

평면판의 탄소성 좌굴 특성 해석

Analysis of Elasto-Plastic Buckling Characteristics of Plates

김문겸* 김소운** 황학주***
Kim, Moon Kyum Kim, So Woon Hwang, Hak Joo

ABSTRACT

Recently, the finite element method has been successfully extended to treat the rather complex phenomena such as nonlinear buckling problems which are of considerable practical interest. In this study, a finite element program to evaluate the elasto-plastic buckling stress is developed. The Stowell's deformation theory for the plastic buckling of flat plates, which is in good agreement with experimental results, is used to evaluate bending stiffness matrix. A bifurcation analysis is performed to compute the elasto-plastic buckling stress. The subspace iteration method is employed to find the eigenvalues. The results are compared with corresponding exact solutions to the governing equations presented by Stowell and also with experimental data due to Pride. The developed program is applied to obtain elastic and elasto-plastic buckling stresses for various loading cases. The effect of different plate aspect ratio is also investigated.

1. 서론

판은 고강, 빌딩 등의 토목구조물 이외에도 항공기, 선박 등의 구조물에 다양하게 쓰이고 있는 구성요소 중의 하나이다. 따라서 그 해석방법에 많은 관심이 기울여졌고 다방면에 걸쳐 발전이 거듭되었다. 구조물의 해석에 유한요소법이 도입된 이후 판에 대해서도 여러가지 접근방법에 의한 유한요소해법이 개발되어 왔다. 이러한 유한요소법의 개발은 판 구조물 설계에 있어 중요한 문제의 하나인 좌굴조건 해석에도 효율적인 방법을 제시하기에 이르렀다.

일반적으로 탄성 좌굴 문제의 해석에는 비선형 구조 해석에 쓰이고 있는 하중증분 형태의 반복해법과 고유치법 이용한 해법이 사용될 수 있다. 하중 증분에 의한 해석기법은 좌굴 전후의 거동을 파악하는데는 유용하지만 해석 시 많은 계산시간과 비용을 필요로 하게 된다. 좌굴 전후의 거동보다는 좌굴하중만을 구하고자 할 경우에는 고유치법 이용한 해법을 사용하는 것이 보다 효율적이고 경제적이게 된다. 그러나 고유치법 이용한 좌굴해석 기법은 대부분이 재료의 물성을 선형 탄성범위 내로 가정하고 있기 때문에 탄소성 거동을 하는 재료의 해석에는 부적합하다. 일반적으로 연성재료는 비선형 탄소성 거동을 하기 때문에, 이런 재료를 비탄성도 내의 허용응력만을 기준으로 해석, 설계하면 비합리적일 뿐만 아니라 재료의 많은 손실을 가져오게 된다. 따라서 이런 재료를 합리적으로 해석하기 위해서는 적합한 탄소성 해석을 수행하는 것이 불가피하다.

판은 이축응력을 받을 수 있고 좌굴 발생시의 응력분포가 좌굴전과는 다르게 되기 때문에 적용되는 소성이론의 종류에 따라 그 이론해가 매우 예민하게 결정된다. 판의 소성좌굴 현상에 대하여 흐름이론(flow theory)과 변형이론(deformation theory)의 두 가지 이론이 대표적으로 연구되어 오고 있다. 본 연구에서는 좌굴현상을 파악하는 것이 중요한 값

은 판에 대하여 변형이론에 기초한 소성이론^[1]을 적용하여 탄소성 좌굴해석 프로그램을 개발하고 이를 사용하여 여러가지 경계조건과 하중조건에 따른 좌굴거동을 구명하고자 한다.

2. 유한요소 문제형성

판의 좌굴하중을 구하는 문제는 판의 힘 문제들 다루는 일반적인 유한요소해법을 확장하여 적용시킬 수 있다. 그러나 좌굴문제에 있어서는 구조강성행렬이 면내력과 횡방향 힘과의 상호작용을 포함하여야 한다.^[2] 이 추가되는 강성행렬 즉 기하강성행렬(geometric stiffness matrix) 또는 초기응력행렬(initial stress matrix)을 4 절점요소를 사용하여 유도하고자 한다.

