

## 신뢰성이론에 의한 말뚝기초의 안정해석 Reliability Based Stability Analysis for Pile Foundation

이종빈\* 박철수\*\*  
Lee, Cheung Bin Park, Cheol Soo

### ABSTRACT

Current steel pile foundation design is based on WSD, but the reliability based design method is more rational than the WSD.

For this reason, this study proposes a reliability Index of the pile foundation by LFD which is most common type of pile foundation, and also proposes the theoretical bases of nominal safety factors of stability analysis by introducing the reliability theory.

The measured bearing capacity data are analyzed to the descriptive statistics and classified into the four models of uncorrelated-normal(UNNO), uncorrelated-nonnornal(UNNN), correlated-normal(CONO), and correlated nonnormal(CONN).

This study presents the comparisons of reliability index and check points using the AFSOM with respect to the four models as well as BASIC program.

### I. 서 론

토목구조물의 기초를 설계함에 있어서 고려해야 할 사항은 여러가지가 있지만 그 중에서도 특히 중요한 것은 상부구조물에서 전달되는 하중, 기초지반의 지지력 및 N치 측정 등이다.

말뚝의 지지력은 통상적으로 힘의 평형조건으로부터 유도된 정역학적 지지력공식과 타격에너지와 말뚝의 관입에 의한 일량 사이의 평형조건으로부터 유도된 동력학적 지지력공식으로 산정된다.

그러나 이를 지지력 산정공식의 신뢰성은 지반의 복잡다양성으로 인하여 아직 확실하게 정립되지 못한 실정이다. 그러므로 중요한 구조물 기초용 말뚝의 설계 하중을 결정하기 위하여는 실제 지반에 설치된 말뚝에 직접 하중을 가하여 보는 말뚝의 연직재하시험이 많이 이용되고 있다. 그러나 이러한 말뚝의 재하시험 결과로 지지력을 판정하는 것도 그다지 용이하지는 않다. 뿐만 아니라 설계에 필요한 지지력을 결정하는 판정기준도 다양하여 각 기준에 의하여 결정된 지지력 사이에는 큰 차이가 있다.

보다 간편하고 신뢰성이 있는 지지력 판정기준의 확립이 시급한 실정이다.

토질구조물 중 깊은 기초의 안전성에 대한 해석은 주로 안전율이란 개념으로 표시하는 것이 현재의 관용적

방법이다.

즉 허용안전율은 이론적 방법이라기 보다는 과거부터 축적된 경험과 선례에 의한 값이기 때문에 경험에 없는 대상의 안정해석엔 무력하고 안전해석에 관계된 제요소들은 모두 단일치로 취급하고 있다.

그러나 기초지반의 안정해석에 관여하는 요소들은 본질상 모두 단일치가 될 수 없는 확률변수임에 틀림 없다. 이와같이 단일치를 사용하는 안전율은 확정론적 접근방법이며 많은 불확실성을 합리적으로 고려할 수 없다. 그리고 안전율은 구조물을 안전과 파괴로 양분할 수는 있지만 안전의 정도인 신뢰성을 판단할 수는 없다. 그렇기 때문에 안전율에 대처할 수 있는 새롭고 합리적인 신뢰성 해석방법으로 확률론적 접근방법의 정립이 필요하게 되어 신뢰성 지수란 개념이 도입이 되어 토목구조물에서는 오래전부터 연구가 진행되어 왔다.<sup>1,2,3,4,5,6,7)</sup>

본 연구에서는 전술한 바와같이 광양제철소 기초말뚝에 대하여 실시된 재하시험결과 항타기록<sup>8)</sup>을 이용하여 정역학적 지지력공식 및 동역학적 지지력공식과 비교 분석하여 극한지지력의 불확실성을 산정한 결과로 Lind-Hasofer의 AFOSM 신뢰성 이론을 이용한 근사 확률분포법의 알고리즘을 개발하여 유상관-정규분포, 무상관-비정규분포, 유상관-정규분포, 유상관-비정규분포 등의 유형으로 신뢰성 지수를 비교 검토하고 현행 도로교 표준시방서의 말뚝기초에 대한 현행안전

\* 정회원, 순천장업전문대학 토목과, 공학박사

\*\* 순천장업전문대학 토목과 교수

율을 검토하고 또 우리나라 현실을 고려한 불확실량수 준의 선택과 목표신뢰성 지수에 따른 공정 안전율을 제시하는 것을 주목적으로 한다.

