

비선형 이론을 이용한 케이블 네트의 형태안정

- A shape finding of cable net by nonlinear theory -

황보 석* ○서 삼 열** 권 택 진***
Hwangbo, Seok Suh, Samuel Kwun, Taek Jin

ABSTRACT

The cable structures undergo large deformation because of its highly flexibility. Therefore, we must take account of its geometric nonlinearity before analysis and find the equilibrated shape of cable structures.

To solve these problems, a numerical procedures included nonlinear theory which is applicable to general cable net, flexible transmission lines and suspended cable roofs, are presented in this paper.

Now, this procedures are divided two parts ; the one is to obtain the equilibrated shape and stress of the cable structures applied uniform load by flexibility iteration method, the other is to analysis the equilibrated structures subjected to nodal external forces by nonlinear finite element method.

Its accuracy and efficiency are found to be comparable to some of other method and, in some aspect, it is more applicable to cable structures.

1. 서론

케이블 구조물은 형태의 다양성과 인장력에 대한 재료의 효과적인 사용등으로 인한 경제성 때문에 대스판 구조물에서 자주 사용되고 있다.

그러나 케이블의 빈약한 휨강성과 형태의 불안정성 때문에 해석 방법이 용이하지 않다. 따라서 케이블 구조물의 안정화는 구조공학자가 결정해야 할 중요한 문제중의 하나이다.

연속체에 대한 유한요소해석이 거의 전분야에 걸쳐 적용되고 있음에도 불구하고, 케이블 구조물은 그 형태에 따라 전체적인 거동이 여러가지 양상으로 나타나기 때문에, 해석 방법이 다양한 방법으로 전개되어 왔다. 특히, 케이블은 재료적인 비선형성이 강하고 대변위에 의한 기하형태를 고려 할때, 비선형 효과가 도입 되기 때문에 안정 형태를 결정하는데 더욱 복잡하게 된다.

본 논문에서는 O'Brien 등이 제안한 유연성 반복과정(Flexibility Iterative Procedure)을 사용하여 자중, 열하중과 같은 하중조건에 의한 평형 형태와 부재 축력을 계산하고 평형 상태에서 임의의 절점기하형태를 정확하게 정의한다.

또한, 이상의 결과에 의한 기하형태와 초기 부재력을 이용하여 케이블 성분을 갖는 임의의 구조물 형태에 대한 일반적인 비선형 수치해석 과정을 통하여 안정 형태를 결정하고자 한다. [(1), (2), (3), (4)]

2. 평면 케이블의 요소 방정식

2.1 서

케이블 구조에서 집중 하중은 근본적으로 절점에 작용하거나 구조물의 강체 요소에 작용한다 따라서 대부분의 경우, 케이블 자신에 대한 하중(aerodynamic 과 hydrodynamic 하중, 자중, 열하중등)만 고려 하여도 충분하다.

또한, 케이블 요소의 재료는 탄성재료로 가정한다.

2.2 현수(catenary) 방정식

그림1.은 YZ 평면에서 자중을 받아 탄성현수곡선으로 평형형태를 갖는 탄성케이블 요소들 보여주고 있다.

*정회원, 성균관대 대학원 **정회원, 성균관대 강사 ***정회원, 성균관대 교수, 공학박사

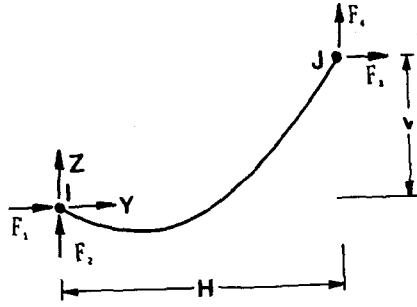


그림 1. 케이블 요소

그림1.의 케이블 요소에 대한 단부력의 결정은 다음과 같이 잘 알려진 현수관계를 이용한다.(1)

$$L^2 = V^2 + H^2 \frac{\text{SINH}^2 \lambda}{\lambda^2} \quad (2.1)$$

$$\lambda = \frac{W |H|}{2 |F_1|} \quad (2.2)$$

$$F_2 = \frac{W}{2} \left[\frac{-V \text{COSH} \lambda}{\text{SINH} \lambda} + L \right] \quad (2.3)$$

$$H = -F_1 \left[\frac{Lu}{EA} + \frac{1}{W} \text{Log} \left(\frac{F_4 + T_J}{T_I - F_1} \right) \right] \quad (2.4)$$

$$V = \frac{1}{2EA W} (T_J^2 - T_I^2) + \frac{T_J - T_I}{W} \quad (2.5)$$

$$L = Lu + \frac{1}{2EA W} \left[F_1 T_J + F_2 T_I + F_1^2 \text{Log} \left(\frac{F_4 + T_J}{T_I - F_1} \right) \right] \quad (2.6)$$

여기에서 H, V 는 각각 케이블의 수평, 수직 부영 길이 이고, L 은 변형된 케이블 길이, Lu 는 변형되지 않은 케이블 길이, W 는 단위 길이 당 하중 즉, 자중을 나타 내고 있다 .

