\|\leq\alpha(t)\},\ t\geq 0 \quad (11)$$

표시되는 집합 U에 속한 경우에 한하여 고찰하기로 한다.

3. 강인 안정성

불확정성, $\Delta A_c(t)$, 이 수식 (11)에 정의된 행렬집합 U_α에 속하는 경우에 시스템 (3)의 안정성을 보장하는 결과를 얻기위하여는 다음의 정의 및 보조정리가 필요하다.

정의 1 : 만약 바운드된 양확정 행렬 $P(t)$와 양수 β 가 존재하여 다음의 부등식을 항상

$$x'[\dot{P}(t)+(A_c+\Delta A_c(t))'P(t)+P(t)(A_c+\Delta A_c(t)]x<-\beta\|x\|^2$$

만족하면 위의 시스템 (3)은 안정하다라고 정의한다.

정의 2 : 행렬 $\Omega_i(\alpha(t),X)$, $i=1,2,\ldots,6$를 다음과 같이 정의하자.

$$\Omega_1(\alpha(t),X)\equiv 2\alpha(t)\|X\|\cdot I \quad (12.a)$$

$$\Omega_2(\alpha(t),X)\equiv 2\alpha(t)\|X^{-1/2}\|\cdot\|X^{1/2}\|\cdot X \quad (12.b)$$

$$\Omega_3(\alpha(t),X)\equiv\alpha^2(t)\|\Gamma(t)\|\cdot I+X\Gamma^{-1}(t)X \quad (12.c)$$

$$\Omega_4(\alpha(t),X)\equiv\Gamma(t)+\alpha^2(t)\|\Gamma^{-1}(t)\|XX \quad (12.d)$$

$$\Omega_5(\alpha(t),X)\equiv\alpha(t)(\gamma(t)I+\frac{1}{\gamma(t)}XX) \quad (12.e)$$

$$\Omega_6(\alpha(t),X)\equiv\alpha(t)(X+Tr(X)\cdot I) \quad (12.f)$$

여기서 $\Gamma(t)$는 양확정 행렬, $\gamma(t)$는 양의 실수이다.

위에서 정의된 행렬 $\Omega_i(\cdot,\cdot)$는 다음의 성질을 갖고있다.

보조정리 3 : 수식 (11)에 정의된 집합 U_α에 속하는 불확정성 $\Delta A_c(t)$에 대하여 다음의 관계가 있다.

$$\Delta A'_c(t)P(t)+P(t)\Delta A_c(t)\leq\Omega_i(\alpha(t),P(t)),\ i=1,2,\ldots,6 \quad (13)$$

여기서 $P(t)$는 양확정 행렬이다.

정리 1 : 불확정성 $\Delta A_c(t)$가 수식 (11)에 정의된 집합 U_α에 속한다고하고, 행렬 $\Omega_i(\cdot,\cdot)$, $i=1,2,\ldots,6$를 (12.a) (12.f)에 정의된 것이라하자. 만약 다음의 수정된 Lyapunov 방정식을 만족하는 한정된 양확정행렬 $P_1(t)$, $t\geq 0$이 존재하면 시스템 (3)는 안정하다.

$$-\dot{P}_1(t)=A'_cP_1(t)+P_1(t)A_c+\Omega_i(\alpha(t),P_1(t)),\ P_1(\infty)=\epsilon I \quad (14)$$

여기서 ϵ은 임의의 매우 작은 양의 실수이다.

정리 2 : 시스템 (4)에서 불확정성 $\Delta A_c(t)\epsilon U_\alpha$라하고 양확정 행렬 P_0를 다음의 대수적인 Lyapunov 방정식

$$A'_cP_0+P_0A_c+Q_0=0 \quad (15)$$

의 해라하자. 여기서 Q_0는 양확정 행렬이다. 만약 다음의 부등식 중 한 개라도 만족하는 양확정 행렬 $\Gamma(t)$ 또는 양의 실수 $\gamma(t)$가 존재하면 시스템 (3)는 안정하다.

$$\|\alpha(t)\|<\mu_p\equiv\frac{\lambda_{min}(Q_0)}{2\lambda_{max}(P_0)} \quad (16.a)$$

$$\|\alpha(t)\| < \mu_{k1} \equiv \frac{\lambda_{\min}(P_0^{-1}Q_0)}{2\lambda_{\max}(P_0^{1/2})\lambda_{\max}(P_0^{-1})} \tag{16.b}$$

$$\|\alpha(t)\| < \mu_{k2} \equiv \frac{1}{\|\Gamma(t)\|^{1/2}}\lambda_{\min}(Q_0 - P_0\Gamma^{-1}(t)P_0) \tag{16.c}$$

$$\|\alpha(t)\| < \mu_{k3} \equiv \frac{1}{\|\Gamma^{-1/2}(t)\|}\lambda_{\min}(P_0^{-1}(Q_0 - \Gamma(t))P_0^{-1}) \tag{16.d}$$

$$\|\alpha(t)\| < \mu_{k4} \equiv \lambda_{\min}(Q_0(\gamma(t)I + \frac{1}{\gamma(t)}P_0P_0)^{-1}) \tag{16.e}$$

$$\|\alpha(t)\| < \mu_{k5} \equiv \lambda_{\min}(Q_0(P_0 + Tr(P_0))^{-1}) \tag{16.f}$$

위의 결과 중 수식 (16.a)는 Patel과 Toda의 결과와 일치하는 것이며, 나머지의 결과와의 해석적인 비교는 불가능하고 행렬 Q_0와 시스템 행렬 A_c에 의존한다. 따라서 강인 안정성의 범위는 위의 6개를 모두 계산한 후 가장 큰 것을 택하면 된다.