## II. 신뢰성해석 및 불확실량산정

### 1. 신뢰성해석

#### 1) 무상관 표준정규화

2차 모멘트 신뢰성 방법은 구조신뢰성에 관계되는 요소의 불확실량을 단지 기대치(1차 모멘트)와 분산(2차 모멘트)으로 표현한다는 점이다.

기본 변수  $Z_i$ 는 하중, 강도, 기하조건, 통계조건 그리고 모델 불확실량 등이다.

위와같은 1계 2차 모멘트법의 단점을 극복하기 위하여 불변 2차 모멘트(Invariant Second Moment) 또는 고급 2차 모멘트(Advanced Second Moment, ASM or AFOSM)법이라고 불리우는 방안이 Hasofer와 Lind에 의하여 제안되었는데 이를 최소 거리법(Minimum Distance Method)이라고 하기도 한다.

극한 상태함수  $\phi(\cdot)$ 의 Taylor Series 전개는 파괴점에서 선형화된 것인데 이 선형화점을 설계점(Design Point)이라고 부른다.

구조물의 한계상태 방정식을

$$Z = \phi(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (1)$$

로 나타낼 때 극한 상태에서 변수  $X_i$ 는 다음과 같은 좌표로 변환된다.

$$X'_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{\sigma_{X_i}} \quad (2)$$

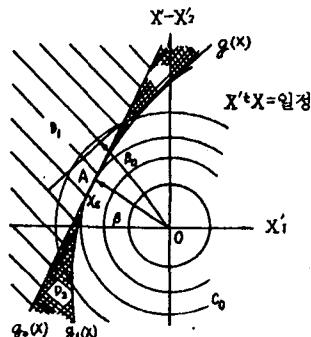


그림1 무상관 확률변수의  $\beta$ 해석

신뢰성 지수  $\beta$ 는 이 방법에 의하여 환산  $X'$ 좌표계의 원점으로부터 파괴면까지의 최단거리로 정의된다. 그림1에서 신뢰성 지수  $\beta$ 는 거리 OA이다.

무상관 표준정규화 변량  $X'$ 공간의 좌표원점에서 부터  $\phi(X)=0$ 인 면까지의 거리(D)는 다음과 같다.

$$D = \sqrt{X'_1^2 + \dots + X'_m^2} = (X'X')^{1/2} \quad (3)$$

여기서,  $t$ 는 벡터  $X'$ 의 전치(transpose)이다.

따라서, 파괴면에 존재하는 점은 다음과 같은 식을 만족해야 한다.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimize } D \\ \text{subject to } g(X) = 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

식(4)에 Lagrange 승수법을 적용하면,

$$L = D + \lambda g(X) \quad (5)$$

여기서,  $\lambda$ 는 Lagrange's multiplier이다.

식(5)에서 L이 최소가 되려면 다음 조건식을 만족해야 한다.

$$\left. \begin{array}{l} \partial L / \partial X' = 0 \\ \partial L / \partial \lambda = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

따라서 식(6)에 식(3)을 대입하여 이것을 벡터형식으로 표현하여 구하면 다음과 같다.

$$\frac{X'}{(X'X')^{1/2}} + \lambda G = 0$$

$$\text{또는 } X' = -\lambda DG \quad (7)$$

식 (7)을 식(3)에 대입하여 Lagrange승수  $\lambda$ 를 구하면,

$$D = [(\lambda D G^t)(\lambda D G)]^{1/2} = \lambda D (G^t G)^{1/2} \quad (8)$$

$$\lambda = (G^t G)^{-1/2}$$

식 (8)를 (7)식에 대입하여 정리하면 좌표원점에서 한계상태까지의 거리, 즉 신뢰성지수  $\beta$ 를 구하는 식으로 다음과 같다.

$$\beta = \frac{\phi}{\sigma_g} = \frac{X^t G}{(G^t G)^{1/2}} \quad (9)$$

여기서,  $G = \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right), \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right), \dots, \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right) \right]^T$  입.

