

### 균열 쉘의 파괴역학해석을 위한 선진유한요소기법

#### Advanced Finite Element Technology for Fracture Mechanics Analysis of Cracked Shells

우 광 성\*  
Woo Kwang Sung

#### ABSTRACT

A new finite element technology based on p-version of F.E.M. is discussed with reference to its potential for application to stress intensity factor computations in linear elastic fracture mechanics, especially cracked cylindrical shells. It is shown that the p-version model is far better suited for computing the stress intensity factors than the conventional h-version models with the help of three test problems. The main advantage of this technology is that the accuracy of approximation can be established without mesh refinement or the use of special procedures.

#### 1. 서론

셀구조는 이상적인 하중전달구조(load-carrying structure)이므로 송수관(pipeline), 압축용기(pressure vessel), 수조차(tank car), 항공기몸체, 원자로, 유류탱크등에 널리 사용되고 있다. 그러나 사용되는 재료는 제조 또는 조립과정에서 용접과 재료상의 결함(defects)과 표면에 흠집이 생기는 등의 초기균열(initial flaws)이 일어날 수 있으며 시간이 경과함에 따라 균열크기는 증가하는데 비하여 구조물의 강도는 감소하여 마침내 전체구조물을 파괴시키는 현상을 Fig.1로부터 알 수 있다. 이러한 균열(crack)은 반복하중에 의한 피로(fatigue), 하중의 조합, 그리고 구조물을 부식시킬 수 있는 유체에 의한 응력부식(stress corrosion)등에 의하여 발생함과 동시에 전파(propagation)되는 것이다. 이런 현상을 사전에 방지하기 위하여 아래와 같은 문제가 우선적으로 규명되어야 한다.

- i) 균열크기(crack size)와 잔류강도(residual strength)
- ii) 임계균열크기(critical crack size)
- iii) 초기균열에서 임계균열까지의 예상수명(life prediction)

본 연구에서는 위의 문제를 해결하기 위한 가장 큰 문제인 응력집중계(Stress Intensity Factor) K를 선형탄성 파괴역학(Linear Elastic Fracture Mechanics)에 근거한 P-version 유한요소법을 사용하여 구하고자 한다. 한편, 균열문제는  $r^{-1/2}$  형태의 응력특이성(stress singularity)을 갖게되므로 균열선단(crack tip)부근의 응력경사(stress gradient)가 크고 응력변화 또한 매우 심한 관계로 유한요소법을 사용하게 되면 수렴도(convergence rate)에 따른 해의 신뢰성(reliability)확보가 큰 관건이 될 수 있는데 h-convergence의 경우는 Tong과 Pian에 의해 p-convergence의 경우는 Mehta와 Basu에 의해

유도의 증가에 따른 해의 수렴성이 연구되었다.

#### 2. 응력집중계수의 산정

##### 2-1 연구범위 및 배경

본 연구에서는 세 경우의 균열 쉘 문제를 L.E.F.M.에 근거하고 Integrals of Legendre Polynomials이 형상함수로 사용되며 기하학적 사상(mapping)은 혼합사상(blend mapping)이 그리고, 수치적분은 Gaussian Quadrature가 적용된다. 한편, 응력집중계수를 계산하기 위해서 C.O.D.(Crack Opening Displacement)방법과 C.S.D.(Crack Sliding Displacement)방법 및 가상 균열확장법(virtual crack extension method)이 채택되었다. 해석된 문제는 아래와 같다.