판 요소의 변위

판에 있어서 면내에 작용되는 하중에 의한 변형은 면내에 제한되고 그 변위는 x, y 방향으로의 $u(x,y), v(x,y)$ 로 표현될 수 있다. 즉, 절점 i 에서의 절점 변위벡터 $\{\delta_n^i\}$ 는 식 (1)과 같이 된다.

$$\{\delta_n^i\}^T = \{u_i \ v_i\}^T \quad (i=1, \dots, 4) \quad (1)$$

따라서, 각 요소는 8 개의 자유도를 가지며, 요소 n 에서의 절점변위벡터 $\{\delta_n^n\}$ 은

$$\{\delta_n^n\}^T = \{\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_8\}^T \quad (2)$$

이다. 영역 내 변위 $\{\delta_n\}$ 는 형상함수 $[N_n]$ 에 의하여 절점변위 $\{\delta_n^n\}$ 의 선형합으로 표현할 수 있다.

$$\{\delta_n\} = [N_n]\{\delta_n^n\} \quad (3)$$

판이 힘을 받을 때, 각 절점은 수직변위 w 와 x 축 및 y 축에 대한 회전각 등 3 개의 자유도를 갖는다고 할 수 있다. 따라서 i 번째 절점에서의 절점 변위는

* 연세대학교 공과대학 토목공학과 부교수
** 대림엔지니어링 정보사업본부
*** 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수

$$\{\delta b_i\}^T = \{w_i (\partial w / \partial x)_i (\partial w / \partial y)_i\}^T \quad (4)$$

으로 나타낼 수 있다. 4 개의 절점을 가진 n 번째 요소에서의 요소변위는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\delta b_n\}^T = \{\delta_9 \delta_{10} \dots \delta_{20}\}^T \quad (5)$$

판의 처짐 $\{\delta_b\} = w(x, y)$ 는 다음 식과 같이 형상함수 $[N_b]$ 와 절점변위 $\{\delta_b^n\}$ 의 곱으로 나타내어진다.

$$\{\delta_b\} = [N_b] \{\delta_b^n\} \quad (6)$$

식 (3) 과 식 (6) 을 조합하면 변위는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta_m\} \\ \{\delta_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [N_m] & [0] \\ [0] & [N_b] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_m^n\} \\ \{\delta_b^n\} \end{Bmatrix} = [N] \{\delta^n\} \quad (7)$$

변위-변형률 관계

판에 있어서의 변형률벡터 $\{\epsilon\}$ 는

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\}^T \quad (8)$$

로 표현된다. 식 (8) 의 변형률을 비선형항을 고려하여 변위의 항으로 나타내면

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{(\partial w / \partial x)^2}{2} \\ \frac{(\partial w / \partial y)^2}{2} \\ (\partial w / \partial x)(\partial w / \partial y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\epsilon_L\} + \{\epsilon_{NL}\} \quad (9)$$

이다. 여기서 u, v, w 는 각각 중립면의 x, y, z 방향 변위를 의미한다. 식 (9) 의 첫번째 항 $\{\epsilon_L\}$ 은 선형변형률을 나타내며 두번째 항 $\{\epsilon_{NL}\}$ 은 비선형변형률을 나타낸다. 일반화된 선형변형률 $\{\epsilon_L\}$ 은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\{\epsilon_L\} = [B_L] \{\delta\} = [B_L] [N] \{\delta^n\} = [B_L] \{\delta^n\} \quad (10)$$

이 된다. 식 (9) 의 일반화된 비선형변형률 $\{\epsilon_{NL}\}$ 은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\{\epsilon_{NL}\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [A] \{0\} \quad (11)$$

이다. 여기서 수직변위 w 의 경사 $\{0\}$ 는

$$\{0\} = \begin{Bmatrix} \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \partial / \partial x \\ 0 & 0 & \partial / \partial y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [G] \{\delta\} = [G] [N] \{\delta^n\} \quad (12)$$

이다. 따라서, 비선형변형률은

$$\{\epsilon_{NL}\} = \frac{1}{2} [A] [G] [N] \{\delta^n\} = [B_{NL}] \{\delta^n\} \quad (13)$$

이 된다.

식 (10) 과 식 (13) 을 조합하면 변형률을 다음과 같이 절점변위의 항으로 표현할 수 있다.

$$\{\epsilon\} = (\{B_L\} + [B_{NL}]) \{\delta^n\} = [B] \{\delta^n\} \quad (14)$$

응력과 변형률의 관계에서 응력벡터를 선형 및 비선형변형률의 항으로 나타내면

$$\{\sigma\} = \{\sigma_L\} + \{\sigma_{NL}\} = [D] (\{\epsilon_L\} + \{\epsilon_{NL}\}) \quad (15)$$

로 쓸 수 있다.

