

평판 휨 문제에서 적합면이요소를 이용한 적응적 체는 h -세분화

Adaptive Mesh h -Refinement using Compatible Transition Elements
in Plate Bending Problems

최창근* 박용명**
Choi, Chang-Koon Park, Yong-Myung

ABSTRACT

In this study, an adaptive mesh h -refinement procedure was presented in plate bending problems. By introducing the transition elements for the procedure, some drawbacks due to the irregular nodes are eliminated which are generated in the consequence of local mesh refinement in common adaptive h -version performed by single type of quadrilateral elements.

For the above objective, compatible 5-node through 7-node transition plate bending elements are developed by including variable number of midside nodes.

Using the Zienkiewicz-Zhu error estimator, some numerical examples are presented to show the effectiveness of the adaptive h -refinement using the transition elements.

1. 서론

유한요소법은 1950년대에 첫선을 보인 이래 컴퓨터의 개발과 더불어 급속히 발전하여 지금까지 미분방정식 형태로 표현된 많은 물리, 공학 문제를 푸는데 있어 없어서는 안될 도구가 되었다. 이 해석법은 선형해석뿐만 아니라 비선형해석과 동적해석에도 광범위하게 적용되었으며, 그에 따른 패키지 프로그램도 이미 상당히 개발되어 보급되어 있는 실정이다. 그러나 유한요소법의 이러한 기술적 진보에 비해 유한요소 모델링은 주로 경험이나 직관에 의존하였는데, 이는 유한요소해에 대한 오차해석이 여전히 힘든 분야라는데 그 이유가 있다.

유한요소해석에 의한 해의 정확도에 영향을 미치는 인자로는, 1) 물리적 해를 간략화된 수식으로 표현함으로써 인한 수학적 모델링 오차, 2) 재료, 기하 및 경계 조건 등과 관련된 입력데이터의 불확실성에 따른 오차, 3) 무한 자유도의 연속체 구조를 유한 개의 요소로 표현함으로써 인한 세분화오차 및 4) 하드웨어 상의 반올림 및 버림

오차 등이 있다[1]. 이러한 오차들 중에서 관심의 대상이 되는 오차는 세분화오차(discretization error)이며, 이 오차는 정확해(수학적 모델의 해)와 유한요소해와의 차이로 정의된다. 그러나, 대부분의 공학문제에서 정확해를 구하기가 힘들므로 정확한 세분화오차량을 계산한다는 것은 불가능하다. 그렇지만 정확해를 알 수 없더라도 세분화오차량을 추정하는 것은 가능하며, 또한 유한요소 모델의 종자유도수가 증가함에 따라 오차의 감소속도를 결정할 수는 있다.

이를 위해 지난 10여년 동안 유한요소해석과정에서 얻어진 해를 이용하여 각 요소별 세분화오차를 추정하기 위한 *a posteriori* error estimates의 개발이 Babuska와 그 동료들에 의해 시도된 이래 많은 학자들이 이 오차추정치 발표하였다[2]. 적절한 오차추정치의 개발은 적응적세분화를 가능케 하였으며 그 주된 목적은 원하는 오차한계 내의 범위에 드는 유한요소 모델을 자동적으로 산출하는 것이다. 이러한 목적을 달성하기 위한 전략에는 일반적으로 다음의 네 가지 기법; 1) moving mesh(R -method), 2) adaptive h -refinement, 3) adaptive p -refinement 및 4) adaptive hp -refinement 에 의한 방법

* 정희원, 한국과학기술원 교수

** 정희원, 한국과학기술원 공박

이 있다. 먼저 moving mesh 기법은 선택된 초기체눈에 대해 절점변위 및 절점좌표로 표현된 포텐셜에너지 범함수를 최적알고리즘에 의해 절점의 최적 위치를 찾아내는 방법이다. Adaptive h -refinement 기법은 허용한계오차를 초과하는 요소에 대해 요소의 크기 h 를 줄여 나가는 방법이며, adaptive p -refinement 기법은 선택된 초기체눈에 대해 요소의 차수 p 를 증가시키는 방법이고 adaptive hp -refinement 기법은 h -와 p -refinement 기법을 적절히 혼합한 방법이다. 이 중에서 adaptive h -refinement 기법이 그 본질적 방법으로 이 기법은 2차원 평면탄성체 문제에서 많이 연구되었으나, 평판형 문제에서는 불행히도 그 애가 드문 실정이다. 이 기법은 주로 사각형요소를 사용하여 수행되었으며 삼각형요소도 종종 사용되었다.