- (1) A circumferential crack under tension
- (2) An axial crack under internal pressure
- (3) An inclined crack under internal pressure

이론적인 접근은 Folias, Erdogan, Sanders 등에 의해 수행되었는데 얇은 쉘(shallow shell)이론에 기초하여 적분방정식(integral equation)의 형태로 표현하고자 했으며 균열되지 않은 쉘에 본래의 하중이 재하된 문제해석과 균열된 쉘의 균열부분에 비균열상태의 동일지점에서 발생하는 응력과 모멘트값을 크기는 같고 방향이 반대인 재하하중으로 작용시키는 문제해석을 증명시키는 방법을 사용하고 있다. 그러나, 이 방법은 단순한 기하형상과 단순하중에 국한된다. 유한요소해석은 많은 학자들이 종래요소(conventional elements)를 사용하여 균열된 구조해석을 시도하였으나 균열선단(crack tip)에서 발생하는 무한응력(infinite stress)으로부터의 응력전이(stress transition)를 표현하기가 힘든 관계로 특별한 균열선단요소(crack tip elements)가 개발되어 균열선단에서는 이 요소를 사용하고 그밖의 영역에서는 종래요소를 사용하는데 Byskov, Hardy, Wilson등이 대표적인 연구자이며 또한,

\*정회원, 전남대학교 토목공학과, 전임강사

Pian과 Tong은 hybrid element를 Barsoum, Loomis등은 Quarter Point Element를 개발하였는데 주로 2-D Plane Elasticity 문제해석을 수행하였으며 균열 쉘의 유한요소해석에 대한 문헌은 흔하지 않은 관계로 본 연구에서는 연구결과와의 비교를 위해 E.P.R.I.(Electric Power Research Institute) Report에서 구조해석용 프로그램인 ADINA를 사용하여 균열 쉘 문제를 해석한 결과와 Tada, Parish, Zahoor등의 실험식 및 제한된 이론식이 사용될 것이다.

## 2-2 유한요소법을 이용한 S.I.F. 산정방법

### 2-2-1 Displacement Method

Fig.2 에서 균열선단에서 거리 r, 각도  $\theta$  만큼 떨어진 임의의 점에서의 변위 u, v는 아래 식과 (1), (2)와 같다.

$$u = \left[ \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{E}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + r^{3/2} f_u(\theta) + \dots \right] + \left[ \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{E}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{2}{1+\nu} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + r^{3/2} g_u(\theta) + \dots \right] \quad (1)$$

$$v = \left[ \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{E}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + r^{3/2} f_v(\theta) + \dots \right] + \left[ \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{E}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) + r^{3/2} g_v(\theta) + \dots \right] \quad (2)$$

한편, 위의 식은  $K_I$ (opening mode)과  $K_{II}$ (in-plane sliding mode)를 동시에 포함하고 있으므로 이를  $K_I, K_{II}$ 에 대해서 분리하여 나타내기 위해서  $\theta=180^\circ$ 일때의 점 A와  $\theta=-180^\circ$ 일때의 점 B에 대한 변위  $u_A, u_B$  와  $v_A, v_B$ 로 부터  $K_I, K_{II}$ 에 대해 정리하면 아래 식 (3), (4)와 같다.

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{u_A - u_B}{\sqrt{r}} \right) \frac{E\sqrt{2\pi}}{8} \quad (3)$$

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{v_A - v_B}{\sqrt{r}} \right) \frac{E\sqrt{2\pi}}{8} \quad (4)$$

위의 식에서  $r=0$ 일 때 응력집중계수를 결정할 수 있으며 Chan, Tuba, Wilson등은 균열첨단문제의 경우 자유도가 약 2000정도 일 때  $K_I$ 값이 5% 정도의 오차를 보이고 있으나 몇 개의 점으로부터 외삽법(extrapolation)을 사용하여  $r=0$ 인 점의 구하는 관계로 해의 정확도는 차치하고 다소 번거로운 방법이라 할 수 있다.

