

경계요소법에 의한 3차원 유전체 구의 산란파 수치해석

(Numerical Analysis of the Electromagnetic Waves Scattered from a Dielectric Sphere by the BEM)

김 정혜\*, 나 정웅 (Jeung-Hye Kim and Jung-Woong Ra)

(Department of Electrical Engineering Korea Advanced Institute of Science and Technology)

ABSTRACT

Boundary element method using linear basis function is applied to obtain fields scattered from a 3-D dielectric sphere. Electric field integral equation is used on the surfaces of the dielectric material where its surface is discretized into trilateral cells. For plane wave incidence, scattered fields by a dielectric sphere is calculated and compared with its analytic solution. The total electric fields are calculated on the great circle of the sphere boundary as well as the outside of the sphere in the plane of the wave vector and the polarization vector of the incident electric field.

I. 서론

유전체에 의한 전자파 산란에 대한 계산은 전자기 분야에서 중요한 연구 과제로 오랫동안 많은 사람들이 연구해 왔다. 60년대 이전까지는 간단한 구조에 대한 해석적 해를 구했고 컴퓨터 용량의 증가와 수치해석 기법의 발달로 이차원 구조의 임의 모양을 가진 유전체에 대한 산란파 계산이 모멘트 방법이나 경계요소법에 의해 행해졌다. 그러나 이차원 구조에서는 평면파나 무한히 긴 선전류 등 실재로 생성하기 어려운 전원을 사용해야 하고 대부분의 유전체가 삼차원 구조이기 때문에 실제 응용에서는 제한이 많다. 따라서 임의의 입사파에 대해서 임의 모양을 가진 삼차원 유전체에 의한 산란파 계산이 필요하게 되었다.

본 논문에서는 임의의 구조를 가진 유전체가 균일한 3차원 유전체에 임의의 입사파를 가했을 때

유전체 바깥 혹은 안에서 산란파를 경계 요소 법을 적용하여 계산할 수 있게 하였다. 즉, 삼차원 구조를 가진 유전체에 전자파가 가해졌을 때 유전체 표면에 생성되는 전계 (E) 와 자계의 접선 방향 성분 ( $n \times H$ ) 을 등가 전원으로 바꿔 이에 의한 바깥영역의 전자파를 계산하는 전계 적분 방정식을 구한 후, 이 적분 방정식을 이용하여 산란파를 수치 해석으로 풀기 위해 먼저 관측점을 경계면으로 옮긴 다음 경계면의 전자장을 선형 기초함수의 조합으로 나타내고, 경계면을 삼각형 요소의 합으로 근사해서 경계면의 전자장을 구한 후, 경계 적분식을 이용하여 임의 점에서의 산란파를 계산할 수 있게 하였다. 수치 해석의 정확도를 알아보기 위해 유전체 구에 평면파가 입사했을 때의 산란파를 계산하여 해석적 해와 비교하였다.

II. 수학적 모델링

그림 (1) 과 같이 전원이 있는 무한 매질 내에 유전율이 균일한 삼차원 산란체가 있을 경우, 영역 I 은 유전체 밖의 무한 매질 영역이고 영역 II 는 유전체 영역으로 가정하고, 각 영역의 유전율과 도전율은 서로 다르고 투자율은  $\mu_0$  로 같다고 가정하면 각 영역에서 만족하는 Maxwell Equation 은 아래와 같다.

영역 I

$$\nabla \times \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times E + i\omega\epsilon_1 E = J_s \quad (1)$$

영역 II

$$\nabla \times \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times E + i\omega\epsilon_2 E = 0 \quad (2)$$