일반적으로 유한요소해석에서 사각형요소는 삼각형요소보다 좋은 결과를 주지만 사각형요소에 의한 adaptive h -refinement 기법에서는 불규칙절점(irregular node)의 처리 과정이 필요하다. 이 절점은 체눈의 국부적세분화시 세분화된 요소에 인접한 세분화되지 않은 요소의 변의 중간에 발생하는 절점(그림 1)으로 한 가지 형태의 사각형요소를 사용하는 기존의 adaptive h -refinement에서는 요소의 절점으로 정의가 불가능하므로 요소 간의 적합성(compatibility)을 만족시키기 위해 변위구속조건(즉, 그림 1에서 $u_c = (u_a + u_b)/2$)을 불규칙절점에 가한다. 변위제한조건의 부여로 인해 불규칙절점의 변위는 이웃 절점들의 변위로부터 결정되며, 너무 많은 변위구속조건은 구조물의 변위를 lock시켜 나쁜 결과를 초래할 위험이 있다 [3].

그러나, 변의 중간에 불규칙절점이 존재하는 요소를 변절점(midside node)을 갖는 변이요소(transition element)로 대처하면 기존의 유한요소해석 코드를 조금만 수정함으로써 불규칙절점의 처리를 일관적으로 수행

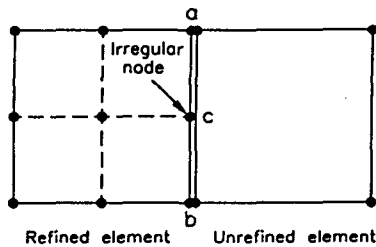


그림 1. Generation of irregular node.

할 수 있다. 이를 위해 본 연구에서는 4절점 사각형요소의 네 변중 한 개에서 세 개의 변절점을 갖는 5절점, 6절점 및 7절점 평판형 변이요소를 개발하고 기존의 4절점 요소와 혼합 사용하여 adaptive h -refinement를 평판형 문제에서 수행하여 그 타당성과 효율성을 검토하고자 한다.

2. 적합 평판형 변이요소의 개발

2.1 변이요소의 형상

적응적체눈 h -세분화를 위한 변이요소의 형상은 그림 2에 나타나 있다. 변절점 5, 6, 7 및 8은 반드시 구석 절점이 있는 직선상에 있을 필요는 없으며 변절점이 존재하는 변에는 두 개의 4절점 요소를 연결할 수 있다. 이때 요소 간의 적합성을 만족하기 위해 식 (1)에 나타난 특수한 형상함수를 사용하였다.

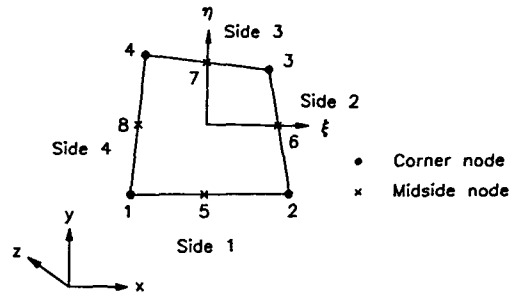


그림 2. Configuration of transition element.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N'_1 - (N_8 + N_5)/2 \\
 N_2 &= N'_2 - (N_5 + N_6)/2 \\
 N_3 &= N'_3 - (N_6 + N_7)/2 \\
 N_4 &= N'_4 - (N_7 + N_8)/2 \\
 N_5 &= (1 - |\xi|)(1 - \eta)/2 \\
 N_6 &= (1 + \xi)(1 - |\eta|)/2 \\
 N_7 &= (1 - |\xi|)(1 + \eta)/2 \\
 N_8 &= (1 - \xi)(1 - |\eta|)/2
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서

$$N'_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \text{ for } i = 1, 2, 3, 4$$

식 (1)에서 변절점에 해당하는 형상함수, N_5, N_6, N_7 및 N_8 은 해당 절점이 존재할 때만 영이 아닌 값을 가진다. 이러한 형태의 변이요소는 2차원 평면탄성체 문제에서 응력집중이 존재하는 구조의 효율적 해석을 위해 5절점 변이요소가 사용된 예가 있다[4].

