

단일물체 이동작업을 위한 두 협동 매니퓰레이터의 감소차수 모델과 감결합 제어

강석원<sup>o</sup>, 정광손, 박종국

Reduced Order Model and Decoupled Control of Two Cooperating Manipulators for Moving an Object

Kang Seok Won<sup>o</sup>, Jeong Kwang Son, Park Chong Kug

Abstract - In this paper, dynamical model and control architecture are developed for the closed chain motion of two N-joint manipulators holding a rigid object. Controller consist of forward controller which is reduced order model and compensator that compensates for modeling error. Control laws are determined so as to decouple the force and position controlled degree of freedom(DOF) during motion of the system.

1. 서론

산업적 제조에서 두개의 협동 매니퓰레이터의 필요성은 여러가지 이유로 나타난다. 예를들면 하나의 매니퓰레이터로는 들 수 없는 무거운 물체나 기하학적으로 잡기 어려운 형태 또는 동일한 조립작업을 요구하는 매니퓰레이터의 연결된 두 작업과 같은 경우를 들 수 있다. 그러나 이러한 매니퓰레이터의 첨가는 시스템의 복잡성을 증가 시킨다. 따라서 이러한 시스템을 제어 하는데는 모델의 간략화 작업이 매우 중요한 역할을 한다. 매니퓰레이터와 그의 환경 사이의 중첩효과는 기구학 구조가 매니퓰레이터의 동적상에 부가하는 제약값이 고려한다[3,5]. 본 논문에서는 물체를 붙드는 두개의 협동 매니퓰레이터의 closed chain motion의 동역학과 제어를 보여준다. Closed chain mechanism을 모델하기 위해 일반적인 부하에 의한 매니퓰레이터들 사이의 동역학, 기구학적 중첩을 결정한다. 시스템을 간단히 하기위해 감소차수 모델을 사용하고 일반화된 접촉력을 구하기 위한 함수적 관계를 세운다. 제어 구조는 힘, 위치 자유도의 정확한 감결합을 시키도록 제안된다.

2. 시스템 개요

3차원 작업공간에서 강건물체를 붙드는 두개의 n-관

절 직렬 링크 매니퓰레이터에 대한 동역학 모델과 제어구조를 다룬다. 양쪽 매니퓰레이터의 동역학은 알려져 있다고 가정하며 그림 1.에 시스템 구성을 나타냈다.

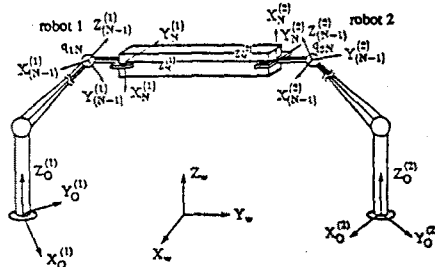


그림 1. 시스템구성과 좌표계

그림 1에 보여준 stationary world 좌표계 \$(X\_w, Y\_w, Z\_w)\$는 기준 좌표계와 같이 쓰이고 좌표계 \$(X\_k^i, Y\_k^i, Z\_k^i)\$는 \$k=0, 1, \dots, N\$ 일때 \$i=(1,2)\$번째 매니퓰레이터의 \$k\$번째 링크를 나타낸다. \$3 \times 3\$ 직교 회전 행렬 \${}^iR\_k\$는 원점이 world 좌표계 매니퓰레이터 말단효과장치의 중첩에 있는 \$(X\_k^i, Y\_k^i, Z\_k^i)\$ 좌표계의 방향을 나타낸다. \$(3 \times 1)\$ 벡터 \${}^i r\_k\$와 \${}^i w\_r\$의 끝은 1번째 매니퓰레이터의 말단효과장치로부터 점 \$Q\_0\$로 향한다. 이때 \$Q\_0\$는 그림 2.에서 보여주는 강건물체의 무게 중심을 나타낸다. 벡터 \${}^i r\_k\$와 \${}^i w\_r\$의 관계는 다음과 같다.

$${}^i w_r = {}^i R_k^T(q_i) {}^i r_k \quad (1)$$

그림 1의 \$i\$개의 매니퓰레이터 \$i\$에 대한 동역학 모델을 Lagrange 형태로 나타내면 다음과 같다.

$${}^i \tau = D_i(q_i) \ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i) + J_{i,w}^T(q_i) f_{ci} \quad (2)$$