### 2-2-2 Virtual Crack Extension Method

이 방법은 Rice 에 의해 제안되었으며 Parks, Hellen등이 실제문제에 적용하였는데 이는 에너지방출률(Energy Release Rate) G를 구하여 응력집중계수를 정하는 방법이다. 에너지방출률 G는 식 (5)와 같다.

$$G = - \frac{\partial \Pi}{\partial a} \quad (5)$$

$$G = - \frac{d\Pi}{da} = - \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial a} \{u\} + \{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial a} \quad (6)$$

Parks가 제안한 Stiffness Derivative Method에 의하면 아래 식 (6)과 같이 나타 낼 수 있으며 또한 식 (7), (8)과 같은 관계식을 만족하므로 이로부터 응력집중계수값을 결정할 수 있다.

$$G = - \frac{d\Pi}{da} = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{for plane strain problems} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{for plane stress problems.} \quad (8)$$

## 3. 계층요소(Hierarchical C<sup>0</sup>-Shell Element)

응력특이점(stress singular point)부근에서의 응력분포를 표현하는데는 고차 르장드르함수가 적합하다. 그 이유는 이 함수의 양단에서의 접선의 기울기가 매우 가파르기 때문에 급격한 응력경사(stress gradient)를 표현할 수가 있다. 또한, 함수의 근(roots)들이 중앙보다는 양단에 다소 밀집되어 있으므로 특이점부근의 해에 대한 신뢰도를 높일 수 있다. 한편, 르장드르함수는 직교성(orthogonality)을 갖고 있어서 강도매트릭스가 well-conditioned 매트릭스가 되며 round-off error가 기하학적 형상비(aspect ratio)과 요소의 찌그러진 정도(distortion)등의 입력매개변수(input parameters)에 크게 영향을 받지 않으므로 작은 조건수(Condition Number)를 갖는다. 본 연구에서 사용되는 형상함수는 아래 식(9)와 같다.

$$F_p(x) = \sqrt{\frac{2p-1}{2}} \int_{-1}^x P_{p-1}(t) dt \quad (9)$$

여기서 르장드르함수  $P_n(x)$ 는 Rodrigues Formula로 정의되며 식(10)과 같다.

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n \quad (10)$$

한편, 사상(mapping)은 p-version의 경우 큰 망목(mesh)을 사용하므로 정확한 사상이 필요한데 이것을 해결하기 위해 초유한사상(transfinite mapping)과 혼합사상(blend mapping)이 사용되었으며 고차함수를 수치적분하기 위해서 1x1에서 12x12 Gauss Point 까지 확장하여 차수의 증가에 따른 Gauss Point를 식(11)에 의해 결정한다.

$$n \geq \frac{p+1}{2} \quad \text{where } p = \text{polynomial order} \quad (11)$$

## 4. 수치해석모델

### 4-1 A Circumferential Crack Under Tension

해석모델이 Fig.3에 나타나 있으며 이 문제의 경우는  $K_I$ (opening mode)를 구하는 것이 관건이 되며 인장력이 작용할 경우의  $K_I$ 는 식(12)와 같다.

$$K_I = \frac{P}{2\pi Rt} \sqrt{\pi a F(\theta, R/t, \nu)} \quad (12)$$

여기서 F는 무차원량으로 형상계수(shape factor)라 부르며 이 값을 가상균열확장법에 의해 계산되었다. F는  $\nu=0.3$ 일 때  $\theta$ , R/t의 함수가 되므로 R/t=5, 10, 20일 때  $\theta=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 로 변화함에 따른 형상계수값이 Zahoor의 실험식, Kumar의 ADINA Software로 242 9-noded thin shell element(989 nodes)를 사용한 수치계산값, Sanders의 이론식과 비교되었는데 Sanders의 이론식은 R/t가 10에 가까울 때는 다른 결과치와 비교적 일치함을 Table 1로 알 수 있으나 그렇지 않은 경우는  $\theta < 40^\circ$ 인 짧은균열(short crack)에서만 정당함을 Fig.4로 부터 알 수 있다. p-version의 p의 차수가 증가함에 따른 수렴성이 Fig.5에 나타나 있다. 즉, R/t=10,  $\theta=45^\circ$ 인 경우 p-version모델(p=8, 4-elements)에 의하면 F=1.74020이며 Sanders의 Short Crack Expression은 F=1.72656을 갖게 한다. 또, R/t=5,  $\theta=45^\circ$ 인 경우 동일한 p-version모델에 의해 F=1.52953이고 Zahoor의 실험식에 의하면 F=1.56254이다. 한편, R/t=20,  $\theta=45^\circ$ 일 때 동일한 p-version모델에 의하면 F=2.10615이고 Zahoor는 F=2.07495, Kumar는 F=1.974를 나타내고 있다.