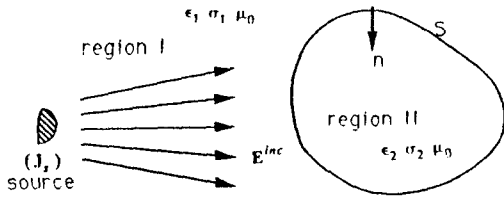


Fig 1. 삼차원 유전체에 의한 산란

여기에서  $E$  는 각 영역에서의 전장의 복소 크기,  $J_s$  는 영역 I 에서의 입사 전류,  $\mu_0$  는 비자성체의 투자율,  $\epsilon_{1,2} = \epsilon'_{1,2} + i\epsilon''_{1,2}$  는 각 영역에서의 복소 유전율,  $\epsilon'_{1,2}$  는 각 영역의 유전율의 실수부,  $\epsilon''_{1,2} = \sigma/\omega$  는 각 영역의 유전율의 허수부,  $\sigma_{1,2}$  는 각 영역의 도전율,  $\omega$  는 각 주파수,  $i$  는  $\sqrt{-1}$  이고 시간에 대한 함수는  $e^{-i\omega t}$  로 취한다.

본 문제에서의 경계조건은 무한대에서의 Radiation Condition 과 두 영역의 경계면에서의 전자기  $E_1, E_2$  와  $H_1, H_2$  간의 관계이다. 두 영역 간의 경계조건은 아래와 같다.

$$\mathbf{n} \cdot (\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2) = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{n}$  은 그림 (1) 에서와 같이 유전체 경계면의 수직 벡터로 유전체 내부로 향하게 정의했다. 식 (5) 에서 자장  $\mathbf{H}$  는 경계면에서 연속이고, (3) 과 (4) 에서  $E_{1x}, E_{1y}, E_{1z}$  를  $E_{2x}, E_{2y}, E_{2z}$  의 함수로 나타낼 수 있다. 이를 행렬식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \\ E_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x^2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + n_y^2 + n_z^2 & n_x n_y \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1\right) & n_x n_z \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1\right) \\ n_x n_y \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1\right) & n_x^2 + n_y^2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + n_z^2 & n_y n_z \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1\right) \\ n_x n_z \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1\right) & n_y n_z \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1\right) & n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} \quad (6)$$

식 (1) 을 벡터 Green 정리를 이용하여 경계 적분식으로 나타내면

영역 I

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) - \int_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla G_1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla G_1 + i\omega\mu_0(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) G_1] ds \quad (7)$$

영역 II

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla G_2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla G_2 + i\omega\mu_0(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) G_2] ds \quad (8)$$

가 되고,  $S$  는 유전체 표면의 경계면이다.

경계요소법을 적용하기 위하여 관측점을 경계면까지 접근시키면 Green 함수의 singular 특성 때문에  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  일 때 적분할 함수가 발산하게 된다. 함수가 발산하더라도 적분값은 유한한 값을 가지므로 singular point 를 피해 반경 ( $\epsilon$ ) 이 거의 0 인 구표면을 따라 적분하면 특이점에 의한 적분의 기여도는 따로 표현할 수 있다. 이를 따로 표현하여 관측점이 경계면에 있을 때 적분 방정식을 쓰면 아래와 같다.

영역 I

$$\left(1 - \frac{\Omega_r}{4\pi}\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) - \int_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla G_1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla G_1 + i\omega\mu_0(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) G_1] ds \quad (9)$$

영역 II

$$\frac{\Omega_r}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla G_2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla G_2 + i\omega\mu_0(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) G_2] ds \quad (10)$$

여기에서  $\Omega_r$  는 관측점 ( $\mathbf{r}$ ) 에서의 입체각이고,  $\int$  는 특이점을 제외한 적분을 표시한다.

### III. 경계요소법을 위한 수치해석적 근사

앞절에서 구한 경계면에서의 적분방정식으로부터 경계면에서의 전자기장  $\mathbf{E}, \mathbf{n} \times \mathbf{H}$  를 수치해석으로

구하기 위해서 경계면에서의 전자장을 각 node 에서 1 이고 다른 node 에서는 0 인 선형 기초 함수의 조합으로 근사하고, 경계면을 원래의 물체 형태를 잘 나타낼 수 있는 삼각형 요소의 합으로 나타내 경계면을 따른 면적분을 삼각형 패치를 따른 면적분의 합으로 구할 수 있게 한다.