한편, Hasofer-Lind 식(8)의 신뢰성 지수  $\beta$ 는 다음 식들을 반복성에 의하여 구할 수 있게 된다.

$$\alpha_i = \frac{\left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \sigma_{x_i}}{\left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \sigma_{x_i} \right)^{1/2}} \quad (10)$$

$$X_i^* = X_i - \alpha_i \beta \sigma_{x_i} \quad (11)$$

$$g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) = 0 \quad (12)$$

여기서 편미분  $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ 는 설계점  $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ 에서 산정해야 하며  $\alpha_i$ 는 변수 방향  $X_i$ 의 Vector이다.

#### 2) 유상관 표준정규화

신뢰성해석에서 기본설계변수들 사이에 상관이 존재하게 된다. 그러나 상관관계의 복잡성 때문에 무시하고 통계적으로 독립변수로 취급하여 신뢰성 해석을 행해왔다.

따라서, 유상관 표준정규화 모델을 해석하면 설계변수들 사이의 공분산 또는 공분산 행렬(Covariance matrix),  $[C]$ 는 기본 설계변수  $X_i$ 와  $X_j$  사이의 공분산이다. 그리고, 표준 정규분포화 변량  $X_i$ 와  $X_j$ 에 대한 공분산은  $Cov(X_i X_j)$ 이므로, 이 공분산행렬  $[C]$ 로 된다.

그리고, 기본 설계변수들 사이 상관관계를 고려하는 경우에 대한 신뢰지수 및 Check Points는 다음과 같이 적교변환을 통하여 무상관 변량으로 변환시킴으로써

절 II.1.1의 이론을 그대로 적용할 수가 있다. 즉  
 $Y = T^t X$  ..... (13)

여기서  $X =$  유상관변량의 벡터 형식

$Y =$  무상관화한 벡터

$T =$  직교변환행렬을 벡터형으로 표시한 것으로  
 서  $t$ 는 전치행렬

따라서, 유상관 정규분포 변량  $X'$ 에 대해서는 직교  
 변환행렬  $T$ 와 상관계수 행렬  $[C']$ 를 써서 식 (4) 및  
 (5)과 같이 나타내면 각각 다음과 같다.

$$\text{Minimize } D = (X'^t [C'] X')^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

subject to  $g(TY) = 0$

$$L = (X'^t [C'] X') + \lambda g(TY) \quad (15)$$

식 (6)에서 식 (8)까지와 같은 방법으로  $L$ 이 최소가  
 되는 조건에 대한 해를 구하면 그림 2에서와 같이  $\beta$   
 는 다음과 같다.

$$\beta = \frac{-G^* X'^*}{(G^* [C'] G^*)^{1/2}} \quad (16)$$

그런데,  $Y$ 의 공분산 행렬,  $[C_r]$ 을 살펴보면,

$$[C_r] = E(YY') = E(T'X'X' T)$$

$$= T'E(X'X')T = T^t[C']T \quad (17)$$

식 (17)의 최우변에서  $[\lambda]$ 는 고유치로서 다음과 같아  
 된다.

$$[C_r] = T^t[C']T = [\lambda] \quad (18)$$

따라서,  $[C']$ 의 고유치가 변량  $Y, Y, \dots, Y$ 에 대한 각  
 각의 분산임을 알 수 있다.

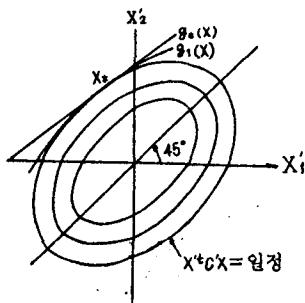


그림 2 유상관 확률변수의  $\beta$ 해석

### 3) 근사화률분포법

확률변수  $X$ 가 비정규분포인 경우의 거동함수의 파  
 괴화률이나 신뢰지수를 구하려면, 계산의 편의상 이것  
 을 정규분포화 변량으로 변환시키는 방법이 일찍이 발  
 달되어 왔다. 반복법에 의하여 수행되어 지는데 Rackwitz와 Fiessler는 비 정규분포 함수를 등가의 정  
 규분포 함수로 전환하는 방법을 고안 하였는데 이를  
 Rackwitz-Fiessler의 반복법이라고 부르고 이에 의  
 한 신뢰성 지수를  $\beta$ 로 칭하기로 한다. 즉, 등가의 정규  
 분포  $X_i^*$ 과  $\alpha_{ik}^*$ 요소를 산정 하였는데 다음 식과 같다.  
<sup>10)</sup>

