

최적경로탐색문제를 위한 인공신경회로망

김 옥 박 영문
(서울대학교 전기공학과)

An Artificial Neural Network for the Optimal Path Planning

Wook Kim, Young-Moon Park
(Electrical Engineering Dept., Seoul National Univ.)

Abstract

In this paper, Hopfield & Tank model-like artificial neural network structure is proposed, which can be used for the optimal path planning problems such as the unit commitment problems or the maintenance scheduling problems which have been solved by the dynamic programming method or the branch and bound method.

To construct the structure of the neural network, an energy function is defined, of which the global minimum means the optimal path of the problem.

To avoid falling into one of the local minima during the optimization process, the simulated annealing method is applied via making the slope of the sigmoid transfer functions steeper gradually while the process progresses.

As a result, computer(IBM 386-AT 34MHz) simulations can finish the optimal unit commitment problem with 10 power units and 24 hour periods (1 hour factor) in 5 minutes. Furthermore, if the full parallel neural network hardware is constructed, the optimization time will be reduced remarkably.

1. 개요

unit commitment 문제, 발전기 보수계획문제 등의 최적경로탐색문제의 경우, 이들의 최적경로를 찾기 위하여 지금까지 주로 동적계획법(Dynamic Programming Method), 분지한정법(Branch and Bound Method), 또는 이들을 주어진 문제에 적합하게 조금씩 수정한 방법들을 이용하여 왔다 [1], [2], [10]-[13]. 이러한 방법들은 대부분의 경우 발전기의 수가 많아지거나, 시간간격을 더욱 세분화할 경우 검색공간이 너무 커짐으로 인해 최적해를 찾기 위해 소요되는 시간이 지나치게 길어지므로 실제계에 적용하기는 거의 불가능하였다.

더우기 최근 전력 수요가 급증하고 있고 이에 따른 발전기 수의 증가는 불가피하며, 이들의 효율적이고 경제적인 운용, 관리를 위해서는 보다 빠른 새로운 방법의 개발이 시급하다.

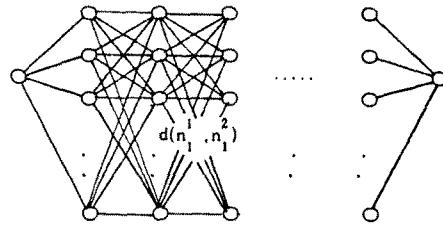
특히, optimal unit commitment 문제의 경우 발전기의 수가 증가하면 주어진 제한조건들을 만족하는 발전기의 조합 역시 비례해서 증가하게 되어, 현재까지 사용되어왔던 동적계획법이나 분지한정법으로는 더이상 해결을 할 수 없게 될 것이다.

1980년대 중반부터 아날로그 입력의 weighted sum이라는 단순한 작업만을 행할 수 있는 각각의 독립적인 processing element들의 집합으로 구성되어 있으면서도 적응성, 견실성, 병렬처리성을 가지는 인공신경회로망에 대한 연구[3][5]-[9]가 급속히 진전되어왔고, 특히 Hopfield[4]-[7]등에 의해 최적화 문제에도 인공신경회로망을 이용할 수 있는 연구가 활발히 진행되어왔다.

또한, Kirkpatrick 등에 의해 비선형함수의 최적화 과정에서 발생할 수 있는 Local minimum으로의 수렴을 방지하기 위해 Monte Carlo Simulation을 이용한 Simulated Annealing[4], [10]이라는 순차적(Sequential) 알고리즘이 개발되어 global minimum을 찾을 수 있는 효과적인 방안이 제시되었으며, Hinton 등에 의해 이러한 Simulated Annealing 알고리즘을 병렬계산(Parallel Processing)이 가능한 인공신경회로망인 Boltzmann Machine[9], [20]이 개발되었다.

따라서, 본 논문에서는 최적경로탐색문제에 대한 에너지 함수를 새로이 정의하며, 그 에너지 함수를 최적화하기 위한 Hopfield 모델과 유사한 형태의 인공신경회로망의 구조를 제시한다. 제시된 에너지 함수가 수없이 많은 local minimum을 가지는 비선형함수이기 때문에 local minimum으로 수렴하는 것을 방지하기 위해 sigmoid 전달함수의 기울기를 점차 증가시키는 방식의 simulated annealing 알고리즘을 적용하였다.