\$D\_i(q\_i)\$는 \$N \times N\$ 관성행렬이고 코리올리, 원심력, 중력, 마찰력은 \$N \times 1\$ 벡터 \$C\_i(q\_i, \dot{q}\_i)\$로 나타내며 \$J\_{i,w}^T(q\_i)\$는 \$N \times 1\$ transposed 자코비안 행렬이다. \$f\_{ci}\$는 다음과 같다.

$$f_{ci} = [{}^i w_{i,N+1}^T, {}^i w_{iN,N+1}^T]^T \quad (3)$$

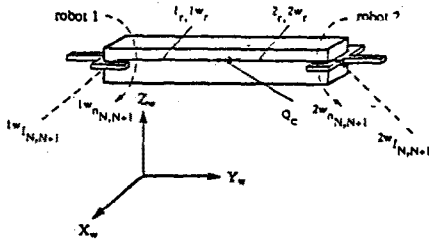


그림 2. 강건체와 말단효과장치

3. 중첩이론

매니플레이터의 움직임은 일반화된 접속력이 일반적 인 물체를 통해 상호연관 되므로 동역학적으로 중첩된다.  $L_1(q_1)$ 를 매니플레이터의 일반화된 접속력을 점  $Q_c$ 에서 물체의 질량 중심의 요소로 변환시켜주는  $6 \times 6$  자코비안 행렬이라 하면  $L_1(q_1)$ 는 다음과 같다.

$$L_1(q_1) = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ E_1(q_1) & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서  $E_1(q_1)$ 는 다음과 같다.

$$E_1(q_1) = \begin{bmatrix} 0 & l_{wz} & -l_{wy} \\ -l_{wz} & 0 & l_{wx} \\ l_{wy} & -l_{wx} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

식(4)에서  $L_1(q_1)$ 는 정정행렬이고 따라서 비특이적이다. 이를 포기법을 사용하여, 일반적인 강건체의 자유체에 대한 Newton-Euler 방정식은 그림 2.에서 보여 주었고 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} m_c I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & K_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_c g \\ O_c K_c \omega_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1^T(q_1) \\ L_2^T(q_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{c1} \\ f_{c2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$m_c$ 는 강건체의 질량이고  $K_c$ 는 물체의 질량 중심에 대한  $3 \times 3$  관성행렬이며  $3 \times 1$  벡터  $g$ 는 중력을 나타낸다.  $[v_c^T, \omega_c^T]^T$  와  $[\dot{v}_c^T, \dot{\omega}_c^T]^T$ 는 물체의 질량중심에서 직각좌표 속도와 가속도를 나타내는  $6 \times 1$  벡터이며  $Q_c$ 는  $3 \times 3$  행렬로서 다음과 같다[1].

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서  $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T = \omega_c$ 이다.

외부 힘의 접속점에서 속도에 대한 점  $Q_c$ 의 속도 사이의 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$[v_c^T, \omega_c^T]^T = L_1^{-T}(q_1) [v_1^T, \omega_1^T]^T \quad (8)$$

$v_i$ 와  $\omega_i (i=1,2)$ 는 world 좌표계에서 매니플레이

터의 말단효과장치 중점의 전이, 회전  $3 \times 1$  속도벡터이다. 직각 world 좌표계와 관절공간에서 말단효과장치 1의 속도는 자코비안 행렬  $J_{1w}(q_1)$ 를 통해 연관된다[2].

$$[v_1^T, \omega_1^T]^T = J_{1w}(q_1) \dot{q}_1 \quad (9)$$

식(9)를 사용하여 식(8)에서  $[v_1^T, \omega_1^T]^T$ 를 제거하고  $i=1,2$ 에 대해 결과식 두 부분의 오른쪽을 방정식화 하면 다음과 같다.

$$[L_1^{-T}(q_1) J_{1w}(q_1); -L_2^{-T}(q_2) J_{2w}(q_2)] [\dot{q}_1^T, \dot{q}_2^T]^T = O_{6 \times 1} \quad (10)$$

4. 관절공간의 closed chain 모델

1번 매니플레이터와 물체에 대한 복합 동역학 모델은 다음과 같다.

$$\tau = D_1(q_1) \ddot{q}_1 + C_1(q_1, \dot{q}_1) + \Lambda(q_1) [\dot{v}_c^T, \dot{\omega}_c^T]^T + J_{1w}^T(q_1) L_1^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} -m_c g \\ O_c K_c \omega_c \end{bmatrix} - L_2(q_2) f_{c2} \quad (11)$$

이때  $\Lambda$ 는  $N \times 6$  행렬이고

$$\Lambda(q_1) = J_{1w}^T(q_1) L_1^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} m_c I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & K_c \end{bmatrix} \quad (12)$$