$$\sigma_i^* = \frac{\phi^{-1}[F_i(X_i^*)]}{f_i(X_i^*)} \quad (19)$$

$$X_i^* = X_i^* - \phi^{-1}[F_i(X_i^*)]\sigma_i^* \quad (20)$$

여기서  $F_i$ 와  $f_i$ 는 각각  $X$ 의 비 정규분포 함수와 밀도  
 함수이고  $\phi(\cdot)$ 와  $\phi'(\cdot)$ 는 각각 표준 정규 변수에  
 대한 계산분포 함수와 밀도함수이다.  $\bar{X}_i^*$ 와  $\alpha_{ik}^*$ 을 결정  
 하여 식 (8), (15)로 신뢰성지수  $\beta$ 값을 구할 수 있고  
 식 (9) ~ 식 (11)을 반복하여 구할 수 있다.

따라서 본연구에서는 이와같은 신뢰성해석을 이용하  
 여 무상관-정규분포, 무상관-비정규분포, 유상관-정  
 규분포, 유상관-비정규분포 유형으로 신뢰성 지수  $\beta$   
 를 다음과 같은 단계의 반복알고리즘으로 구할 수 있  
 다.

단계1, 최초의  $\beta$ 를 가정

단계2, 설계변수의 설계점  $X_i^* = \bar{X}_i$ 로 가정

단계3, 비정규분포변수에 대한 등가정규분포의 평균  
 과 표준편차 계산 (식(18)(20)이용)

단계4,  $X_i^*$ 점의 편도함수  $G^*$ 를 계산(식(8)이용)

단계5, 방향여현  $\alpha_i$ 계산(식(10)이용)

단계6, 새로운  $X$  값의 계산(식(12),(19)이용)

단계7,  $\alpha_i$ 가 일정할 때까지 식(3)-(7)의 단계를 반  
 복시행

단계8, 최종 신뢰성지수  $\beta$ 계산

### 2. 불확실량의 산정

기초구조물의 불확실량은 토질조사, 재하실험에 의  
 한 지지력의 오차, N치의 오차 등 기초의 천단강도에  
 통제적 오차가 생기게 되며, 기초에 작용하는 하중의  
 모델화, 극한지지력공식의 해석상의 모델화등에 기인  
 하게 된다. 이러한 불확실량은 신뢰성해석에 있어서  
 중요하다.

먼저, 말뚝기초의 저항에 대한 불확실량은 말뚝기초  
 의 연직극한지지력의 설계상오차등으로 여러가지 불확실  
 요인에 의해 현장의 재하실험과 설계식과 상당히 차이  
 가 있는 것이다. 실제 말뚝기초의 극한지지력을 신뢰  
 성설계에 의해 추정할 때 지지력산정식에 포함한 오차,  
 토질실험의 분포, 측정오차, 시공오차등을 확률변수로  
 취급해야 한다.

따라서 본 연구에서는 확률변수를 지지력산정식의  
 재하실험의 지지력식의 비, 지반강도(N치)의 실측값과  
 지지력 산정시의 비로 취급하여, 이를 설계변수가 통  
 제적으로 서로 독립이라 가정하면 말뚝기초의 저항에  
 대한 내하력의 산정식은 다음과 같다.

$$R = \alpha r \cdot \eta r \cdot R_{nf} + \alpha p \cdot \eta p R_{np} \quad (21)$$

여기서  $R =$  말뚝기초 저항(내하력)

$R_{nf}$  = 지지력산정식의 주변마찰력

$R_{np}$  = 지지력산정식의 선단지지력

$R_{lf}$  = 재하실험의 주변마찰력

$R_{lp}$  = 재하실험의 선단지지력

$$\alpha \alpha F = \frac{R_{lf}}{R_{nr}} (\alpha p = \frac{R_{lp}}{R_{np}}) \text{ 지지력의 확률변수}$$

$\eta r, \eta p$  말뚝주변(말뚝선단)의 확률변수식 (21)의 2  
 개의 확률변수로 나타내면  $R$ 의 평균 및 변동계수는  
 다음과 같이 된다.