2. 문제의 정의



layer 의번호: 0 1 2 m-2 m-1

layer 에있는: 1 n(1) n(2) n(m-2) 1
노드수

m : 시작점에서 목적점까지의 단계(layer)수
n(i) : i번째 layer에서 선택할 수 있는 종류(노드)의 수
 V_j^i : i번째 layer의 j번째 노드의 선택도 ($\in [0, 1]$)
 d_j^{i-1}, n_k : i-1번째 layer의 j번째 노드에서 i번째 layer의 k번째 노드로 이르는 비용

< 그림 1 >

< 그림 1 >과 같은 구조의 시작점에서 출발하여 목적점까지 가장 최소의 비용으로 도달할 수 있는 경로를 찾는 문제에서 만약 $n(1) = n(2) = \dots = n(m-2) = n$, 즉 각각의 단계에서 선택할 수 있는 가짓수가 모두 같다고 가정하면 시작점부터 목적점까지 이르는 가능한 경로의 경우의 수는 모두 n^{m-2} 가지가 존재한다. 예를 들면 10대의 발전기를 한시간 간격으로 24시간 동안의 unit commitment 문제에서 최적값을 찾고자 하는 경우에 발전기의 가동비용을 모두 상수로 가정한다면라도 가능한 경우의 수는 10^{24} 개가 존재한다. 즉, n이나 m이 매우 큰 경우에는 가능한 모든 경우를 모두 검색하여 최적값을 구하는 방식은 도저히 불가능하며, 발전기의 수가 더욱 늘어나면 동적계획법이나 분지한정법을 이용한다하더라도 최적값을 찾기 위해서는 매우 많은 시간이 필요로 한다.

따라서, 모든 노드들을 각각 하나의 processing element들에 대응시켜 각각의 processing element들이 전체적인 비용을 감소시키는 방향으로 자신의 선택도를 바꾸어 나간다면 노드의 수나 layer의 수에 관계없이 일정한 시간에 최소비용경로를 찾을 수 있을 것이다.

3. 에너지 함수의 정의

<그림 1>에서의 같은 최소 비용 경로 문제에서 에너지 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$E = \frac{A}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=1}^{n(i)} V_j^i - \lambda_i \right)^2 + A' \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n(i)} V_j^i (1 - V_j^i) + \frac{B}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n(i-1)} \sum_{k=1}^{n(i)} V_j^{i-1} V_k^i d(n_j^{i-1}, n_k^i) \quad (1)$$

이 에너지 함수에서 첫번째항은 한 layer에서 하나의 노드만이 선택되면서 동시에 시작점에서 목적점까지 하나의 경로가 만들어져야하는 조건을 만족하기 위한 항(첫번째항에서 bias의 값이 1이 아니고 $\lambda(\geq 1)$ 인 이유는 제 6절에서 설명한다.)이고, 두번째항은 각 노드의 최종 수렴 상태가 0 또는 1, 즉 binary가 되기 위한 항이며, 세번째항은 실제로 비용을 나타내는 항이다. 이 에너지 함수의 최소값은 각각의 layer에서 단 하나의 노드의 값만이 1이고 나머지는 0이며 또한 시작점부터 목적점까지 반드시 하나의 경로가 구성되는 상태에서 비용이 최소가 될때 그 경로가 최소 비용 경로가 된다. 즉, 첫번째항과 두번째항의 값은 0이고, 세번째항이 최소일때 global minimum이 된다. 첫번째 항과 두번째 항이 모두 0이지만 세번째항이 최소값이 아닌 local minimum이 되는 경우는 선택가능한 경로의 수만큼 존재하게 되므로 위의 에너지 함수를 단순한 gradient descend 방법을 이용하여서는 최적값을 찾을 수 있는 가능성은 거의 없다. 따라서, 최적 경로를 찾기 위하여서는 먼저 기본적으로 에너지 함수의 값을 감소시키는 방향으로 각 노드의 값을 변경시키나가고의 경우에 따라서는 에너지 함수의 값을 상승시키는 방향으로도 노드의 값을 변경시킬 수 있게하면서 (probabilistic up-climbing) 시간이 지남에 따라 함수값을 상승시킬 수 있는 확률을 점차 낮추어감으로써 local minimum을 빠져나갈 수 있게 하는 simulated annealing 알고리즘(18)을 이용하여야 한다.