#### 4-2 An Axial Crack Under Internal Pressure

축방향으로 균열이 간 해석모델이 Fig.6에 나타나 있으며 내압에 의해 발생하는 균열의 형태는 역시  $K_I$ (opening mode)가 되며 식(13)에 나타나 있다.

$$K_I = \frac{R}{r} \sqrt{\pi a F(\beta)} \quad (13)$$

여기서 형상계수 F는  $\beta$ 의 함수이며  $\beta^2 = a^2 \sqrt{12(1-\nu^2)/8Rt}$ 로 표시되며 이에 대한 결과는 Tada, Paris, Irwin의 Crack Handbook의 실험식과 비교되었다. 즉,  $\beta=0.6$ 일 때 p-version(p=8, 4-elements)해석은 F=1.45834를 보이는데 이는 Tada의 F=1.44548과 매우 근접함을 알 수 있다. 한편,  $\beta=1.0$ 일 때 동일한 p-version모델은 F=1.98711을 그리고 Tada는 F=2.00033을 보인다. 이에 대한 결과가 Table 2에 있으며 Fig.7에서 비교되어 표시되어 있다. 그리고 p의 차수의 증가에 대한 수렴성이 Fig.8에  $\beta=0.375$ 인 경우가 나타나 있다. 무차원 변형에너지(strain energy)와 변형에너지방출률(strain energy release rate)값이 (NDF)<sup>-1</sup>에 대한 관계가 Fig.9와 Fig.10에 표시되어 있는데 강한 선형성(linearity)을 갖고 있음을 주목하게 되는데 이는 이미 2-D Plane Elasticity문제에서 Mehta에 의해서도 이미 밝혀진 바가 있다. Fig.10에서 extrapolated exact value (즉,  $p \rightarrow \infty$ )는  $\beta=0.375$ 인 경우  $G=0.740 \sigma^2 l/E$ 가 되므로 형상계수 F=1.253이며 이는 Tada의 F=1.194와 비교할 수 있다.

#### 4-3 An Inclined Crack Under Internal Pressure

경사각  $\alpha$ 를 갖는 균열이 일어나는 실린더에 내압이 Fig.11에서와 같이 작용하고 있다. 이 경우는 균열형태가  $K_I$ (opening mode)와  $K_{II}$ (sliding mode)가 동시에 복합되어 있다. 이 경우 각각의 균열모드를 분리시키기 위해 C.O.D. 방법이 사용되었다. 균열부분에 21개 점에서의  $\Delta u/\nu r$ 와  $\Delta v/\nu r$ 을 구해 거리 r/a의 변화에 따른 그림이 Fig.12와 Fig.13에  $\alpha=30^\circ$ 와  $\alpha=60^\circ$ 일 때가 표시되어 있다. 경사균열의 경우는 균열부분의 극좌표축(local reference)가 현재 유한요소모델이 사용되는 전체좌표축(global reference)과 다르므로 좌표변환(coordinate transformation)을 하여야 한다. 이 결과는 Lakshminarayana의 이론식과 비교되었는데 p-version 모델(p=8, 6-elements)의 경우  $\alpha=30^\circ$ 일 때  $K_I=0.796$ 과  $K_{II}=0.444$ 를 얻은 반면 Lakshminarayana는  $K_I=0.891$ 과  $K_{II}=0.453$ 을 보이고  $\alpha=60^\circ$ 인 경우 동일한 p-version모델은  $K_I=0.261$ ,  $K_{II}=0.435$ 를 Lakshminarayana는  $K_I=0.302$ ,  $K_{II}=0.440$ 를 나타내고 있다.