2.2 평판빔 요소의 강성행렬

평판빔 요소는 x-y 면상에서 정의되며 절점당 자유도는 연직 z축 방향 직선변위 w 와 x-z 면상의 회전변위 α , y-z 면상의 회전변위 β 이다. 전단변형을 고려하기 위해 Mindlin 평판이론을 사용하였으며, 이 때 변위장은 각 자유도별로 식 (1)의 형상함수를 사용하여 n 절점 요소에 대해

$$\begin{Bmatrix} w \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i \begin{Bmatrix} w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

로 가정한다. 식 (2)로 가정된 변위장에 대해 곡률 및 전단변형률은

$$\begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_{,x} \\ -\beta_{,y} \\ -(\alpha_{,y} + \beta_{,x}) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_b \{u\} \quad (3a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,xz} - \alpha \\ w_{,yz} - \beta \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_s \{u\} \quad (3b)$$

가 되며, 여기서 $w_{,x}$ 는 편미분 $\partial w / \partial x$ 를 뜻하며, \mathbf{B}_b 는 휨 변형률행렬, \mathbf{B}_s 는 전단변형률행렬이고 $\{u\}$ 는 절점변위벡터이다. 평판빔요소의 강성행렬은 식 (3)의 휨 변형률과 전단변형률 성분으로부터

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dV + \int_V \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dV \quad (4)$$

로 구해지며, \mathbf{D}_b 및 \mathbf{D}_s 는 휨 및 전단 관련 재료행렬이다.

2.3 대체전단변형률 다항식의 구성

동매개변수법에 의한 Mindlin 평판빔 요소의 강성

행렬은 식 (4)의 두번째 적분항인 전단강성이 실제보다 과다하게 평가되어 얇은 평판을 해석할 때 대단히 나쁜 결과를 주는데, 이러한 현상은 저차요소(lower order element)일수록 심해진다. 이러한 현상을 피해 요소의 적절한 평판빔 변이요소를 개발하기 위해 참고문헌[5]의 대체전단변형률(substitute shear strain) 다항식을 구성하는 기법을 사용하여 5절점, 6절점 및 7절점 요소의 대체전단변형률 다항식을 구성하였다.

동매개변수변환으로부터 식 (3b)의 전단변형률은

$$\gamma_x = \frac{1}{|J|} \{ y_{,\eta}(w_{,\xi} - x_{,\xi}\alpha) - y_{,\xi}(w_{,\eta} - x_{,\eta}\alpha) \} \quad (5a)$$

$$\gamma_y = \frac{1}{|J|} \{ -x_{,\eta}(w_{,\xi} - y_{,\xi}\beta) + x_{,\xi}(w_{,\eta} - y_{,\eta}\beta) \} \quad (5b)$$

로 표현되고, 여기서 $|J|$ 는 Jacobian determinant이다. 식 (5)는 다시 다음 식으로 정의가 가능하다.

$$\gamma_x = \frac{1}{|J|} \{ y_{,\eta} \cdot P_{\xi} - y_{,\xi} \cdot P_{\eta} \} \quad (6a)$$

$$\gamma_y = \frac{1}{|J|} \{ -x_{,\eta} \cdot P_{\xi} + x_{,\xi} \cdot P_{\eta} \} \quad (6b)$$

식 (6)에서

$$P_{\xi} = w_{,\xi} - x_{,\xi} \cdot \alpha - y_{,\xi} \cdot \beta \quad (7a)$$

$$P_{\eta} = w_{,\eta} - x_{,\eta} \cdot \alpha - y_{,\eta} \cdot \beta \quad (7b)$$