식(8)과 (9)에서  $i=1$ 일때 매니플레이터 1의 관절변수와 회전 속도 벡터  $\omega_c$ 와의 관계는 다음과 같다.

$$\omega_c = [L_1^{-T}(q_1) J_{1w}(q_1)] i \dot{q}_1 \quad (13)$$

이때 1은 식(13)의 lower 3 행렬을 나타낸다. 점  $Q_c$ 에서 물체의 직각좌표 가속도를 매니플레이터의 관절 가속도로 표현하면 다음과 같다.

$$[\dot{v}_c, \dot{\omega}_c]^T = \dot{L}_1^{-T}(q_1) J_{1w}(q_1) \dot{q}_1 + L_1^{-T}(q_1) [J_{1w}(q_1) \ddot{q}_1 + J_{1w}(q_1) \dot{q}_1] \quad (14)$$

그러므로 양쪽 매니플레이터와 물체사이의 동역학관계는 다음과 같다.

$$\tau = D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + H_A(q_1, \dot{q}_1) + H_B(q_1, \dot{q}_1) \dot{q} + A^T(q) f_{c2} \quad (15)$$

이때  $\tau = [\tau_1^T, \tau_2^T]^T$  와  $q = [q_1^T, q_2^T]^T$ 는 전체 시스템에 대한 관절토크와 위치이고  $2N \times 1$ 행렬  $C(q, \dot{q})$ 와  $2N \times 2N$ 행렬  $D(q)$ 는 다음과 같다.

$$C(q, \dot{q}) = [C_1^T(q_1, \dot{q}_1), C_2^T(q_2, \dot{q}_2)]^T \quad (16)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} D_1(q_1) + \Lambda(q_1) L_1^{-T}(q_1) J_{1w}(q_1) & O_{N \times N} \\ O_{N \times N} & D_2(q_2) \end{bmatrix} \quad (17)$$

식(15)의  $2N \times 2N$  벡터  $H_A(q_1, \dot{q}_1)$ 와  $2N \times 2N$ 행렬  $H_B(q_1, \dot{q}_1)$ 는 다음과 같다.

$$H_A = \begin{bmatrix} J_{1w}^T(q_1) L_1^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} -m_c g \\ O_c K_c [L_1^{-T}(q_1) J_{1w}(q_1)] i \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\ O_{N \times 1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$H_B = \begin{bmatrix} \Lambda(q_1)^T & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & 0_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (19)$$

이때  $\Upsilon = [L_1^{-T}(q_1)J_{1w}(q_1) + L_1^{-T}(q_1)J_{1w}(q_1)]$  이다.  
 식(15)의  $2N \times 6$  행렬  $A^T(q)$ 는 접속력 계수 행렬의 항이다. 이것은 다음과 같다.

$$A^T(q) = [-L_2^T(q_2)L_1^{-T}(q)J_{1w}(q), J_{2w}(q_2)]^T \quad (20)$$

식(10)에 주어진 기구학 제약과 closed chain 동역학을 연결시켜 간단히 표현하면 다음과 같다.

$$A(q)\dot{q} = 0_{6 \times 1} \quad (21)$$

이때 가속도 제약은 식(21)을 미분하여 얻을 수 있다.

$$A\ddot{q} + \dot{A}\dot{q} = 0_{6 \times 1} \quad (22)$$

식(15)를 (22)에 대입하면 기구학 가속도 제약을 포함하는 closed chain 동역학을 얻을 수 있다.

$$AD^{-1}A^T f_{c2} = \dot{A}\dot{q} + AD^{-1}[\tau - C - H_A - H_B\dot{q}] \quad (23)$$

$f_{c2}$ 의 6개 스칼라 구성 요소는 6개의 방정식인 식(23)으로부터 결정된다. 단일 물체를 잡는 두 매니플레이터로 구성된 전체 closed chain 시스템의 관절공간 모델은 다음과 같다.

$$\Delta[\tau - C - H_A - H_B\dot{q}] = D\ddot{q} + A^T[AD^{-1}A^T]^{-1}\dot{A}\dot{q} \quad (24)$$

이때  $\Delta(q)$ 는  $2N \times 2N$  행렬로 다음과 같다.