강성행렬

가상변위의 원리를 적용하여 한 요소의 평형조건 식을 구성하면 다음과 같다.

$$\int_V \{d\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{d\delta\}^T \{b\} dV + \int_S \{d\delta\}^T \{t\} dS \quad (16)$$

여기서 $\{d\delta\}$ 는 가상변위이고 $\{d\epsilon\}$ 은 가상변위에 적합한 가상변형률이며, $\{b\}$ 와 $\{t\}$ 는 각각 몸체력 및 표면력이다. 변형률의 증분 $\{d\epsilon\}$ 는 식 (10) 과 (13) 으로부터

$$\{d\epsilon\} = (\{B_L\} + 2[B_{NL}]) \{d\delta^n\} \quad (17)$$

이므로, 식 (7), (14), (15) 들 식 (16) 에 대입하면

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV \{\delta^n\} + \int_V [B_{NL}]^T \{\sigma\} dV = \int_V [N]^T \{b\} dV + \int_S [N]^T \{t\} dS \quad (18)$$

이다. 여기서 좌변 첫 항에서

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = [K_L] + [K_{NL}] \quad (19)$$

이라고 할 수 있다. 식 (19) 에서 $[K_L]$ 는 일반적인 미소변형에 대한 강성행렬로서

$$[K_L] = \int_V [B_L]^T [D] [B_L] dV \quad (20)$$

이다. $[K_{NL}]$ 은 초기변위행렬 (initial displacement matrix) 또는 대변위행렬 (large displacement matrix) 로서

$$[K_{NL}] = \frac{f}{V} ([\beta_L]^T [D] [\beta_{NL}] + [\beta_{NL}]^T [D] [\beta_{NL}] + [\beta_{NL}]^T [D] [\beta_L]) dV \quad (21)$$

이다. 한편, 식 (18)의 좌변 두번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{f}{V} [\beta_{NL}]^T \{\sigma\} dV = \frac{f}{V} \frac{1}{2} [N]^T [G]^T [S] [G] [N] dV \{\delta^a\} = [K_0] \{\delta^a\} \quad (22)$$

여기서 $[K_0]$ 는 초기응력행렬 (initial stress matrix) 또는 기하강성행렬 (geometric stiffness matrix)로서, 이는 응력수준에 비례하고 재료의 물성에는 무관한 대칭행렬이다. 식 (22)에서 $[S]$ 는 판에 작용하는 면내력의 행렬로서

$$[S] = \begin{bmatrix} N_x & N_y \\ N_y & N_{xy} \end{bmatrix} \quad (23)$$

이다.

3. 판의 탄소성 좌굴

판의 좌굴에 대한 소성이론으로 흐름이론과 변형이론이 연구되어 왔으나 실험치와의 분석에서 변형이론이 판의 탄소성 좌굴 거동에 더욱 좋은 결과를 보여 주었다^[3]. 본 연구에서는 Stowell의 변형이론을 판의 탄소성 좌굴에 적용하도록 한다.

Stowell의 변형이론

Stowell^[4]은 Ilyushin의 변형이론^[6]을 기둥의 소성좌굴에 기초하여 단순화시켰다. 이 이론에서는 좌굴이 일어나는 중에 막응력의 변화가 없고 탄성 unloading이 없다고 가정한다. 이러한 가정 사항은 좌굴전 형상의 단면에서의 탄소성 경계의 가능성 때문에 좌굴 전의 응력장을 일정하다고 가정하므로 해석 상의 복잡한 문제를 상당히 단순화시킬 수 있다. Stowell은 다음과 같이 유효응력 σ_1 와 유효변형률 ϵ_1 를 도입하여 응력과 변형률 간의 관계를 구성하였다.

$$\epsilon_1 = f(\sigma_1) = \sigma_1 / E_s \quad (24)$$

여기서 E_s 는 일축인장일 때 응력-변형률 곡선에서의 접선계수이다. 유효응력 σ_1 및 유효변형률 ϵ_1 는 다음 식과 같다.

$$\sigma_1 = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (25)$$

$$\epsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2)^{1/2} \quad (26)$$

식 (24)에 의한 응력-변형률 관계식은

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= (\sigma_x - 0.5\sigma_y) / E_s \\ \epsilon_y &= (\sigma_y - 0.5\sigma_x) / E_s \\ \gamma_{xy} &= 3\tau_{xy} / E_s \end{aligned} \quad (27)$$

으로 나타내어 질 수 있는데 여기서 재료는 비압축성이라고 가정하여 포아손 비는 0.5가 사용되었다.