식(2.4)-(2.5)는 Hook's law에 의한 케이블의 탄성신장이 포함되며, 이것은 다음의 정적 방정식에 의해 F_1, F_2 만의 함수로 나타 낼수 있다 .

$$H = \mathcal{F} [F_1, F_2]$$

$$V = \mathcal{V} [F_1, F_2] \quad (2.7)$$

$$L = \mathcal{L} [F_1, F_2]$$

여기에서,

$$F_4 = -F_1 + W Lu$$

$$F_5 = -F_1$$

(2.8)

$$T_I = (F_1^2 + F_2^2)^{1/2}$$

$$T_J = (F_4^2 + F_5^2)^{1/2}$$

2.3 유연성 반복 과정

그림2. 에서 제시된 케이블 요소를 고려해 보자. 여기에서 첨자 i 는 유연성 반복 과정의 i 번째를 나타 낸다.

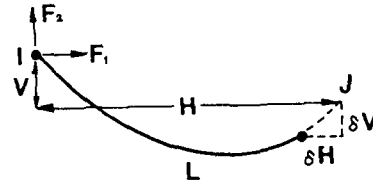


그림2. 유연성 반복 과정의 i step

F_1 과 F_2 는 절점 I 에서의 부재 인장력 T_I 의 수평, 수직 분력이고, H 와 V 는 각각 식(2.4), (2.5) 로부터 결정되는 케이블의 수직, 수평 부영 길이 이다. δH 와 δV 는 오차 벡터(Misclosure Vector)의 성분이며, 이것이 허용 오차를 초과 한다면 다음 반복 단계에서 선형 보정을 가한 F_1 과 F_2 의 값을 갖고 계산을 수행 한다.

$$F_1^{i+1} = F_1^i + \delta F_1^i = F_1^i + B_1^i \delta H^i + B_2^i \delta V^i \quad (2.9)$$

$$F_2^{i+1} = F_2^i + \delta F_2^i = F_2^i + B_3^i \delta H^i + B_4^i \delta V^i$$

$B_1^i, B_2^i, B_3^i, B_4^i$: correction factors

식(2.9)에서 보정항 부분은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\delta H^i = A_1^i \delta F_1^i + A_2^i \delta F_2^i \quad (2.10)$$

$$\delta V^i = A_3^i \delta F_1^i + A_4^i \delta F_2^i$$

상수 $A_1^i, A_2^i, A_3^i, A_4^i$ 는 절점력의 수평, 수직
부영 길이에 대한 변화율로서 근사화 시킬수있다.

$$A_1^i = \left[\frac{\partial H}{\partial F_1} \right]_i = \frac{H^i}{F_1^i} + \frac{1}{W} \left[\frac{F_1^i}{TJ^i} + \frac{F_2^i}{TI^i} \right] \quad (2.11)$$

$$A_2^i = \left[\frac{\partial H}{\partial F_2} \right]_i = \frac{F_1^i}{W} \left[\frac{1}{TJ^i} - \frac{1}{TI^i} \right] \quad (2.12)$$

$$A_3^i = \left[\frac{\partial H}{\partial F_3} \right]_i = \frac{F_1^i}{W} \left[\frac{1}{TJ^i} - \frac{1}{TI^i} \right] \quad (2.13)$$

$$A_4^i = \left[\frac{\partial H}{\partial F_4} \right]_i = -\frac{Lu}{EA} - \frac{1}{W} \left[\frac{F_1^i}{TJ^i} + \frac{F_2^i}{TI^i} \right] \quad (2.14)$$

식(2.11)-(2.14)는 식(7)의 정적 방정식에 의
해서 F_1 과 F_2 만의 함수로 표현할 수 있다.