#### 5. 결론

서로 다른 세가지의 균열 쉘 문제가 새로 제안되는 선진유한요소기법인 p-version유한요소법을 사용하여 가상균열확장법(virtual crack extension method)과 Crack Opening and Sliding Method를 사용하여 해석하였다. 형상함수로는 Integrals of Legendre Polynomial을 사용하였으며 사상(mapping)으로는 초유한사상과 혼합사상을 적용하였다. 이에 따른 해석 결과는 이론식, 실험식 및 기존의 h-version 프로그램의 수치해석값과 비교되어 해의 신뢰성(reliability)과 정확도(accuracy)를 만족시켜 주고있을 뿐만 아니라 사용자(User)의 시간, 즉 입력자료의 간편성과 CPU 시간의 절감을 가져온다.

#### 6. 참고문헌

- (1) Sanders Jr., J. Lyell, "Circumferential Through-Cracks in Cylindrical Shells under Tension", J. Appl. Mech., Vol.49, pp.103-107, 1982
- (2) Kumar, V. et al., "Advances in Elastic-Plastic Fracture Mechanics", NP-3607 Research Project 1237-1, General Electric Company prepared for E.P.R.I., 1984
- (3) Zahoor, A., "Closed Form Expressions for Fracture Mechanics Analysis of Cracked Pipes", J. Pressure Vessel Tech., Vol.107, pp.203-205, 1985
- (4) Tada H., Paris P. and Irwin G.R., "The Stress Analysis of Cracks Handbook", Second Edition, Paris Productions Inc., 1985
- (5) Mehta, A.K., "P-convergent Finite Element Approximations in Linear Elastic Fracture Mechanics", Ph.D. Dissertation, Washington University, St. Louis, Missouri, 1978
- (6) Woo, K.S., "Analysis of singular cylindrical shells by p-version of F.E.M.", International Journal of Solids and Structures, Vol.25, No.2, pp.151-165, 1989

(7) Woo, K.S., "LEFM of cracked pipes with p-version finite element modeling", 10th International Conference, S.M.I.R.T., Aug.14-18, 1989, Anaheim, California

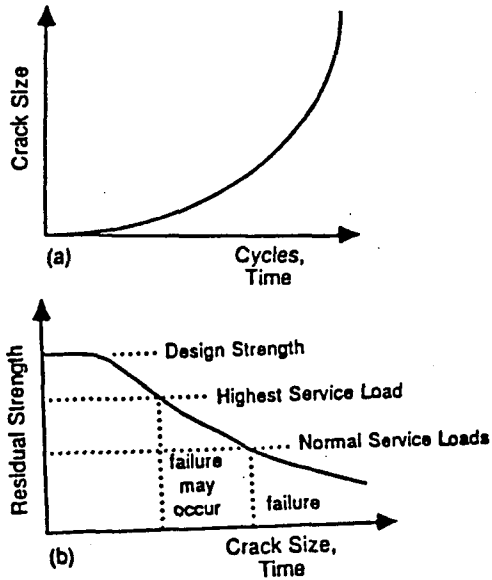


Figure 1. Effect of Cracks in Structures  
(a) Crack Growth Curve  
(b) Residual Strength Curve