$$\Delta = [I_{2N \times 2N} - A^T[AD^{-1}A^T]^{-1}AD^{-1}] \quad (25)$$

5. 감소차수 모델

식(25)의 closed chain mechanism에 대한 관절변수 모델은  $2N$ 개의 2계 미분방정식을 갖는다. 따라서 방정식의 수는 시스템의 자유도  $2N-6$ 을 초과한다. 따라서 방정식의 수를 시스템의 자유도와 같게 하기 위하여 감소차수 모델을 설정한다. 감소차수 모델은 closed chain 동역학 표현에 의해 얻을 수 있고 독립적인 일반화된 좌표의 다른 집합으로 선택되어진다. 감소차수 모델을 결정하기 위해 새로운 벡터변수  $\nu = [\nu_1 \ \nu_2 \ \dots \ \nu_{2N-6}]^T$ 를 사용한다[4]. 이것은 다음과 같다.

$$\nu = B(q)\dot{q} \quad (26)$$

$[(2N-6) \times 2N]$  행렬  $B(q)$ 는 선택되어지고 따라서  $2N \times 2N$  복합 행렬  $(A^T(q); B^T(q))^T$ 는 비특이적이다. 이것을 일반적으로 쓰면 다음과 같다.

$$[A(q), B(q)]^T[\Pi(q), \Sigma(q)] = I_{(2N \times 2N)} \quad (27)$$

이때  $\Pi$ 는  $2N \times 6$  행렬이고  $\Sigma$ 는  $[2N \times (2N-6)]$  행렬이다.

여기서  $A\Pi = I_{6 \times 6}$ ,  $A\Sigma = 0_{(6 \times (2N-6))}$ ,  $B\Pi = 0_{(2N-6 \times 6)}$ ,  $B\Sigma = I_{(2N-6 \times (2N-6))}$ 이다. 행렬  $B(q)$ 는 임의로 선택한다. 미분식(26)은 다음을 가져다 준다.

$$\dot{\nu} = B\ddot{q} + \dot{B}\dot{q} \quad (28)$$

$[(2N-6) \times 2N]$  행렬  $\dot{B}$ 는 관절위치와 속도의 함수이다.

식(21)과 (26)을 합치면

$$\dot{q} = \Sigma\nu \quad (29)$$

를 얻는다.

비슷하게 식(22)와 (28)을 합치면 다음과 같다.

$$\ddot{q} = \Sigma\dot{\nu} - [\Pi\dot{A} + \Sigma\dot{B}]\Sigma\nu \quad (30)$$

식(29)와 (21)에서  $\dot{q}$ 의 대치는 다음과 같은 기구학 제약을 나타낸다.

$$A\Sigma\nu = 0_{6 \times 1} \quad (31)$$

즉  $A\Sigma = 0_{(6 \times (2N-6))}$  따라서 기구학 제약은 의사속도의 값에 관계없이 만족된다. 그러므로 식(15)의 closed chain 동역학은 기구학 제약을 만족하는 의사공간에서 표현되어진다. 식(31)에 의해 의사공간에서 소거차수 모델이 유추된다. 식(29)와 (30)을 식(15)의  $q, \dot{q}$ 에 대해 대치하면 다음이 주어진다.

$$D\Sigma\nu = \tau + \{D[\Pi\dot{A} + \Sigma\dot{B}] - H_B\}\Sigma\nu - C - H_A - A^T f_{c2} \quad (32)$$

$[2N \times 2N]$  행렬  $[\Pi; \Sigma]^T$ 를 식(32)의 양쪽에 전치곱하면 결과식은 식(27)의 특성에 의해 두부분으로 나뉘어진다.

$$f_{c2} = \Pi^T\{\tau - D\Sigma\nu + \{D[\Pi\dot{A} + \Sigma\dot{B}] - H_B\}\Sigma\nu - C - H_A\} \quad (33)$$

$$\Sigma^T D\Sigma\nu = \Sigma^T\{\tau + \{D[\Pi\dot{A} + \Sigma\dot{B}] - H_B\}\Sigma\nu - C - H_A\} \quad (34)$$

식(33)은 2번 매니플레이터의 일반화된 접속력  $f_{c2}$ 에 대한 해를 제공한다. 이때  $f_{c2}$ 는  $(\nu, \dot{\nu}, \tau)$ 의 함수이고 식(23)으로부터 계산된다.

$$AD^{-1}A^T f_{c2} = \dot{A}\dot{q} + AD^{-1}\{\tau - C - H_A - H_B\Sigma\nu\} \quad (35)$$

6. 제어구조

제어기는 이상적 조건을 설계하는 전향제어기 ( $\tau_P$ )와 모델링 에러와 외란의 효과를 보상해 주는 보상기 ( $\tau$ )으로 구성된다. 복합제어 ( $\tau$ )는  $\tau = \tau_P + \hat{\tau}$  같이 표현된다. 전향제어기 ( $\tau_P$ )는 식(33), (34)에서의 closed chain 동역학에서 모델 되어지고 이때 이들의 수치미개변수들은 충분히 알려진다. 전향제어기는 다음과 같다.

$$\tau_P = -\{D^d[\Pi\dot{A}^d + \Sigma\dot{B}^d] - H_B\}\Sigma^d\nu^d + C^d + H_A \quad (36)$$

이때 표기법  $d$ 는 desired한 값을 의미한다.