로 정의되며, P_{ξ} 및 P_{η} 를 ‘대체전단변형률 다항식’이라 하며, 이 다항식을 적절히 재구성함으로써 올바른 전단변형률을 구할 수 있고 최종적으로 적절한 강성행렬을 구할 수 있다. 식 (7)의 P_{ξ} 에서 $w_{,\xi}$ 는 η 만의 함수이지만 회전변위장 α , β 는 ξ 와 η 의 함수이며, P_{η} 에서 $w_{,\eta}$ 는 ξ 만의 함수이지만 회전변위장 α , β 는 역시 ξ 와 η 의 함수이다. 따라서 적절한 전단변형률을 표현할 수 있는 대체전단변형률장을 구하기 위해 P_{ξ} 는 η 만의 함수로, P_{η} 는 ξ 만의 함수가 되도록 구성하여야 하는데 이는 ‘전단변형률의 평균화’ 과정[5]을 통해 가능하다. 본 연구에서는 5, 6, 7절점 변이요소의 개발을 위해 각 요소별 대체전단변형률 다항식을 구하였으며, 5절점 요소의 대체전단변형률 다항식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
P_{\xi} = & \frac{1}{4}(1-\eta)\{(1-\xi|\xi|)(w_5-w_1) + (1+|\xi|\xi|)(w_2-w_5) \\
& - \frac{1}{2}(1-\xi|\xi|)(x_5-x_1)(\alpha_1+\alpha_5) - \frac{1}{2}(1+|\xi|\xi|)(x_2-x_5)(\alpha_2+\alpha_5) \\
& - \frac{1}{2}(1-\xi|\xi|)(y_5-y_1)(\beta_1+\beta_5) - \frac{1}{2}(1+|\xi|\xi|)(y_2-y_5)(\beta_2+\beta_5)\} \\
& + \frac{1}{4}(1+\eta)\{(w_3-w_4) - \frac{1}{2}(x_3-x_4)(\alpha_3+\alpha_4) - \frac{1}{2}(y_3-y_4)(\beta_3+\beta_4)\}
\end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned}
P_{\eta} = & \frac{1}{4}(1-\xi)\{(w_4-w_1) - \frac{1}{2}(x_4-x_1)(\alpha_1+\alpha_4) - \frac{1}{2}(y_4-y_1)(\beta_1+\beta_4) \\
& + \frac{1}{4}(1+\xi)\{(w_3-w_2) - \frac{1}{2}(x_3-x_2)(\alpha_2+\alpha_3) - \frac{1}{2}(y_3-y_2)(\beta_2+\beta_3)\} \\
& + \frac{1}{4}(1-\xi|1|)\{(w_1-w_5) - \frac{1}{2}(x_1-x_5)(\alpha_1+\alpha_5) - \frac{1}{2}(y_1-y_5)(\beta_1+\beta_5)\} \\
& + \frac{1}{4}(1-\xi|1|)\{(w_2-w_5) - \frac{1}{2}(x_2-x_5)(\alpha_2+\alpha_5) - \frac{1}{2}(y_2-y_5)(\beta_2+\beta_5)\}
\end{aligned} \tag{8b}$$

식 (8)에서 x_i 및 y_i 는 임의의 절점 i 의 직각좌표값이며 식 (8)을 식 (6)에 대입함으로써 적절한 전단변형률을 구할 수 있다.

2.4 수치적분

변이요소의 강성행렬을 구하기 위해 일반적인 Gauss 적분을 그대로 사용할 수 없는데 이는 변절점을 중심으로 변위장의 미분치가 불연속을 이루기 때문이다. 따라서 수치적분은 그림 3에 나타난 바와 같이 점선으로 구분된 각 부영역별로 수행해야 한다. 이와 같은 수정된 Gauss 수치적분을 위한 적분점의 좌표 및 가중치는 참고문헌 [4]에 있다.

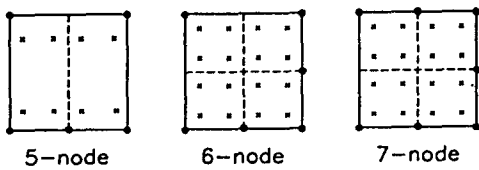


그림 3. Modified Gauss quadrature points.