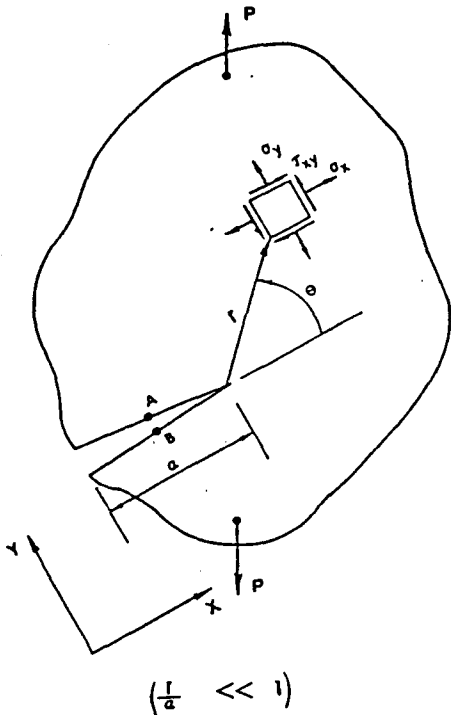


Fig.2 Crack-Tip Polar Coordinate System

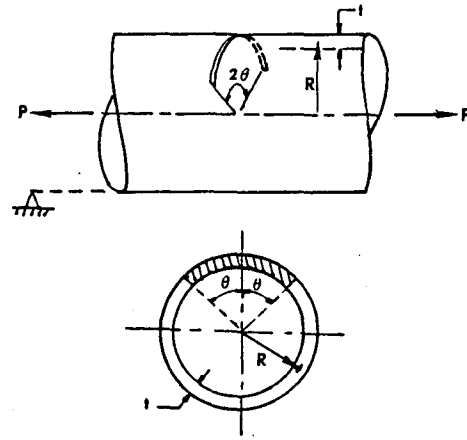


Fig.3 Circumferential crack subjected to tension

TABLE 1  
F-values for a circumferential crack  
under tension  
[R/t=10, ν=0.3]

θ	t/ν	Sanders	Zaboor	Kumar*	SHLPV(P=8)
15°	0.08333	1.15586	1.12870	1.12	1.11029
30°	0.16667	1.40258	1.37210	1.40	1.36265
45°	0.25000	1.72656	1.71888	1.78	1.74020
60°	0.33333	2.18678	2.20387	2.45	2.23713
75°	0.41667	2.87710	2.89223	3.35	2.92403
90°	0.50000	3.91682	3.87804	4.15	3.94276

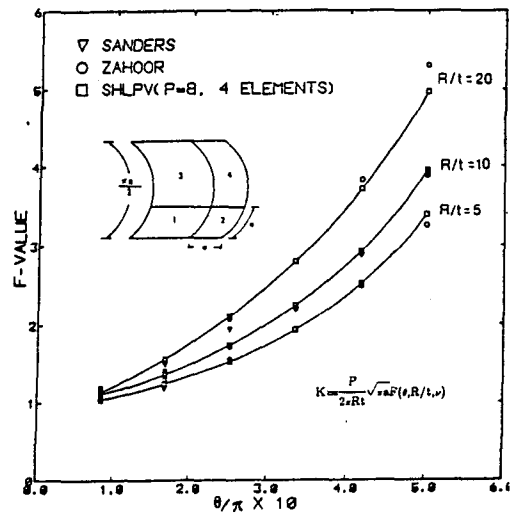


Fig.4 Comparison of elastic solutions for a circumferential crack under tension ; R/t=5,10,20