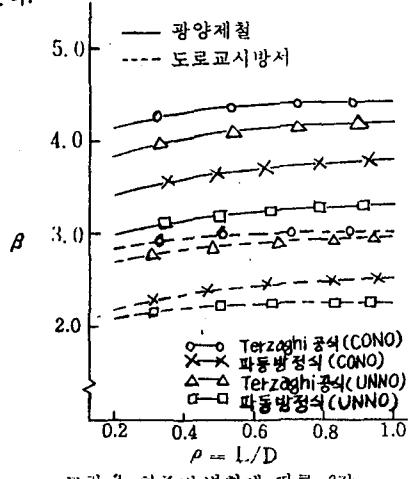
또한 광양제철에서 사용한 시방서와 도로교시방서에 의한  $\beta$ 값을 비교해 보면, 광양제철의  $\beta$ 값이 도로교시방서의  $\beta$ 값보다, 1.2정도 높게 나타나고 있다. 이는 말뚝기초의 저항에 대한 불확실성이 적을수록  $\beta$ 값이 높아짐을 알 수 있다.

따라서 현행 강도설계에 의한 신뢰성을 검정해 본 결과, 정역학적 지지력공식으로는 Terzaghi와 Meyerhof공식이 신뢰성이 높고, 동역학적 지지력 공식에서는 파동방정식에 의한 지지력산정식의 높은 신뢰성을 갖는다고 볼 때 광양제철내의 지지력에 대한  $\beta$ 값은 UNNO 및 CONN인 경우  $\beta=4.3\sim 3.7$ 정도로 목표신뢰성지수  $\beta_0=4.0$ 가 적당하다고 사료되고, 도로교시방서에서는 Ellingwood와 문현 3에서 취한  $\beta=3.0$ 가 타당하다고 본다.

그리고 표·4에서 무상관-비정규분포형(UNNN)의  $\beta$ 값이 다른 3가지 유형보다 현저하게 높게 나타난 것은 저항 R을 대수분포로, 할하중 SL를 극치-1분포형으로 했기 때문이다. 극치-1분포형이 말뚝기초의 지지력에 대한 신뢰성지수  $\beta$ 값에 민감함을 알 수 있다.

그림·3은 하중비  $\rho=L/D$ 가 변함에 따라  $\beta$ 값은 UNNO유형과 CONO유형으로 분석한 결과, 하중비가 커짐에 따라  $\beta$ 값이 커짐을 알 수 있다. 그리고 광양제철의  $\beta$ 값이 도로교시방서의  $\beta$ 값보다 1.07~1.37정도 높게 나타내고 있다.

이는 LRFD규준에 일반구조물에 대해서는  $\beta=3.0$ , 중요구조물에서  $\beta=4.5$ , 가설구조물에서는  $\beta=2.5$ 로 하고 있는데 광양제철소내의 토질이 연약지반이기 때문에 중요구조물로 간주하여  $\beta=4.0$ 로 함이 타당하다고 본다.



그림·3 하중비 변화에 따른  $\beta$ 값

한편, 광양제철소 부지에 이용한 정역학적 및 동역학적 극한지지력 공식의 적합성을 회귀분석해 본 결과 Terzaghi 공식의 상관계수는 0.967, 파동방정식의 상관계수는 0.923으로 가장 적합하다고 판정하였다.<sup>1)</sup> 따라서 이 2개의 공식을 사용하여 광양제철과 도로교시방서의  $\beta$ 값을 상관계수의 변화에 따라 계산하면 표·5

와 같다.