2.5 평판형 변이요소의 테스트

개발된 평판형 변이요소의 타당성을 검증하기 위해 몇가지 기본적인 테스트를 수행한 결과 모든 변이요소는 spurious zero-energy mode를 발생시키지 않으며, 지극히 얇은 평판의 해석에서도 shear-locking을 유발하지 않

을 뿐만 아니라 patch 테스트를 통과하여 수렴성이 보장되었다.

각 변이요소의 개별적인 성능을 검증하기 위해 그림 4에 나타난 단부하중이 재하된 얇은 캔틸레버 평판을 해석하였다. 해석 결과는 표 1에 수록되어 있으며 모든 요소는 정규채분 및 비틀린채분에 대해서 단부 절점 1과 2의 변위가 거의 일치하는 좋은 결과를 얻을 수 있다.

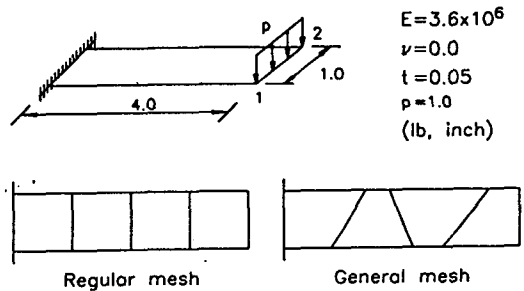


그림 4. Cantilever plate test model.

표 1. Normalized displacements of cantilever plate.

Element	Regular mesh		General mesh	
	w_1	w_2	w_1	w_2
4-node	0.9844	0.9844	0.9660	0.9597
5-node	0.9904	0.9919	1.0002	0.9991
6-node	1.0033	1.0048	1.0114	1.0104
7-node	1.0103	1.0103	1.0122	1.0111

3. 오차추정치 및 세분화기준

3.1 오차추정치(Error Estimator)

적용적채분세분화에 의해 정의한 오차한계 이내에 드는 근사최적채분을 얻기 위해서는 적절한 오차평가에 의한 각 요소의 세분화오차를 구해야 한다. 세분화오차의 평가 기법에는 주로 다음의 세 가지 기법; 즉, 1) residual method, 2) interpolation method 및 3) postprocessing method 가 있다. 먼저, residual method는 유한요소해가 평형방정식을 만족하지 못하는 양, 즉 residual을 요소의 세분화오차량으로 간주하여 오차추정치를 계산하는 방법이고, interpolation method는 요소의 크기와 보간함수의 차수 및 Sobolev seminorm으로부터 요소의 세분화오차를 추정하는 방법이다. 한편, postprocessing method는 유한요소해석으로부터 얻어진 해를 postprocessing 기법에 의해 더욱 향상된 해를 얻고 이 해를 정확해로 가정하여 유한요소해와의 차이를 세분화오차로 간주하여 오차추정치를 계산하는 방법이다.

본 연구에서는 오차추정치를 구하기 위해 참고문헌 [6]의 postprocessing 기법을 사용하였으며, 이 때 임의의 요소 i 에 대해 변위오차($e_i = u_{Exact} - u_{FEM}$)를 기준으로 하여 energy norm으로 표현된 오차추정치는

$$e_i = \left(\int_{\Omega_i} (\sigma^* - \bar{\sigma})^T D^{-1} (\sigma^* - \bar{\sigma}) d\Omega \right)^{1/2} = \|e_i\|_E \quad (9)$$

로 정의된다. 여기서 D 는 재료행렬이며 σ^* 는 유한요소 응력 $\bar{\sigma}$ 의 postprocessing으로부터 구한 연속응력벡터로서 세 개의 휨모멘트와 두 개의 전단력 성분을 포함한다. 전체 영역에 대한 오차추정치는

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^m e_i^2 \quad (10)$$

로부터 구하며 여기서 m 은 요소수이다.