경계면에서의 Field  $E, n \times H$  를 1차 선형함수( $\phi_j$ )의 조합으로 나타내면

$$E = \sum_{j=1}^N E_j \phi_j (r) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} n \times H &= \sum_{j=1}^N (n \times H)_j \phi_j (r) \\ &= \sum_{j=1}^N F_j \phi_j (r) \end{aligned} \quad (12)$$

이다. 여기에서  $\phi_j$  : linear nodal basis function  
 으로서 자기 node 에서는 1 이고 다른 node 에서는 0 인 선형함수이고,

$$E_j = E_{jx} x + E_{jy} y + E_{jz} z$$

$$F_j = F_{jx} x + F_{jy} y + F_{jz} z$$

이다.

식 (11), (12) 를 식 (7), (8) 에 대입한 후, N 개의 node 에 대해서 다 적용하고 x, y, z 성분별로 나누어 정리하면 각각 3N 개의 선형 방정식이 된다. 이를 행렬식으로 표현하면 아래와 같다.

$$[ C_1 ] [ F_1 ] = [ D_1 ] [ E_1 ] - [ E^{inc} ] \quad (13)$$

$$[ C_2 ] [ F_2 ] = [ D_2 ] [ E_2 ] \quad (14)$$

여기에서

$$D_{11} = \begin{bmatrix} \int (n_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + n_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + n_z \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \phi_j da & \int (n_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - n_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y}) \phi_j da & \int (n_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - n_z \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \phi_j da \\ \int (n_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - n_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y}) \phi_j da & \int (n_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + n_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y}) \phi_j da & \int (n_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - n_z \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \phi_j da \\ \int (n_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - n_z \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \phi_j da & \int (n_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - n_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y}) \phi_j da & \int (n_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + n_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + n_z \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \phi_j da \end{bmatrix}$$

$$E_j = \begin{bmatrix} E_{jx} \\ E_{jy} \\ E_{jz} \end{bmatrix} \quad C_{ij} = \begin{bmatrix} \int g \phi_j da & 0 & 0 \\ 0 & \int g \phi_j da & 0 \\ 0 & 0 & \int g \phi_j da \end{bmatrix} \quad F_j = i\omega \mu \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \end{bmatrix}$$

이고  $\alpha_i$  는 영역 I 에서  $1 - \Omega_i/4\pi$  이고, 영역 II에서는  $\Omega_i/4\pi$  이다. 행렬식 (13) 과 (14) 는 변수에 비해 방정식의 수가 적으므로 각 변수들 간의 관계를 나타내는 방정식이 필요하다. 이는 두 영역 사이의 경계 조건으로부터 구할 수 있다. 경계조건에서 H 는 연속이고 행렬식 (6) 에서와 같이 영역 I 의 임의의 node 에서의 전계  $E_1$  각 성분은 영역 II 의 같은 node 에서의 전계  $E_2$  의 각 성분의 조합으로 나타낼 수 있다. 변수들 간의 이런 관계를 고려하여 행렬식 (13), (14) 의 변수를  $E_1, F_1$  로 줄일 수 있다. 이렇게 하여 (13), (14) 는 다음과 같이 바꾸어 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} D_1 & -C1 \\ D_2 B_0 & -C2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{inc} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기에서  $B_0$  는 행렬식 (6) 으로 이루어진 영역 I 의 각 node 에서의 전계  $E_1$  을 영역 II 의 각 node 의 전계  $E_2$  와의 관계를 나타내는 행렬식이다.

위의 행렬식을 계산하면 경계면에서의  $E_1, n \times H_1$  를 구할 수 있다. 여기서 구한 경계면에서의 전자장  $E_1, n \times H_1$ 로부터 식 (7) 을 이용하면 영역 I 의 임의의 점 에서 전계를 계산할 수 있다.

#### IV. 수치해석 결과 및 결론

수치해석 결과를 정확하게 비교하기 위해 해석적 해를 구할 수 있는 유전체에 평면파가 입사되었을 때 산란파를 계산하였다. 산란체의 구조는 무한 균일 매질 내에 유전율이 균일한 유전체가 있는 경우이다. 입사 전계 ( $E^{inc}$ ) 는 x 방향으로 편향되었고 -z 방향으로 진행하는 평면파이다. 이를 phasor 로 표시하면

$$E^{inc} = x_0 e^{-ik_1 z} \quad (16)$$

이다.