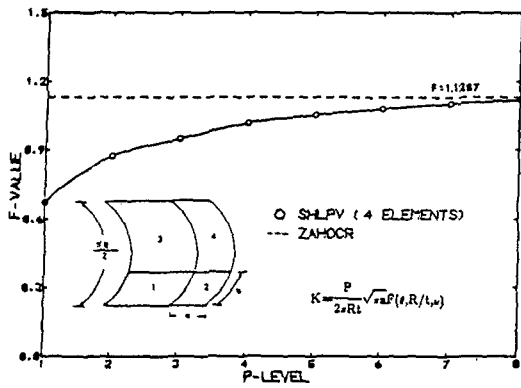


Fig.5 F-values with different p-level;  
R/t=10 and  $2\theta=30^\circ$

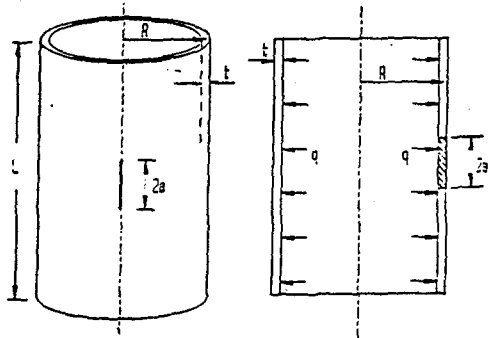


Fig.6 Longitudinal crack under internal pressure

TABLE 2  
F-values for an axial crack under  
internal pressure

$\beta$	Tada <i>et al.</i>	P-version (P=8)
0.2	1.05879	1.03488
0.4	1.21827	1.22876
0.6	1.44548	1.45834
0.8	1.72027	1.71609
1.0	2.00033	1.98711
1.2	2.28040	2.27461

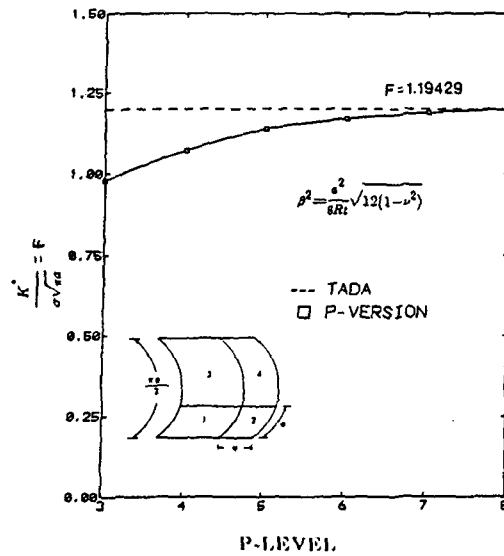


Fig.8 F-values with different p-level;  $\beta=0.375$

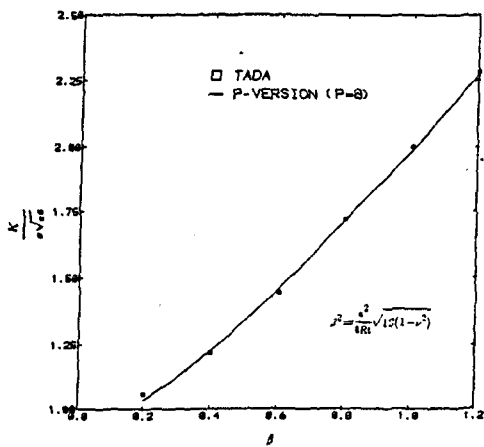


Fig.7 Comparison of elastic solutions with  
different  $\beta$  for an axial crack under  
internal pressure