표·5. 상관계수의 변화에 따른  $\beta$ 값( $\rho=1.0$ 인 경우)

상관계수 $\rho_{R,D}$	광양제철		도로교시방서	
	정역학적지지력	동역학적지지력	정역학적지지력	동역학적지지력
0.9	4.381	3.824	3.029	2.563
0.8	4.350	3.782	3.014	2.545
0.7	4.318	3.740	2.999	2.526
0.6	4.289	3.701	2.985	2.509
0.5	4.259	3.663	2.971	2.491
0.4	4.231	3.626	2.957	2.474
0.3	4.203	3.590	2.943	2.458
0.2	4.175	3.555	2.929	2.441
0.1	4.148	3.520	2.916	2.425

표·5에서와 같이 Terzaghi공식과 파동방정식에 의해 상관계수  $\rho_{R,D}=0.9\sim 0.1$ ,  $\rho_{D,L}=0.1\sim 0.9$ 로 변화할때  $\rho_{R,D}$ 가 작고  $\rho_{D,L}$ 가 클수록 광양제철의 신뢰성지수  $\beta=0.23\sim 0.30$ 정도, 도로교시방서의  $\beta=0.11\sim 0.14$ 정도까지 감소하고 있다.

표·6. 파동방정식에 의한 공칭안전율( $n'$ )

분포유형	광양제철		도로교시방서	
	no	$n'$	no	$n'$
UNNO	1.839	1.988	1.751	1.892
CONO	1.933	2.089	1.802	1.948
CONN	1.915	2.069	1.766	1.908

표·6. 은 동역학적 지지력에 의한 말뚝기초의 중앙안전율( $n_0$ )과 공칭안전율( $n'$ )을 나타낸 것으로 현행 WSD에서 사용한 안전율  $n'=2.0$ 보다 다소 낮게 나타나고 있으나, 현행 안전율과 거의 일치하다고 판단된다.

#### IV. 결론

본 연구의 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1) 현행 강도설계법의  $\phi'=0.85$ ,  $\gamma_0=1.2$ ,  $\gamma_L=1.8$ 로 시방서 검정결과 목표신뢰성지수( $\beta_0$ )는 광양제철의 경우,  $\beta_0=4.0$ 정도 도로교시방서인 경우  $\beta=3.0$ 정도로 채택함이 타당하다고 본다.

2) 신뢰성해석을 UNNO, UNNN, CONO, CONN유형으로 분석한 결과, 토성재료의 특성, 흙의 내부마찰력각, N치의 분포, 저항과 하중사이 상관을 고려 한다면 유상관-비정규분포형(CONN)이 신뢰성해석에 적합하다고 판단된다.

3) 현행 말뚝기초의 안전율을 동역학적 지지력의 파동방정식에서  $n'=2.0$ 을 사용하고 있는데 공칭안전율로 현행 안전율은 사용하여도 적당하다 판단된다.

## 참 고 문 헌

1. 포항종합제철주식회사, 광양제철소 기초항항터 및 재하설명보고서, 1984. 12.
2. 포항제철주식회사, 광양공업단지조성에 관한 토목 공학심포지움, 1988. 5
3. 조효남, “신뢰성이론에 의한 R.C용역의 안정해석 및 설계규준,” 대한토목학회논문집, 제3권, 제3호, 1983. 9월
4. 前田良刀・遠藤元一・松井護二：場所打杭の支持力に関する信頼性評価, 橋梁と基礎, Vol. 20, No. 5 pp. 8~16, 1986.
5. 山田善一・松本忠夫・江見晋・大志万和也：基礎構造物の設計における安全性評価, Vol. 17, No. 5 pp 10~16, 1983.
6. 岡原美知夫：確率そらるよる杭の支持力の安全性評価, 橋梁と基礎, Vol. 14, No. 7, pp. 38~40, 1980.
7. Meyerhof, G.G., "Partial and Total Safety factors" Proceeding of 9th Geotechnical Eng., 1977. pp.503~505.
8. Haosfer, A.M. and Lind, N., "An Exact and Invariant First-Order Reliability Format," J. of Engineering Mechanis, ASCE, Vol.100, No. EM1. 1974. pp111~121.
9. Shinozuka, Massanobu, "Basic Analysis of Structural Safety," Journal of Structural Engineering Division, ASCE, Vol.109, No.3, 1983. pp721~738
10. Rackwitz, R., and Fiessler, B., "Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences," Computer and Structures, Vol.9, 1978, pp489~494