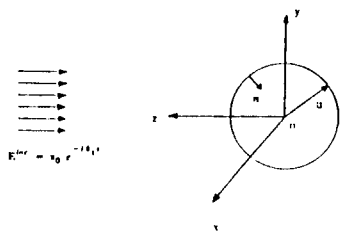


Fig. 2 평면파 입사시 유전체구에 의한 산란

평면파가 입사했을때 유전체구에 의한 산란파를 경계요소법으로 계산하기 위하여 유전체구 표면을 평면 삼각형 요소의 합으로 근사했으며 이러한 구조에서 경계면에서의 전자장을 계산한 후 식 (7) 로부터 영역 I 에서의 total field 를 계산했다. 계산 결과는 Mic series 를 근거로한 해석해와 비교하였다.

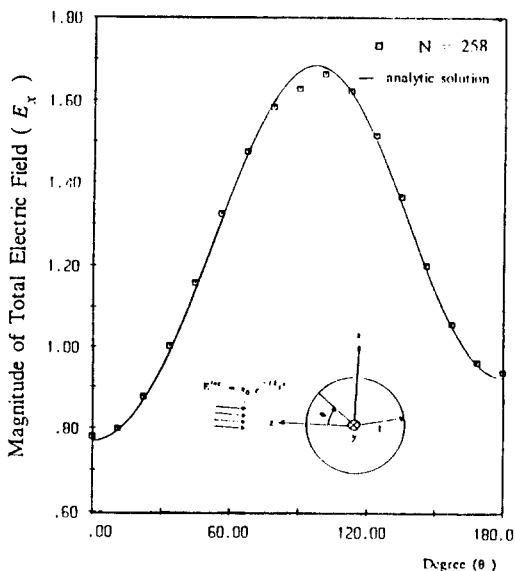


Fig. 3 경계면에서 전계의 X 방향 성분의 크기 ( $k_0 a = 1., \epsilon_{r1} = 1. \epsilon_{r2} = 2.$ ) (XZ-Plane)

본 논문에서 제시한 유전체에 의한 산란파를 경계요소법에 의한 산란파를 계산한 결과 입사파와 같은 방향에 대해서는 오차를 1% 이하까지 줄일 수 있었고 입사파와 다른 방향의 산란파에 대해서는 3% 이하까지 가능했다.

오차의 주된 원인은 경계면에서 전자장을 선형 근사한 것과 유전체 표면을 삼각형 요소로 근사함에

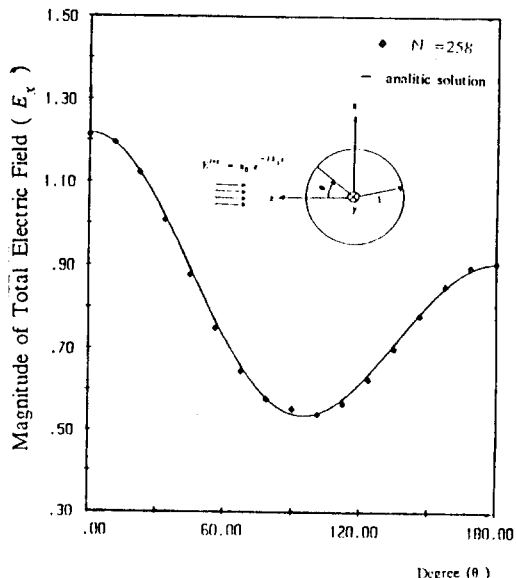


Fig. 4 경계면에서 전계의 x 방향 성분의 크기 ( $k_0 a = 1. \epsilon_{r1} = 2. \epsilon_{r2} = 1.$ ) (XZ-Plane)