4. 에너지 함수의 변화량

임의의 한 노드의 선택도를 변화시킬때는 정의된 에너지 함수의 값이 감소되는 방향으로 선택도를 바꾸어야 한다. 즉, 에너지 함수의 미분이 음(-)이 되도록 각 노드의 선택도를 변화시켜나가는 것이다. 에너지 함수의 미분을 구하기 위해 k_1 layer의 k_2 번째 노드의 선택도를 ΔV 만큼 변화시킨 후의 각 노드의 선택도 V' 를 다음과 같이 정의한다.

$$V_j^i = \begin{cases} V_j^i + \Delta V & , \text{if } i=k_1, j=k_2 \\ V_j^i & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

이때 에너지 함수인 식 (1)의 첫번째항을 E_1 , 두번째항을 E_2 , 세번째항을 E_3 라 하면 에너지 함수의 변화량은 다음과 같이 유도된다.

$$\Delta E_1 = E_1' - E_1 = \left[\sum_{j=1}^{n(k_1)} AV_j^{k_1} + AV_{k_2}^{k_1} - \left(\lambda_{k_1} - \frac{\Delta V}{2} \right) A \right] \Delta V \quad (3)$$

$$\Delta E_2 = E_2' - E_2 = \left[A' - 2A'V_{k_2}^{k_1} - A' \Delta V \right] \Delta V \quad (4)$$

$$\Delta E_3 = E_3' - E_3 = \left[\sum_{j=1}^{n(k_1-1)} \frac{B}{2} d(n_j^{k_1-1}, n_{k_2}^{k_1}) V_j^{k_1-1} + \sum_{k=1}^{n(k_1+1)} \frac{B}{2} d(n_{k_2}^{k_1}, n_k^{k_1+1}) V_k^{k_1+1} \right] \Delta V \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta E &= \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n(k_1)} AV_j^{k_1} + AV_{k_2}^{k_1} - \left(\lambda_{k_1} - \frac{\Delta V}{2} \right) A + A' - 2A'V_{k_2}^{k_1} - A' \Delta V \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n(k_1-1)} \frac{B}{2} d(n_j^{k_1-1}, n_{k_2}^{k_1}) V_j^{k_1-1} \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n(k_1+1)} \frac{B}{2} d(n_{k_2}^{k_1}, n_k^{k_1+1}) V_k^{k_1+1} \right] \Delta V \quad (6) \end{aligned}$$

여기서, $A' = \frac{A}{2}$ 라하고 식 (6)를 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} \Delta E &= - \left[- \sum_{j=1}^{n(k_1)} AV_j^{k_1} + \left(\lambda_{k_1} - \frac{1}{2} \right) A \right. \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n(k_1-1)} \frac{B}{2} d(n_j^{k_1-1}, n_{k_2}^{k_1}) V_j^{k_1-1} \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n(k_1+1)} \frac{B}{2} d(n_{k_2}^{k_1}, n_k^{k_1+1}) V_k^{k_1+1} \right] \Delta V \quad (7) \end{aligned}$$

5. 인공신경회로망의 구조

식 (7)은 k_1 layer의 k_2 번째 노드의 선택도를 변화시킬때의 에너지의 변화량은 k_1-1 layer의 노드들, k_1+1 layer의 노드들, k_1 layer의 노드들(k_2 노드는 제외)의 선택도에만 관계하고 그 이외의 노드들의 선택도와는 무관함을 의미한다. 이러한 에너지 함수의 변화량이 가지는 성질을 이용하여 Hopfield 모델 형태의 인공신경회로망의 구조를 간단히 구성할 수 있다.

일반적으로 Hopfield 모델의 인공신경회로망은 다음과 같은 조건이 있어야 Local minimum으로 수렴할 수 있다는 조건(1)을 가지고 있다. 즉,

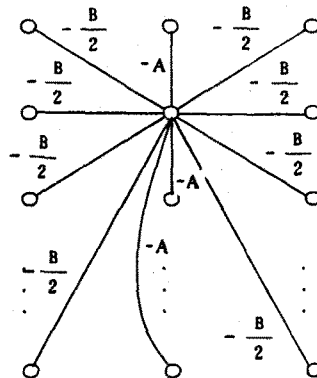
1. weight matrix의 diagonal 항이 0이어야한다. 즉, 노드의 출력이 자기 자신의 입력으로 제한되지 않아야 한다.
2. 한 노드의 값이 변화할때 다른 노드들의 출력값은 변하지 않아야 한다. 즉, Asynchronous하게 동작하여야 한다.
3. 잡음이 없어야 한다.

이 절에서는 제 4절에서 유도된 에너지 함수의 변화량을 이용하여 위와 같은 수렴조건을 만족하는 인공신경회로망을 구성한다.