Ramberg-Osgood의 응력-변형률 관계식

그림 1은 유효응력과 유효변형률 사이의 관계를 나타낸 것으로서 곡선의 일축 응력-변형률 특성은 실험에 의하여 결정될 수 있다. 이 곡선을 아래 식과 같은 Ramberg-Osgood^[6]의 응력-변형률 관계식에 의하여 수식화할 수 있다.

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \frac{3}{7} \frac{\sigma_1}{E} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{0.7}} \right)^{n-1} \quad (28)$$

여기서 E 는 탄성 계수이며 n 은 다음식으로 부터 얻어지는 형상계수이다.

$$n = 1 + \log(17/7) / \log(\sigma_{0.7} / \sigma_{0.85}) \quad (29)$$

윗 식에서 $\sigma_{0.7}$ 및 $\sigma_{0.85}$ 는 각각 응력-변형률 곡선이 0.7E와 0.85E의 접선계수 (secant modulus)를 가질 때의 응력값들이다. 접선계수 및 접선계수는 탄성계수에 대한 비로서 나타낼 수 있다.

$$E_t / E = 1 / [1 + (3n/7)(\sigma_1 / \sigma_{0.7})]^{n-1} \quad (30)$$

$$E_s / E = 1 / [1 + (3/7)(\sigma_1 / \sigma_{0.7})]^{n-1} \quad (31)$$

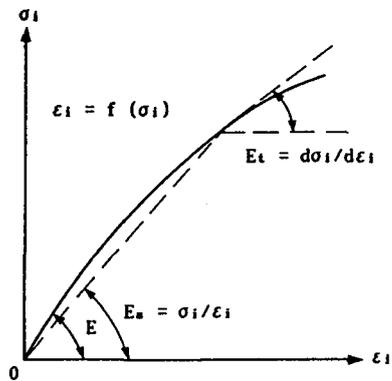


그림 1 유효응력 - 유효변형률 곡선

힘-곡률 관계식

전술된 소성이론에 근거하여 일반적인 판의 힘-곡률 관계식에 적용하면 힘 문제에 대하여 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ 2M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{9} \begin{bmatrix} D_1 & D_3 & -D_5/2 \\ D_3 & D_2 & -D_6/2 \\ -D_5/2 & -D_6/2 & 2D_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (32)$$

또는

$$\{\sigma_b\} = [D_p] \{\epsilon_b\} \quad (33)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 - \frac{3}{4}(\sigma_x/\sigma_1)^2 (1 - E_t/E_s) \\ D_2 &= 1 - \frac{3}{4}(\sigma_y/\sigma_1)^2 (1 - E_t/E_s) \\ D_3 &= 3(\sigma_x\tau_{xy}/\sigma_1^2)(1 - E_t/E_s) \\ D_4 &= \frac{1}{2}[1 - 1.5(\sigma_x\sigma_y/\sigma_1^2)(1 - E_t/E_s)] \\ D_5 &= \frac{1}{2}[1 - 3(\tau_{xy}/\sigma_1)^2(1 - E_t/E_s)] \\ D_6 &= 3(\sigma_x\tau_{xy}/\sigma_1^2)(1 - E_t/E_s) \end{aligned} \quad (34)$$

이다. 식 (33) 에서 $[D_p]$ 는 소성효과를 포함하는 계수 행렬로서, 식 (15) 에서의 $[D]$ 행렬의 힘 부분에 대응된다.