3.2 세분화 기준(Refinement Criterion)

원하는 오차한계 이내에 드는 근사최적채분을 산출하기 위한 채분의 극부적세분화는 다음 조건,

$$R \leq \bar{R} \quad (11)$$

이 만족할 때까지 계속되는데, 여기서 $R = \|e\| / \|u\|$ 으로 정의되는 상대오차이고, \bar{R} 는 최대 허용오차이다. 최적 채분 가설(모든 요소의 오차가 균일한 상태의 채분)로

부터 허용오차한계 이내에 들기 위해 임의의 요소의 극한오차 norm은

$$\|e_o\| \leq \frac{\|u\|}{\sqrt{m}} \cdot \bar{R} \quad (12)$$

로 정의된다. 즉, 식 (9)로부터 구한 임의의 요소의 세분화오차가 식 (12)의 극한오차 norm 값보다 크면 그 요소는 세분화된다.

4. 적용적채분세분화 예제 해석

허용오차한계를 초월한 요소는 bisection에 의해 네 개의 요소로 세분화하며, 사용된 4절점 사각형요소는 참고문헌[5]의 요소이다.

4.1 극부지지된 캔틸레버 평판

그림 5(a)에 나타난 캔틸레버 평판은 극부적으로 고정지되어 있고 등분포하중이 재하될 때 경계조건의 갑작스런 변화로 인해 오른쪽변의 중앙점에서 응력 특이성이 발생한다. 그림 5(b)에 나타난 초기채분에 대해 적용적채분세분화를 5회 수행한 결과 최종채분은 그림 5(c)에 나타나 있다. 한편, 세분화 과정의 총 자유도수 NDF와 상대오차 R 의 그래프(수렴 곡선)가 그림 5(d)에 도시되어 있다. 해석 결과로부터 응력특이점을 중심으로 세분화된 합당한 채분이 산출되었고 최적수렴속도(1 차 요소의 경우 0.5)가 얻어 졌음을 알 수 있다.

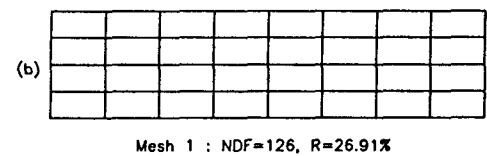
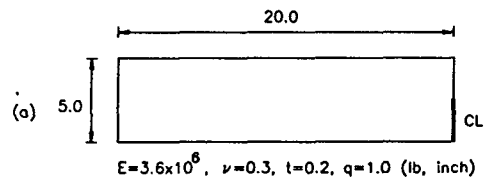
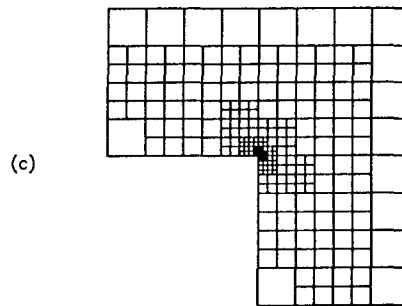
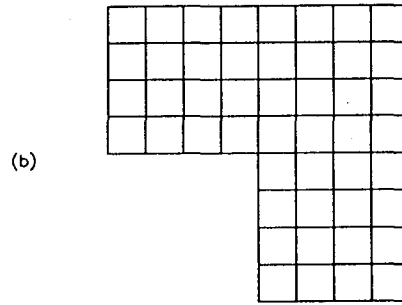
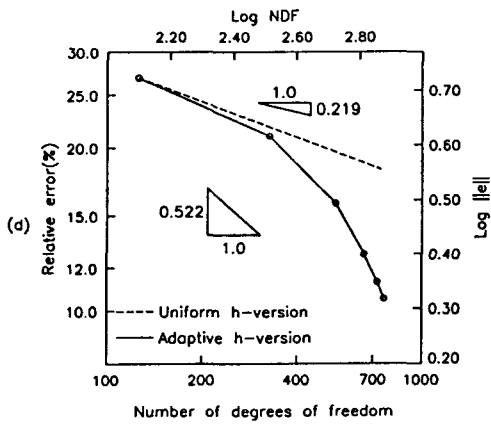
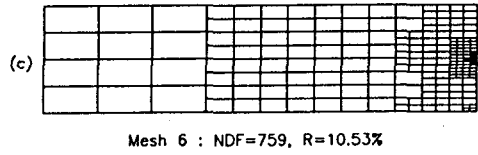


그림 5. Partially supported cantilever plate; (a) Configuration, (b) Initial mesh, (c) Final mesh, (d) Convergence curve.