먼저, k_1 layer의 k_2 번째 노드로 입력되는 값 $net_{k_1k_2}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} net_{k_1k_2} &= - \sum_{j=1}^{n(k_1)} AV_j^{k_1} + \left(\lambda_{k_1} - \frac{1}{2} \right) A \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n(k_1-1)} \frac{B}{2} d(n_j^{k_1-1}, n_{k_2}^{k_1}) V_j^{k_1-1} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n(k_1+1)} \frac{B}{2} d(n_{k_2}^{k_1}, n_k^{k_1+1}) V_k^{k_1+1} \quad (8) \end{aligned}$$

따라서, k_1 layer의 k_2 번째 노드로 입력되는 connection의 weight값은 <그림 2>에서의 같이 할당할 수 있다.

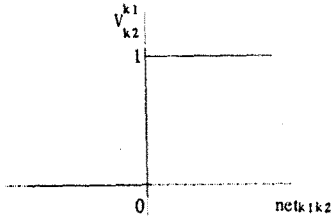


<그림 2> connection weight의 구조

그러면, 식 (7)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta E = - net_{k_1k_2} \cdot \Delta V \quad (9)$$

따라서, 에너지 함수의 minimum으로 수렴하기 위해서는 에너지가 감소하는 방향으로 k_1 layer의 k_2 번째 노드의 상태를 변경하여야 하며, 그렇기 위해서는 $net_{k_1k_2}$ 가 음(-)이면 ΔV 도 음(-)이어야 하며, $net_{k_1k_2}$ 가 양이면 ΔV 도 양이어야 한다. 그러므로, processing element에 입력되는 양 $net_{k_1k_2}$ 과 출력 V_{k_2} 사이의 전달함수(transfer function)를 <그림 3>와 같은 unit step 함수를 사용하면, $net_{k_1k_2}$ 와 ΔV 의 부호가 같으므로 항상 에너지함수가 감소하는 방향으로 노드의 상태를 변화시켜 나갈 수 있다.



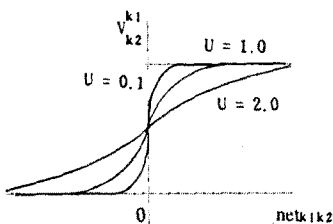
< 그림 3 > unit step 함수

6. Simulated Annealing의 적용

제 5절에서 설명된바와 같이 unit step 함수를 전달함수로 사용할 경우, 빠른 시간내에 확실하게 수렴을 할 수 있지만, 그 수렴한 결과가 가장 최적한 값이라는 보장은 절대 할 수 없는 local minimum이다. 따라서, unit step 함수대신에 <그림 4>와 같은 sigmoid 함수를 사용하게 되면 경우에 따라서 에너지함수의 값을 증가시키는 방향으로도 움직일 수 있게 된다. sigmoid 함수는 다음과 같은 식으로 정의된다.

$$V_{k_2}^{k_1} = 0.5 \left[\frac{\tanh\left(\frac{-net_{k_1k_2}}{U}\right) + 1}{2} + 1 \right] \quad (10)$$

식 (10)에서 U는 control parameter로서 초기에는 큰 값(2.0 정도)으로 설정한 후 점차 0에 가까운 값으로 감소시켜나감으로써 초기에는 에너지 함수의 값을 증가시키는 방향으로 변화할 수 있는 확률을 크게 하여 주고, 시간이 지날수록 그 확률을 낮추어 나가며, 결국 시간이 충분히 흐르면 U가 거의 0에 가까워지면 sigmoid 함수는 unit step 함수와 같아져서 에너지 함수를 감소시키는 방향으로만 변화할 수 있게 된다.



< 그림 4 > sigmoid 함수

7. 파라미터값들의 설정

7.1. λ

식 (1)에서 최적화가 끝난후의 첫번째 항에 의한 각 노드의 선택도의 평균값은 $\lambda_i / n(i)$ (단, $n(i)$ 은 해당 노드가 위치하는 i번째 layer내에 존재하는 노드의 수)이며, 두번째항은 아무런 영향을 주지 못하고, 세번째항에 의한 평균값은 0이다. 식 (8)에서부터 첫번째항이 전체적인 노드의 상태값의 평균값에 미치는 weight는 A이며, 세번째항은 $B \cdot d_i$ (단, d_i 은 해당노드와 연결된 노드들사이의 비용의 평균값)이다. 따라서, 우리가 원하는 노드의 선택도의 평균값은 $1/n(i)$ 이므로, 위 두 평균값의 기중평균이 $1/n(i)$ 이 되도록 λ_i 를 선택하여야 한다. 즉,