판의 탄소성 고유치 문제

식 (18) 의 강성행렬은 접선강성행렬 (tangent stiffness matrix) 인 $[K_T]$ 로 표현될 수 있다.

$$[K_T] = [K_L] + [K_{NL}] + [K_G] \quad (35)$$

Lagrangian 문제형성에 있어서 선형 하중 분포에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$[K_T]^{(q)} \{\Delta q\} = \{\Delta p\} \quad (36)$$

여기서 $\{q\}$ 는 하중이 증가되기 전의 평형위치에서의 변위벡터이고, $\{\Delta p\}$ 는 하중 증분, $\{\Delta q\}$ 는 변위 증분이다. 구조물의 좌굴하중은 하중의 변화없이 무한한 변위를 일으키는 상태를 의미하며 비선형계에 대하여 식 (36) 의 $\{\Delta p\} = \{0\}$ 인 상태에서 $\{\Delta q\}$ 에 대한 non-trivial solution 이 존재할 때의 하중 상태를 의미한다. 즉,

$$[K_T]^{(q)} \{\Delta q\} = \{0\} \quad (37)$$

로서 식 (37) 의 non-trivial solution 인 하중 P 가 좌굴하중이 된다. 위 식은 다음과 같은 고유치 문제로 표현된다.

$$\det [K_T] = \det ([K_L] + [K_{NL}] + [K_G]) = 0 \quad (38)$$

이 된다. 좌굴하중에 이르는 동안 기하학적 형상의 변화를 무시하면 초기변위 강성행렬을 무시할 수 있으므로^[7] 식 (38) 은

$$\det ([K_L] + [K_G]) = 0 \quad (39)$$

이 된다. 만약 면내응력이 λ 라는 계수만큼 증가된다면 이에 비례하여 기하강성행렬이 증가될 것이다. 결국 하중의 증가가 없는 λ 의 값을 찾을 수 있는데 이는

$$\det ([K_L] + \lambda [K_G]) = 0 \quad (40)$$

라는 일반적인 고유치 문제로 형성된다. 이러한 고유치에 의한 해법은 행렬식 계산에 의한 방법에서 발생하기 쉬운 가장 작은 임계좌굴하중 형상의 간과를 방지할 수 있으며 좌굴형상을 쉽게 구할 수 있다는 잇점을 가지고 있다. 식 (40) 의 해석을 위하여 본 연구에서는 subspace iteration method 를 이용한다. subspace iteration method 는 필요한 수 만큼의 고유치를 찾을 수 있으므로 임계좌굴하중 같은 가장 작은 고유치를 찾는 문제의 해결에 유용하다.

전술된 내용을 기준으로 하여 판의 탄소성좌굴 해석 유한요소 프로그램을 구성하였다. 이 프로그램에서는 먼저 탄성좌굴 해석으로부터 계산된 탄성좌굴 응력으로부터 반복해법을 위한 초기응력 증분을 산정한다. 이로 부터 탄소성 휨강성 행렬을 구하고 여기서 계산된 고유치값이 허용범위 내에 들면 해석을 마치게 되나 허용범위를 넘어서면 해석을 계속 수행하게 된다. 탄소성 좌굴 하중 계산을 위한 반복 기법으로는 Gupta 가 사용한 Sturm sequence 를 이용하는 방법^[8], El-Ghazaly 등이 사용한 power method 를 이용하는 방법^[3] 등이 있으나, 본 연구에서는 이분법 (bisection method) 에 의한 반복기법을 사용하였다.

4. 결과분석

본 장에서는 전술된 탄소성 좌굴 해석 프로그램을 이용하여 여러가지 재하 경우에 대한 임계좌굴하중을 구해보고자 한다. 판의 형상은 정사각형과 직사각형인 경우, 경계조건은 단순지지인 경우와 4 변 고정인 경우를 해석하였다. 단순지지 판에는 x 축 방향으로 등분포 하중이 작용하는 경우와 x, y 축 방향으로 등분포하중이 작용하는 경우를 해석하였고, 고정지지 판에는 x 축 방향으로 등분포 하중이 작용하는 경우를 해석하였다. 직사각형판에 대해서는 판의 장변의 길이를 변화시키며 좌굴 해석을 실시하였다. 계산된 탄소성 좌굴 하중치들은 Stowell^[4] 이 지배방정식으로부터 구한 엄밀해 및 Timoshenko^[9] 가 초기 접선계수를 사용하여 구한 탄성 좌굴치와 비교하였다. 또한, Pride^[10] 가 실험한 결과와도 비교하였다.