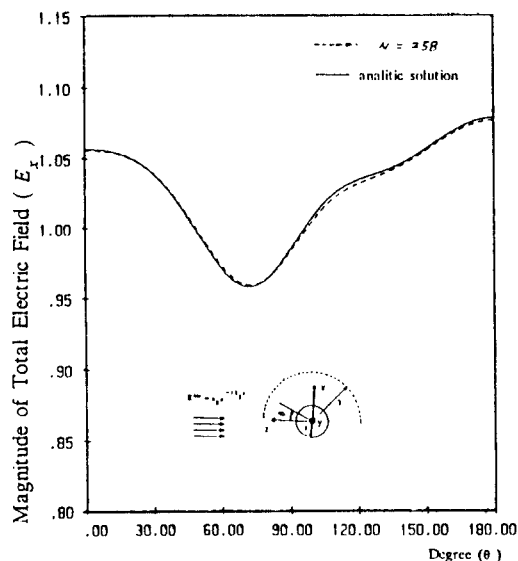


Fig. 5 r=3 에서 전계의 x 방향 성분의 크기 ( $k_0 a = 1. \epsilon_{r1} = 2. \epsilon_{r2} = 1.$ ) (XZ-Plane)

따라 node 에서의 수직 벡터정도가 불명확하고 삼각형 평면요소의 근사 때문에 원래 구의 형태를 잘 표현하지 못한점 등을 들 수 있다. 이를 극복하기 위해서 경계면을 삼각형 요소로 근사하는 대신에 2 차

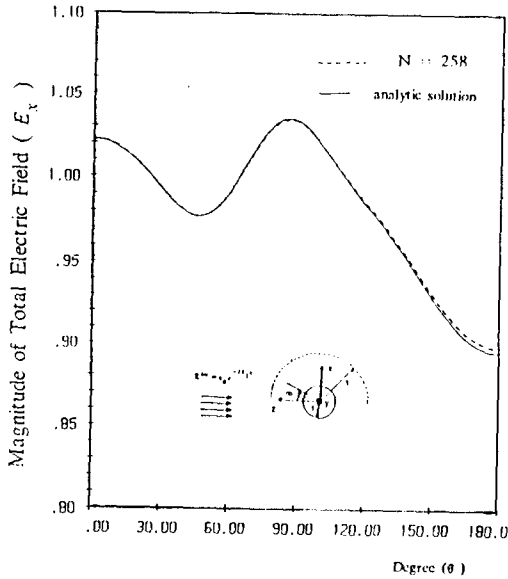


Fig. 6  $r=3$  에서 3개의 X 방향 성분의 크기 (XZ-Plane)  
( $k_{0z} = 1$ ,  $\epsilon_r = 2$ ,  $\epsilon_z = 1$ .)

혹은 그 이상의 곡면을 갖는 곡면 요소의 합으로 근사할 수 있다. 또한 3차원 벡터 문제의 가장 큰 난점은 한 node 에 변수가 6 개가 되므로 node 수를 증가시키는데 한계가 있다는 것이다. 이런 한계를 극복하기 위한 연구는 좋은 과제가 될 것이다.

#### 참 고 문 헌

- [1] D. Deirmendjian " Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions ", AMERICAN ELSEVIER PUBLISHING COMPANY, INC., NEW YORK, 1969
- [2] P. Barber and C. Yeh " Scattering of Electromagnetic Waves by Arbitrarily Shaped Dielectric Bodies ", *Applied Optics*, vol. 14, No. 12, Dec., 1975
- [3] Y. Leviatan, Amir Boag, Alona Boag, " Generalized Formulations for Electromagnetic Scattering from Perfectly Conducting and Homogeneous Material Bodies - Theory and Numerical Solution

", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-36, No. 12, Dec., 1988

- [4] K. D. Paulsen, D. R. Lynch, J. W. Strohbehn " Three - Dimensional Finite Boundary and Hybrid Element solutions of the Maxwell Equations for Lossy Dielectric Media ", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-36, Apr., 1988
- [5] W. Geyi, W. Hongshi, " Solution of the resonant frequencies of a microwave dielectric resonant using BEM ", *IEE Proceedings* , vol. 135, No. 5, Oct., 1988