$$\frac{\frac{\lambda_i}{n(i)} A + 0 \cdot B \cdot d_i}{A + B d_i} = \frac{1}{n(i)} \quad (11)$$

$$\text{따라서, } \lambda_i = 1 + \frac{B}{A} d_i$$

7.2. A와 B

A의 값과 B의 값은 만약 A를 지나치게 크게 설정하면 수렴한 경로가 최소 비용 경로가 아닌 경우가 많았으며, B를 지나치게 크게 설정하면 수렴한 결과가 경로를 이루지 못하고 중간에서 끊어지는 경우가 발생하였다. 실험적으로 정한 A와 B의 최적값은 A는 1이고 B는 1.0에서 1.2사이일때 최소비용경로로 수렴할 확률이 가장 높았다.

7.3. control parameter U

control parameter U의 초기값은 충분히 큰 값을 취해야 하며, 최적화과정중에는 천천히 그 값을 감소시켜나가야 한다. 너무 작은 값을 초기값으로하거나 U를 너무 빨리 감소시키거나 하면 global minimum으로 수렴하지 못하고 local minimum으로 수렴해 버리는 경우가 발생한다. 따라서 충분히 큰 값으로 U의 초기값을 설정하고 일정시간마다 한번씩 다음과 같은 식으로 U의 값을 감소시켜나간다.

$$U = U * CF$$

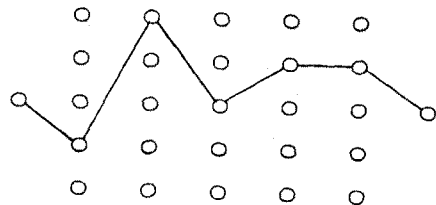
단, CF(Cooling Factor) : 0.8~0.99

만약 완벽한 최소비용경로가 아니더라도 빠른 시간내에 근사적경로를 찾고 싶으면 CF를 0.8에 가까운 값으로 설정하고, 다소 시간이 걸리더라도 완벽한 최소비용경로를 찾고 싶으면 CF를 0.99에 가까운 값으로 설정하면 된다.

8. 사례 연구

사례 1은 <그림 5>와 같은 발전기가 5대일때 5시간동안의 unit commitment문제를 각각 분지한정법과 제시된 알고리즘의 컴퓨터 시뮬레이션을 적용한 결과의 비교이며, 사례 2는 <그림 6>과 같은 발전기가 10대일때 24시간동안의 unit commitment 문제에 대한 인공신경회로망의 컴퓨터 시뮬레이션 결과이다(이 경우에 대한 분지한정법의 적용은 계산 시간 상 무의미함). 각각의 사례연구는 모두 priority-order법에 의해 priority-list를 작성함으로써 각 layer에서 선택할 수 있는 dimension을 발전기의 수만큼으로 간략화하였다. 인공신경회로망의 각 파라미터의 값은 A는 1.0, B는 1.2로 하였으며, 각 노드간의 connection에 weight값으로 할당될 비용(d)은 미리 기동비용과 발전비용을 합한 값을 normalize시킨 값을 사용하였다. μ_i 의 값과 λ_i 의 값은 7.1절의 결과에 따라 구하였다. 인공신경회로망의 경우는 컴퓨터 시뮬레이션을 100회 반복 수행하여 그 결과를 제시하였다.

8.1. 사례 1 (발전기 5대, 5시간)



< 그림 5 >

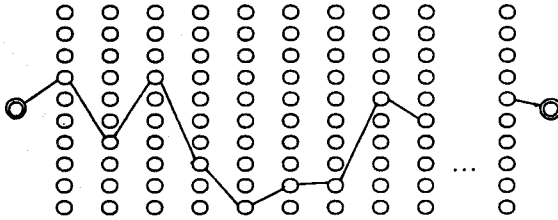
1) 분지한정법

계산 시간	0.5초 미만
최적 경로	1.012

2) 인공신경회로망

CF	0.85	0.90	0.92	0.93	0.95
계산 시간	7초	10초	12초	14초	18초
최소값	1.012	1.012	1.012	1.012	1.012
최대값	1.086	1.049	1.049	1.049	1.012
평균값	1.046	1.036	1.023	1.015	1.012
최적값으로 수렴할 확률	8%	36%	68%	93%	100%

8.2. 사례 2 (발전기 10대, 24시간)