(그림 5. 계속)



Mesh 6 : NDF=852, R=12.49%

4.2 개구부(Cutout)를 갖는 정방형 평판

기동에 의해 한쪽 모서리가 고정 지지된 임의의 정방형 평판을 모델링하면 그림 6(a)에 나타난 바와 같이 reentrant corner를 갖는 L-형상의 평판이 된다. 평판의 전 영역에 등분포하중이 작용하고 경계조건은 기동과 접한 부분이 고정 지지일 때 reentrant corner에서 응력 특이성이 발생한다. 초기채분과 적응적채분새분화에 의한 최종채분은 그림 6(b) 및 6(c)에 나타나 있고 수렴곡선은 그림 6(d)와 같다. Reentrant corner를 중심으로 채분이 세분화된 합당한 채분이 산출되었으며 최적수렴속도를 다소 초과하는 빠른 수렴속도가 얻어 졌다.

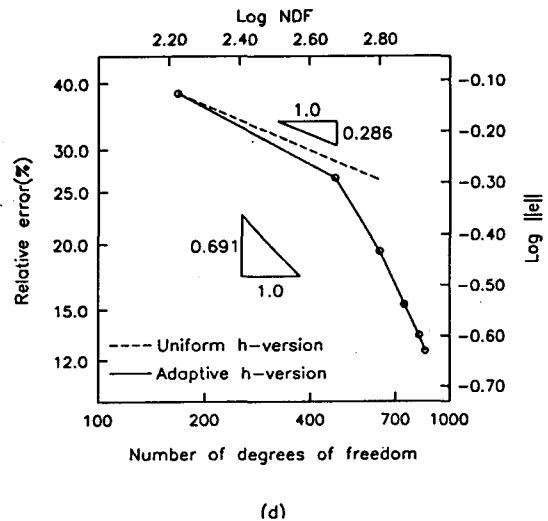
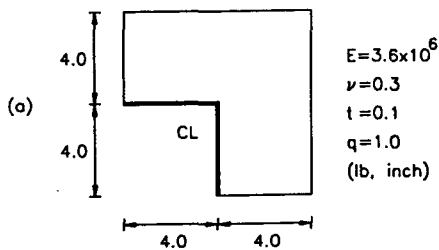


그림 6. Square plate with cutout; (a) Configuration, (b) Initial mesh, (c) Final mesh, (d) Convergence curve.

5. 결 론

본 연구에서는 기존의 적응적 h -method에서 발생하는 불규칙적점의 효율적처리를 위해 변점점을 갖는 변이요소를 개발하고 이를 기존의 4절점 요소와 혼합 사용하여 새로운 적응적 h -세분화 기법을 평판힘 문제에서 수행하였다. 개발된 변이요소는 변위 결과는 매우 좋으나 응력 결과는 조금 불안하였지만 적응적체분세분화를 위해 성공적으로 사용할 수 있었다.

기존의 유한요소해석 코드의 큰 수정없이 본 연구의 적합변이요소를 추가할 수 있으며 적응적체분세분화를 위한 컴퓨터 코드의 작성이 기존의 변위구속조건을 가하는 방법보다 수월하다.

참 고 문 헌

- [1] Utku, S. and Melosh, R.J., 'Solution errors in finite element analysis', Computers and Structures, Vol.18, No.3, pp.379-394, 1984.
- [2] Babuska et. al.(eds.), *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wilcy, New York, 1986.
- [3] Cook, R.D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Wilcy, New York, 1981.
- [4] Gupta, A.K., 'A finite element for transition from a fine to a coarse grid', Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.12, pp.35-45, 1978.
- [5] Donca, J. and Lamain, L.G. 'A Modified representation of transverse shear in C^0 quadrilateral plate elements', Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., Vol.63, pp.183-207, 1987.
- [6] Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., 'A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis', Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 24, pp.337-357, 1987.