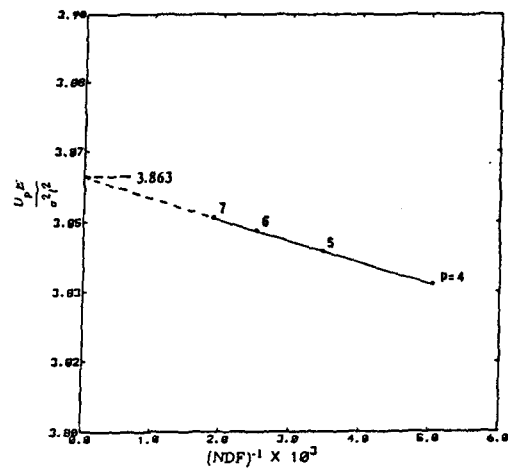


Fig.9 Strain energy vs.  $(NDF)^{-1}$  in axial  
crack problem

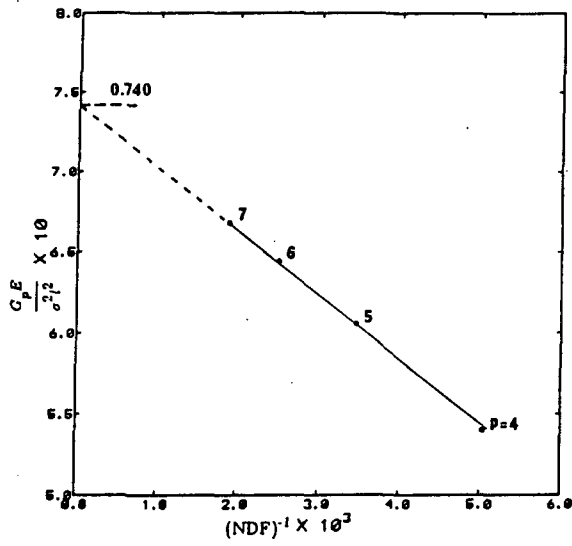


Fig. 10 Strain energy release rate vs.  $(NDF)^{-1}$  in axial crack problem

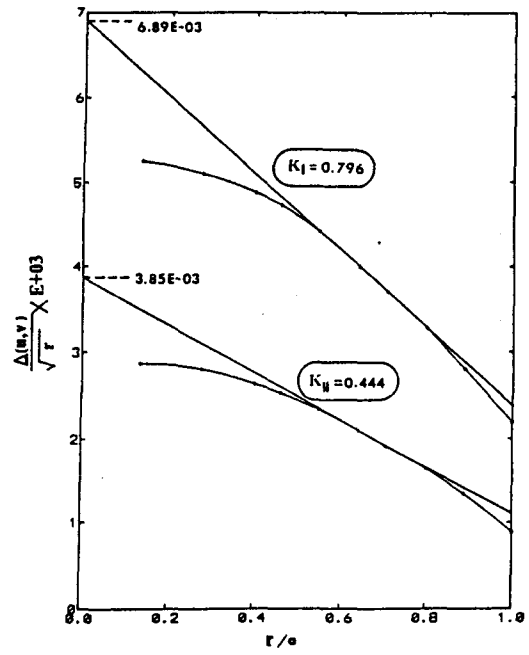


Fig. 12 Estimation of stress intensity factors based on crack surface displacements for the inclined crack;  $\alpha=30^\circ$  and  $p=8$

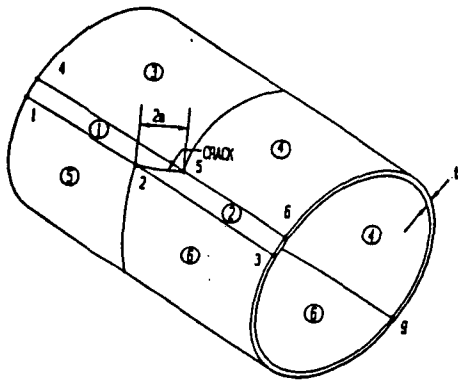


Fig. 11 Configuration and mesh refinement of inclined crack under internal pressure

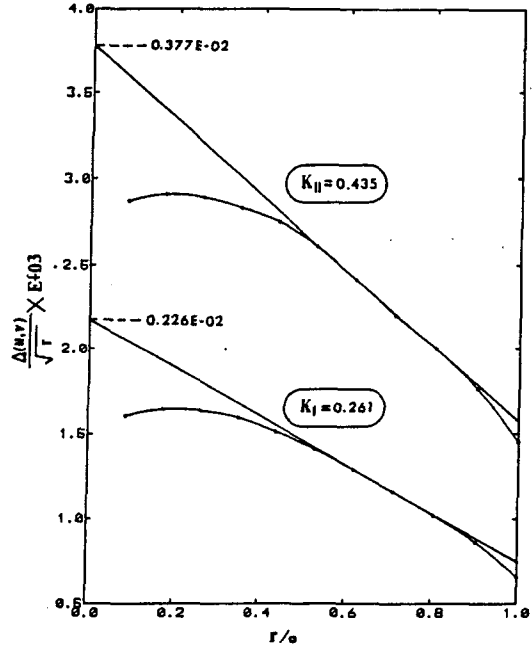


Fig. 13 Estimation of stress intensity factors based on crack surface displacements for the inclined crack;  $\alpha=60^\circ$  and  $p=8$