< 그림 6 >

1) 인공신경회로망

CF	0.85	0.90	0.92	0.95	0.98
계산 시간	1분30초	2분10초	2분55초	4분10초	5분20초
최소값	13.3	13.3	13.3	13.3	13.3
최대값	14.0	13.8	13.5	13.4	13.3
평균값	13.6	13.4	13.4	13.3	13.3
최적값으로 수렴할 확률	9%	28%	53%	84%	100%

9. 결 론

dimension이 매우 큰 경우에 사용이 거의 불가능한 동적계획법이나 분지한정법을 대체할 수 있는 인공신경회로망을 구성하여 병렬처리가 가능하게 함으로써, 발전기의 수가 많은 optimal unit commitment 등의 최적경로탐색문제에서 매우 빠른 시간안에 최적해, 또는 근사최적해를 구할 수 있었다. 사례연구에서 제시된 바와 같이 dimension이 작은 경우의 문제에 대해서는 본 논문의 인공신경회로망이 동적계획법이나 분지한정법에 비해 별로 효과적이지 못하였으나, dimension이 큰 문제에 대해서는 완벽한 병렬처리가 이루어지지 않은 컴퓨터 시뮬레이션에서조차도 기존의 분지한정법보다 훨씬 더 뛰어난 결과를 보여주었다. 만약 병렬처리가 가능한 하드웨어 [16]가 실제로 구성이 된다면 컴퓨터 시뮬레이션의 결과보다 훨씬 더 뛰어난 결과를 보여주리라 생각된다. 따라서, 현재 계산시간때문에 제대로 이루어지지 못하고 있는 unit commitment 문제등에서 본 논문의 인공신경회로망을 이용할 경우 매우 효과적일 것이라고 예상된다.

10. 참고 문헌

[1] A.S. Debs, *Modern Power Systems Control and Operation*, Kluwer academic Publishers, 1988
 [2] A.J. Wood, and B.F. Wollenberg, *Power Generation Operation and Control*, John Wiley & Sons, 1984

[3] J. Hertz, A. Krogh, and R.G. Palmer, *Introduction to the Theory of Neural Computation*, Addison-Wesley, 1991
 [4] E. Aarts, and J. Korst, *Simulated Annealing and Boltzmann Machines : A Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing*, John Wiley & Sons, 1989
 [5] *IEEE First International Conference on Neural Networks*, San Diego, June, 1987
 [6] *IEEE International Conference on Neural Networks*, San Diego, July, 1988
 [7] *International Joint Conference on Neural Networks*, Washington D.C., June, 1989
 [8] *International Joint Conference on Neural Networks*, San Diego, June, 1990
 [9] *Proceedings of the International Conference on Neural Networks*, Washington D.C., Jan., 1990
 [10] C.K. Pang, and H.C. Chen, Optimal short-term thermal unit commitment, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-95, no.4, 1336-1346, Jul/Aug, 1976
 [11] C.K. Pang, G.B. Sheble, and F. Albuyeh, Evaluation of dynamic programming based methods and multiple area representation for thermal unit commitment, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-100, No. 3, 1212-1218, Mar., 1981
 [12] T.S. Dillon, K.W. Edwin, H.D. Kochs, and R.J. Taud, Integer programming approach to the problem of optimal unit commitment with probabilistic reserve determination, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-97, No. 6, 2154-2166, Nov/Dec, 1978
 [13] G.S. Lauer, and D.P. Bertsekas, Solution of large-scale optimal unit commitment problems, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-101, No.1, 79-86, Jan., 1982
 [14] J.J. Hopfield, Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proc. National Academy of Sciences of the USA* 79, 1982, 2554-2558
 [15] J.J. Hopfield, Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proc. National Academy of Sciences of the USA* 81, 1984, 3088-3092
 [16] J.J. Hopfield, and D.W. Tank, Neural computation of decisions in optimization problems, *Biological Cybernetics* 52, 1985, 141-152
 [17] J.J. Hopfield, and D.W. Tank, Computing with neural circuits: a model, *Science* 233, 1986, 625-633
 [18] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt Jr. and M.P. Vecchi, Optimization by simulated annealing, *Science* 220, 1983, 671-680
 [19] D.H. Ackley, G.E. Hinton and T.J. Sejnowski, A learning algorithm for Boltzmann machines, *Cognitive Science* 9, 1985, 147-169
 [20] G.E. Hinton, and T.J. Sejnowski, Learning and relearning in Boltzmann machines, *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition* 1, Bradford Books, Cambridge (MA), 282-317