또한, $B_1^i - B_2^i$ 와 $A_1^i - A_2^i$ 는 다음과 같이 관계
지을 수 있다. ($DET^i = A_1^i A_3^i - A_2^i A_4^i$)

$$\begin{aligned} B_1^i &= \frac{A_1^i}{DET^i} & B_2^i &= \frac{-A_2^i}{DET^i} \\ B_3^i &= \frac{-A_3^i}{DET^i} & B_4^i &= \frac{A_4^i}{DET^i} \end{aligned} \quad (2.15)$$

위에서 언급한 반복 과정은 초기값 F_1^0 와 F_2^0
를 요구 하게 되는데 F_1^0, F_2^0 에 대한 값은 다음
과 같은 관계식을 사용 한다.(2)

$$F_1^0 = \frac{-WH}{2\lambda^0} \quad (2.16)$$

$$\lambda^0 = \left[3 \left(\frac{(Lu^2 - V^2)}{H^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (2.17)$$

$$F_2^0 = \frac{W}{2} \left(\frac{-V \cosh \lambda}{\sinh \lambda} - Lu \right) \quad (2.18)$$

여기에서 사용된 λ 값은 다음과 같은 가정으로
사용 될수 있다. 변형되지 않은 초기길이 Lu 가
IJ의 직선거리 보다 짧을 경우, λ 는 수평 스펠
에서 스펠에 대한 sag의 비에 약 4 배가 되고 평

평한 케이블에 대해 식(2.17)을 사용할 수 없다
는 조건 때문에 초기의 sag ratio 는 5% 로 가정
하여 λ 값을 0.2 로 준다. H 가 0 인 경우에도
식(2.15)를 사용 수 없는데, 이때에는 임의의 λ
값을 10' 의 큰 값을 주어 계산 한다. 따라서 초
기 H 가 0 이 아닌 경우 케이블은 I 점에서 거의
수평으로 되며, 이것은 또한 F_2 값이 매우 미소
하다는 것을 뜻한다. 그러므로 F_2 의 보정 관계
는 의미가 없어지게 된다.

모든 경우에서 수렴이 보장 되기 위해 프로그
램 내에서는 J점이 I점보다 높은 경우의 요소에
대해 I 점과 J 점을 바꾸어 계산하여 수렴이 얻
어 진후, 다시 본래의 위치로 변환된다. 이때,
프로그램 내에서 I 점이 J 점 보다 언제나 높게
인식 되기 때문에 V 값은 항상 - 값을 취하게 되
고, 위의 반복 과정은 F_1, F_2 에 빠르게 수렴 한
다. 구해진 F_1 과 F_2 값을 이용하여 식(2.7)의
관계로써 F_3, F_4, TI, TJ 를 구할수 있다.

3. 요소 방정식

등분포 하중에 의한 평형 형상의 기하 형태는
이전의 과정에서 정의된 절점에 대하여 유한요소
방정식을 구성 한다. 이때, 요소는 기하학적 비
선형이 고려된 케이블 요소를 사용 한다.

요소 강성 매트릭스는 다음과 같이 정의 된다.

$$[K] = [Ke] + [Kg] \quad (3.1)$$

이러한 요소 강성매트릭스는 국부 좌표계에 의
한 것으로서, 다음과 같은 좌표 변환 매트릭스에
의하여 전체좌표계의 강성 매트릭스는 변환되고
전체요소 강성 매트릭스로 조합된다.

$$[Ke] = [Cy] [Ke] [Cy] \quad (3.2)$$

$$[Kg] = [Cz] [Kg] [Cz] \quad (3.3)$$

$$[K] = [Ke] + [Kg]$$

여기에서 $[Cy]$ 와 $[Cz]$ 는 각각 탄성변환 매트
릭스와 기하학적 변환 매트릭스 이다. $[K]$ 는 전
체 강성매트릭스이다.

4. 해석방법

절점력에 의한 구조물의 해석은 비선형 해법으로써 널리 알려져 있는 Newton-Raphson 반복법과 하중증분법을 조합하여 사용한다. 또한 초기 수평 부재에서, 초기 변위를 0로 사용 할때 발생하는 singular solution 을 피하기 위해 pseudo stress 를 사용하여 초기 접선강성매트릭스들 구성 한다. 이것은 정확하지 않은 강성매트릭스 이나 그후의 반복에서 정확한 강성매트릭스가 얻어진다. 반복 i에서의 불균형력은 다음 식에 의해 얻어진다.

$$[Q] = [F] + [P] \quad (4.1)$$

여기에서, [F]는 부재에서 저항된 절점력이고 [P] 외부 절점력이다. [Q]가 주어진 허용오차 이내일때 다음 증분의 하중이 더해진다.

본 논문에서는 비교의 목적으로 하중을 4 단계의 일정한 증분 하중을 적용 하였다. 그림 3.은 본 논문에서 사용한 컴퓨터프로그램의 흐름도를 나타내고 있다.