Stowell 해와의 비교

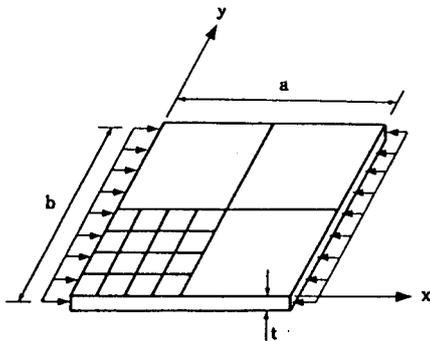
단순지지된 정사각형 판과 $a/b=1.5$ 인 직사각형 판에 대하여, 각각 x 축방향으로 등분포 하중이 작용하는 경우 ($\alpha=1.0, \beta=0.0$), x 축에 가해지는 등분포하중이 y 축 방향에 가해지는 크기의 2 배인 경우 ($\alpha=1.0, \beta=0.5$), x 및 y 축으로 동일한 등분포 하중이 작용하는 경우 ($\alpha=1.0, \beta=1.0$) 에 대하여 각각 임계좌굴하중을 구하였다.

그림 2 는 해석을 실시한 정사각형 판을 보여주고 있다. 판이 x, y 축에 대하여 대칭이므로 판의 1/4 에 대하여 4×4 개의 요소망을 구성하였다. 하중은 그 표기를 간단히 하기 위하여, x, y 방향으로의 하중인 σ_x 및 σ_y 를 일정한 응력값인 σ^* 에 대한 비로 나타내어

$$\alpha = \sigma_x/\sigma^*, \quad \beta = \sigma_y/\sigma^* \quad (41)$$

로 표시한다. a/b 가 1.5인 경우에는 6×4 개의 요소망을 구성하였다.

표 1 은 세가지 하중 조건에 따른 임계좌굴하중 값들을 표시하고 있다. 표에서 σ_{EXACT} 는 Stowell 에 의한 이분해이고, OPEN 은 본 연구에서 구한 해이다. 본 연구에서 구한 좌굴하중은 정해에 비하여 오차가 3 % 미만으로 미소하고, 좌굴에 대한 저항능력을 과대평가하고 있음을 알 수 있다. 이는 본 연구에서 변위법에 기준한 유한요소해석을 실시하여 판의 자유도를 인위적으로 구속하였기 때문에 판의 강성을 과대평가한 결과로서, 예측된 바와 같은 결과이다. 따라서, 요소망을 조밀하게 하면 오차는



$a = b = 50 \text{ cm}$
 $E = 7.03 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$
 $\sigma_{0.7} = 7.03 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2$
 $\sigma_{0.85} = 6.37 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2$
 $\sigma_{0.9} = 5.11 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2$
 $n = 10$
 $\nu = 0.5$

그림 2 정사각형 평면 판의 유한요소 망

표 1 단순지지된 사각형판의 임계좌굴응력

(단위: kgf/cm^2)

α, β	정사각형 ($a/b=1.0$)			직사각형 ($a/b=1.5$)		
	t/b	σ_{EXACT}	σ_{FEM}	t/b	σ_{EXACT}	σ_{FEM}
$\alpha=1.0$	0.0389	4569	4588	0.0375	4569	4588
	0.0429	5273	5311	0.0417	5273	5322
	0.0482	5976	6068	0.0477	5976	6031
	0.0560	6679	6799	0.0563	6679	6820
	0.0683	7382	7385	0.0695	7382	7506
$\beta=0.0$	0.0883	8085	8225	0.0904	8085	8243
	0.1195	8788	8958	0.1226	8788	8921
	0.0473	4569	4601	0.0421	4569	4589
	0.0519	5273	5331	0.0462	5273	5320
	0.0578	5976	6059	0.0519	5976	6059
$\beta=0.5$	0.0666	6679	6790	0.0608	6679	6741
	0.0794	7382	7530	0.0740	7382	7452
	0.0968	8085	8210	0.0923	8085	8196
	0.1211	8788	8953	0.1175	8788	8938
	0.0562	4569	4597	0.0477	4569	4571
$\alpha=1.0$	0.0649	5273	5309	0.0551	5273	5324
	0.0810	5976	6059	0.0679	5976	6026
	0.1041	6679	6799	0.0883	6679	6760
	0.1388	7382	7532	0.1178	7382	7488
	0.1892	8085	8238	0.1606	8085	8225
$\beta=1.0$	0.2630	8788	8963	0.2231	8788	8911

충분히 줄일 수 있는 것으로 사료된다.