복합제어 ( $\tau = \tau_P + \hat{\tau}$ )는 식(33), (34)에서 대체된다.

결과방정식은 아래의 가정에 의해

$$D^d = D \quad \Sigma^d = \Sigma \quad \Pi^d = \Pi \quad C^d = C \quad \dot{A}^d = \dot{A} \quad \dot{B}^d = \dot{B}$$

$$H^d = H \quad H^d = H \quad \text{다음과 같이 표현된다.}$$

$$f_{c2} = \Pi^T\{\tau - D\Sigma\nu\} \quad (38)$$

$$\Sigma^T D\Sigma\nu = \Sigma^T\hat{\tau} \quad (39)$$

만약  $\tau_P$ 를 다음과 같이 선택한다면

$$\hat{\tau} = A^T\hat{\tau}_1 + D\Sigma^T\hat{\tau}_2 \quad (40)$$

따라서  $6 \times 1$  벡터  $\hat{\tau}_1$ 는 2번 매니플레이터에서의 일반화된 접속력으로 쓰여질 수 있다.

식(27)의 관계를 이용하여 다시 쓰면

$$f_{c2} = \hat{\tau}_1 + \Pi^T[D\Sigma(\hat{\tau}_2 - \dot{\nu})] \quad (41)$$

$$\Sigma^T D \Sigma (\hat{r}_2 - v) = 0_{(2N-6) \times 1} \quad (42)$$

이것은 5절에서  $[(2N-6) \times (2N-6)]$ 행렬 ( $\Sigma^T D \Sigma$ )가 Invertable함을 보여준다.

따라서 식(42)의 해는 명확하고

$$\hat{r}_2 = v \quad (43)$$

식(41)에서 (43)을 쓰면 다음과 같다.

$$\hat{r}_1 = f_{o2} \quad (44)$$

보상기의  $\hat{r}_1$ 은 접속력을 제어하고  $\hat{r}_2$ 은 의사변수를 제어한다. 복합제어는 식(33), (34)에 기초를 두어 설계하였고 이때 앞의 방정식은 2번 매니플레이터의 일 반화된 접속력에 대한 해를 제공한다.

보상기 수는 식(40), (44)에서 사용할 때 감결합된다. 보상기는  $\hat{r}_1$  과  $\hat{r}_2$ 에 의해 결정되어지고 이것은 힘과 위치를 제어한다.

## 7. 결론

본 논문에서는 단일물체 이동작업을 하는 두 협동 매니플레이터의 closed chain 모델에 대한 감소차수 모델과 감결합 제어구조를 다루었다. 감소차수 모델은 관절공간 동역학 모델보다 더 작은 변수와, 작은 2계 미분방정식을 가지기에 모의실험을 효과적으로 설계 할 수 있는 장점을 가진다. 또한 감소차수 모델과 접속력 방정식은 제어기 설계에 사용된다. 앞으로는 2 개의 협동 매니플레이터의 사양이 다름 경우나 또는 3개 이상의 협동 매니플레이터를 사용할 시 다중 closed chain에 대한 해석법에 대하여 연구해볼 필요가 있겠다.

## 참고문헌

- [1] A.J.Koivo, Fundamentals for Control of Robotic Manipulators, Addison-Wesley, 1989.
- [2] Yoram Koren, Robotics for Engineers, McGRAW-HILL 1987.
- [3] I.D.Walker, R.A.Freeman, and S.I.Marcus, "Dynamic Task Distribution for Multiple Cooperating Robot Manipulators," Proc. 1988 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, vol. 2, pp. 1288-1290, Philadelphia, PA, April 1988.
- [4] R.K.Kankaanranta and A.J.Koivo, "Dynamics and Simulation of Compliant Motion of a Manipulator," IEEE J. of Robotics and Automation, vol. 4, pp. 163-173, April 1988.
- [5] J.Y.S. Luh and Y.F. Zheng, "Constrained Relation between Two Coordinated Industrial Robots for Motion Control," Int. J. of Robotics Research, vol. 6, no. 3, Fall 1987.