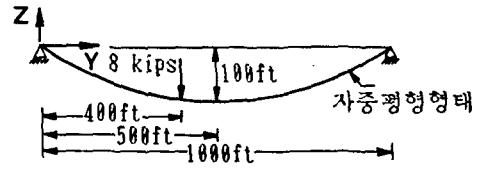
4.1 해석 모델 및 고찰

그림 4의 해석 모델은 자중에 의해서 평형화된 현수 케이블에 집중 하중 8 kips가 작용 하는 단일 케이블이다. 일반적으로 케이블 구조물은 자중 또는 prestress력에 의한 평형형상이 취해지고 난 후에 외력이 작용 하는 경우가 많기 때문에 이와 같은 모델 설정은 현실적 이라 할수 있다. 모델의 초기 위치는 지점간에 수평으로 놓여진다. 유연성반복 과정에 의해서 자중에 의한 평형 형태와 절점 외력에 의한 해석시 필요한 절점 좌표, 그리고 각요소의 자중에 의한 프리스트레스력을 제공한다.

요소의 수는 비교의 목적으로 10 개로 하였으며 하중증분은 4 개의 일정한 하중증분을 사용 하였다. 2번의 Newton-Raphson반복으로 각 하중 단계에서해가 얻어졌다.

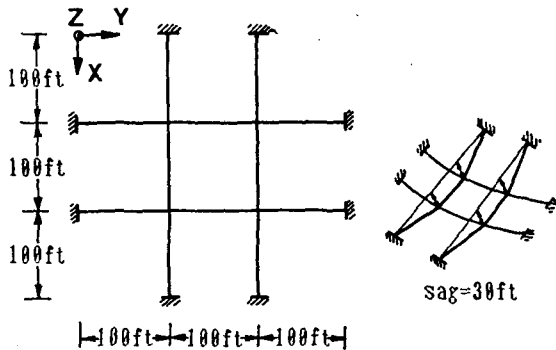
하중 점에서의 수직 변위가 참고 문헌4 에서의 해석 결과들과 비교 되었다. (표1.)

그림 5.는 초기에 프리스트레스력을 갖는 3차원 케이블 네트를 나타내고 있다. 집중 하중을 받는



W = 3.16 lb/ft
E = 19. x 10⁶ psi
A = 0.85 in²
Lu = 1025.93 ft

그림 4. 단일 케이블 (모델1)



Horizontal Member: 5.459kips
Prestress: Inclind Member : 5.325 kips
Concentrated Force : 8.0 kips
A : 0.227 in²
E : 12000 kips/in²

그림 5. 케이블 네트

표 1. 하중 작용점에서의 변위(모델1)

	수평 변위	수직 변위
PRESENT	-2.904	-18.190
CBL1	-2.819	-18.458
TRUSS	-2.772	-17.951
O'Brien	-2.82	-18.460
Michalos, & Birnstiel	-2.773	-17.953