실험치와의 비교

Pride 가 실험한 단순지지 직사각형 판의 실험 결과와 비교하기 위하여 동일한 판의 모형에 대하여 16×4 개의 요소망을 구성하여 해석을 실시하였다. 해석에 사용된 모형의 제원은 다음과 같다.

$a = 225 \text{ cm}$
 $b = 50 \text{ cm}$
 $t = 2.5 \text{ cm}$
 $E = 7.82 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$
 $\sigma_{0.7} = 4.48 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2$
 $\sigma_{0.85} = 4.24 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2$
 $\sigma_{0.9} = 3.52 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2$
 $n = 10$
 $\nu = 0.5$

해석 결과 4486.19 kgf/cm^2 의 임계좌굴하중을 구할 수 있었다. 이는 Pride 의 실험 결과인 4316.85 kgf/cm^2 의 값보다 3.92% 큰 값이나 El-Ghazaly 의 결과인 4429.34 kgf/cm^2 과는 매우 유사한 값이다. 또한 El-Ghazaly 가 흐름이론을 사용하여 구한 5146.47 kgf/cm^2 에 비하여 실험치에 보다 가까운 값을 알 수 있다. 또한 이것은 El-Ghazaly 가 해석시 수행한 반복횟수보다 약 30% 가량 적은 반복횟수로서 수렴되어 나온 값이다.

형상비 및 지지조건의 영향

a/b 가 1.0 인 정사각형 판의 경우부터 a/b 가 3.0 인 직사각형 판까지 모두 판의 두께가 0.05 - 0.10 인 경우에 대하여 해석을 실시하여 형상비에 따른 임계좌굴하중의 변화를 알아보았다. 판의 제원은 그림 2 에 표시한 바와 같다. 지지조건으로는 4 변 단순지지와 4 변 고정지지인 경우를 고려하여, 고정지지인 경우는 x 축방향 등분포 압축력을 받는 경우를 해석하였다. a/b 가 2.0, 2.5 및 3.0인 경우에는 각각 8×4 , 10×4 및 12×4 개의 요소망을 구성하여 해석을 실시하였다. 그림 3 은 각 경우에 대하여 해석한 결과로서, 임계좌굴하중은 $\sigma_{0.9}$ 에 대한 비로써 표시하였다. 그림에는 또한 Timoshenko 에 의한 탄성좌굴하중을 같이 도시하여 비교하였다.

그림 3 에서 형상비가 증가함에 따라 좌굴하중이 감소함을 볼 수 있다. 이는 탄성 좌굴의 경우와 동일한 추세이나 탄성 좌굴하중의 경우와 같은 급격한 변화는 볼 수 없다. 즉, 탄소성 재료의 경우는 a/b 가 작아지더라도 소성변형이 커짐에 따라 낮은 하중에서 좌굴이 일어나므로 형상비의 효과가 크지 않음을 알 수 있다.

4 변 고정된 경우의 탄소성 임계 좌굴하중은 단순 지지된 경우보다 약 10% 크게 클 수 있다. 그러나, 탄성좌굴의 경우에 지지조건이 좌굴하중의 크기에 큰 영향을 미치는데 비하면, 탄소성좌굴의 경우에는 지지조건의 영향이 미소하다고 생각할 수 있다.