4. 강인 성능 한계

불확정성을 갖는 시스템의 안정성 못지 않게 시스템의 성능지수의 한계를 구하는 것도 중요하게된다. 성능지수는 사용자의 원하는 형태에 따라 여러가지를 가질 수 있으나 수식 (6)에 정의 된 2차의 성능지수를 택하게되면 우리는 쉽게 시스템이 불안정하면 이의 값은 한정된 값을 가지지 않게 됨을 알 수 있다. 따라서 2차의 성능 지수를 택하게 되면 시스템의 안정성이 선행되어야한다. 이의 안정성은 3장에서 다루었으므로 이 장에서는 시스템의 안정성이 증명된 경우에 이외 2차 성능지수의 한계를 구하고자한다. 다음의 정리들은 시스템 (3)의 2차 성능지수의 한계를 나타내는 결과들이다.

<u>정리 3 :</u> 불확정성 $\Delta A_c(t)$이 수식 (11)에 정의된 집합에 속한다하고, $\Omega_i(\cdot)$, $i=1,2,\ldots,6$을 (8)에 정의된 행렬이라하자. 그러면 수식 (6)에 정의된 2차의 성능지수는 다음의 한계를 갖는다.

$$J \equiv \int_0^\infty [x'Qx]dt \le x'(0)\bar{S}_1(0)x(0) \tag{17}$$

여기서 W는 양확정 행렬이고, 양확정 행렬 $\bar{S}_1(0)$는 다음의 수정된 Lyapunov 방정식의 해이다.

$$-\dot{\bar{S}}_1(t) = A'_c\bar{S}_1(t) + \bar{S}_1(t)A_c + \Omega_i(\alpha(t),\bar{S}_1(t)) + W,\ \bar{S}_1(\infty) = 0 \tag{18}$$

만약 불확정성의 바운드가 시간 변화에 의존하지않고 다음과같은 집합내에 존재하는 불확정성이라하자.

$$U_{\alpha_0} = \{\Delta A_c(t) : \|\Delta A_c(t)\| \le \alpha_0\} \tag{19}$$

그러면 다음의 결과를 얻는다.

<u>정리 4 :</u> 불확정성 $\Delta A_c(t)$가 수식 (17)에 정의된 집합에 속한다하고, 시스템 (3)이 안정하다고 하자. 그러면 (6)에 정의된 2차 성능지수는 다음의 상계 한계를 갖는다.

$$J \equiv \int_0^\infty [x'Qx]dt \le x'(0)\bar{S}_2 x(0) \tag{20}$$

여기서 W는 양확정 행렬이고, 양확정 행렬 S_2는 다음의 수정된 대수적인 Lyapunov 방정식의 해이다.

$$A_c'\bar{S}_2 + \bar{S}_2A_c + \Omega_i(\alpha_0,\bar{S}_2) + W = 0 \tag{21}$$

5. 결론

이 논문에서는 비구조적인 선형시스템에 대하여 시스템의 강인안정성과 강인 2차 성능지수의 상계 상한을 다루었다. 결과들은 수정된 Lyapunov 방정식의 해를 구함으로써 강인안정성의 바운드및 2차 성능지수의 상계 상한을 구할 수 있다. 그리고 위의 결과들은 행렬의 성질에 의존하기 때문에 어느 것이 가장 좋은지는 경우에 의존하므로 명확히 알 수 없으므로 각각을 계산하여 비교하는 것이 바람직하다.

참고 문헌

[1] R.V.Patel and M.Toda, "Quantitative measures of robustness for multivariable systems", in *Proc. Joint Automat. Contr. Conf.*, San Francisco, CA, 1980, paper TD8-A.

[2] R.K.Yedavalli, "Improved Measures of Stability Robustness for Linear State Space Models", *IEEE Trans. Automat. Contr.* , vol.Ac-30, No.6, 1985.

[3] R.K.Yedavalli, Z.liang, "Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation", *IEEE Trans. Automat. Contr.* , Vol.Ac-31, No.9, 1986

[4] I.R.Pertersen, "Stabilization for an uncertain linear system in which uncertain parameter enter into the input matrix", *SIAM, J. Contr. and Optimi.* , vol.26, No.6, 1988.

[5] M.E.Sezer and D.D.Siljak, "A note on robust stability bounds," *IEEE Trans. Automat. Contr.* , vol.AC-34, pp.1212-1214, Nov. 1989.

[6] M.A.Rotea and P.P.Khargonekar, "Stabilization of uncertain systems with norm bounded uncertainty - A control Lyapunov function approach", *SIAM, J. Contr. and Optimi.*, vol.27, No.6, 1989.

[7] Jin-Hoon Kim and Zeungnam Bien, "Comments on 'Stability analysis of a family of matrices'", *IEEE Trans. Automat. Contr.* , will be presented at July, 1992.

[8] Zeungnam Bien and Jin-Hoon Kim, "Robust stability bound of linear systems with structured uncertaity", *IEEE Trans. Automat. Contr.* , will be presented at June, 1992.

[9] Jin-Hoon Kim and Zeungnam Bien, "Robust stability and performance bound of uncertain linear systems", submitted at *IEEE Trans. Automat. Contr.*