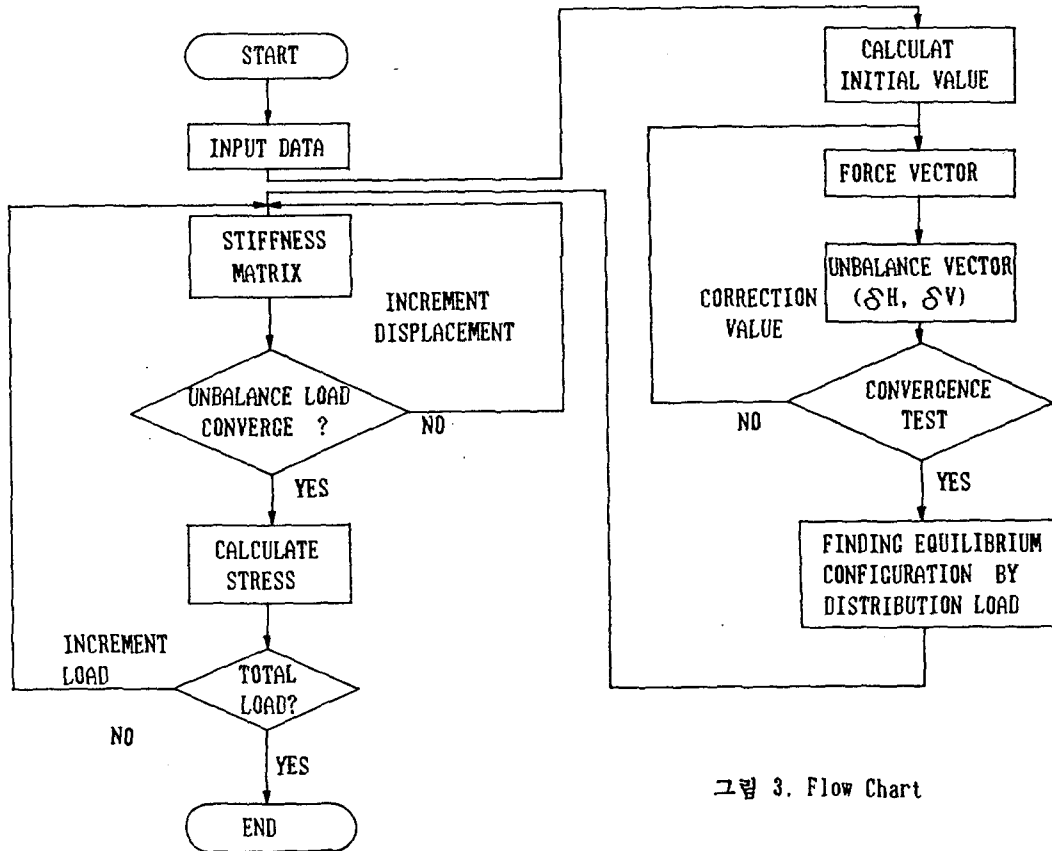


그림 3. Flow Chart

표 2. 모델 2 의 하중점에서의 변위

	X 변위	Y 변위	Z 변위
PRESENT	-0.1300	-0.1300	-1.4700
CBL1	-0.1300	-0.1398	-1.4643
TRUSS	-0.1322	-0.1322	-1.4707
Saffan	-	-	-1.4707
WEST & KAN	-0.1352	-0.1324	-1.4698

내부 절점에서의 변위가 Jarayaman 과 Knudson , Wester Kar(4), Saafan (5)의 해석결과와 비교되었다.

5. 결 론

본 논문에서는 O'Brien등이 제안한 유연성 반복 과정 과 비선형 유한 요소법을 조합한 수치해석과정을 전개하였다. 여기에서 유연성반복과정은 전체프로그램내에서 등분포 하중에 의한 평형형태를

결정하고 그에 따른 부재의 분할 기하 형태와 초기 부재력을 결정 함으로써 복잡한 형태의 구조물 해석에서 필요한 번거로운 입력데이터의 준비과정을 생략 할수 있었다. 이어서 전체 구조물의 해석은 Newton-Raphson반복법과 하중 증분법을 병용한 비선형 유한 요소법을 이용 하였으며 해석 결과는 기존의 해석결과와 잘 일치 하였다. 이에 따라서 초기 기하형태를 결정하기 어려운 복잡한 형태의 케이블 네트워크, 케이블과 막의 합성구조물에 대 해석에 매우 유용하리라 사료된다.

< 참고 문헌 >

1. O'Brien, W.T. , " General Solution of Suspended Cable Problem," J.Structural Division ASCE, VOL.93, NO.ST1, Feb., 1967, PP.1-26.
2. Peyrot, A.H. and Goulois, A.M. , " Analysis of Flexible Transmission Lines," J.Structural Division, ASCE, VOL.104, NO.ST5, MAY, 1978, PP. 763-779.

3. Peyrot, A.H. and Goulois, A.M., "Analysis of Cable Structures," Computer & Structures, VOL.10, NO.5,1979,PP.805-813.
4. Jayaraman, H.B. and Knudson, W.C. , "A Cuved Element for the Analysis of Cable Structure," Computer & Structures",VOL.14,NO.3-4,1981,PP.325-333.
5. Saafan, S.A. , "Theoretical Analysis of Suspension Roofs,"J.Structural Division, ASCE, VOL.96, NO.ST2,1970,PP.393-405.
6. Gambhir, M.L. and Batchelor, B. , "A Finite Element for 3-D Prestressed Cable Nets," INT. J.Num.Meth.Engng.,VOL.11,1977,PP.1699-1718.
7. Leonard,J.W., "Non-Linear Dynamics of Curved elements," J. Eng. Mech. DIV.,ASCE, VOL.99, 1973,PP.616-621
8. Leonard,J.W., "Incremental Responce of 3-D Cable Networks," J.Eng.Mech.DIV.,ASCE, VOL.99,1973,PP.621-629
9. Campbell,D.B., "Unbalanced Tensions in Transmission Lines,"J.Structural Division,ASCE ,VOL.96,NO.ST10,OCT.,1970,PP.2189-2207
- 10.Cook, R.D. ,CONCEPT AND APPLICATIONS OF FINITE ELEMENT, Wiley,New York,1978
- 11.Leonard, J.W., TENTION STRUCTURES,McGraw-Hill Book Co.,New York,1978