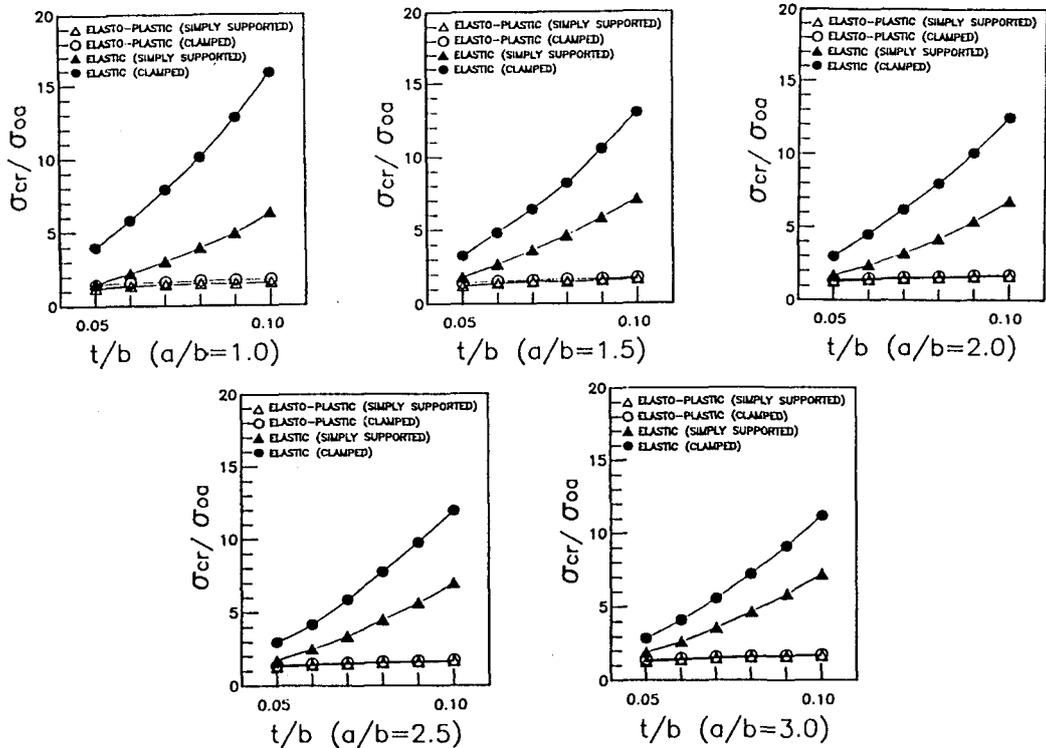


그림 3 탄소성 및 탄성 임계좌굴하중

5. 결론

본 연구에서는 판의 탄소성 좌굴 현상의 해석에 유한요소법을 적용시켜 판의 탄소성 좌굴하중을 구할 수 있는 프로그램을 개발하였고 그 타당함을 밝혔으며, 여러가지 재하 경우에 적용하여 그 실용성을 입증할 수 있었다. 해석 결과, 소성을 가진 재료로 된 판의 좌굴을 해석할 경우, 재료의 성질이나 판의 두께에 따라 탄성 좌굴 해석치와 큰 차이가 나타나므로 소성의 영향을 고려하여야 정확한 거동을 파악할 수 있음을 밝혔다. 또한, 본 연구에서 사용한 해석 모형의 경우 t/b 가 0.05 - 0.10 의 범위에서 4 변 고정된 경우가 단순 지지된 경우보다 약 10% 큰 좌굴하중값을 나타내나, 지지조건의 영향은 탄성좌굴에 비하여 미소함을 밝혔다. 형상비가 탄소성 좌굴하중에 미치는 영향을 검토한 결과, 탄성 좌굴의 경우와 동일한 추세이나 그 영향은 탄성 좌굴하중에 비하여 매우 작음을 구명하였다.

참고문헌

[1] Pifko, A. and Isakson, G., A Finite Element Method for the Plastic Buckling Analysis of Plates, *AIAA*, No.10, pp.1950-1959, 1966.
 [2] Mallet, R.H. and Marcal, P.V., Finite Element Analysis of Nonlinear Structures,

Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.94, No.ST9, pp.2081-2105, 1968.
 [3] El-Ghazaly, H.A., Dubey, R.N., and Sherbourne, A.N., Elasto-Plastic Buckling of Stiffener Plates in Beam-to-Column Flange Connections, *Computers and Structures*, Vol.18, No.2, pp.201-213, 1984.
 [4] Stowell, E.Z., *A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates*, Tech. Note 1556, NASA, 1948.
 [5] Ilyushin, A.A., *The Elastic Plastic Stability of Plates*, Tech. Note 1188, NASA, 1947.
 [6] Ramberg, W. and Osgood, W.R., *Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters*, Tech. Note 902, NASA, 1943.
 [7] Wang, L.R. and Rakotondrainibe, A., Elasto-Plastic Buckling of Curved Webs, *Computers and Structures*, Vol.8, pp.159-167, 1978.
 [8] Gupta, K.K., On a Numerical Solution of the Plastic Buckling Problem of Structures, *Int J Num Eng*, Vol.12, pp.941-947, 1978.
 [9] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961.
 [10] Pride, R.A. and Heimerl, G.J., *Plastic Buckling of Simply Supported Compressed Plates*, Tech. Note 1817, NASA, 1949.