

불연속면을 포함하고 있는 회전형 완전도체의 전류분포특성

김 경 언, 박 동 희, 김 정 기

중앙 대학교, 전자공학과

Current distribution of a conducting body of revolution including discontinuous surface

K. E. Kim, D. H. Park, J. K. Kim

Dept. of Electronics, Chung-ang Univ.

< ABSTRACT >

Efficient numerical method is developed for treating electromagnetic problems of scattering and radiation from surfaces.

Special consideration is given to the treatment of edges so that rather arbitrary geometrical configurations may be handled.

For the conducting body problems considered, an electric field integral formulation is used, and the method of moments is applied using pulse expansions to present currents.

Numerical results indicate that the approach is free of anomalies in the behavior of current for body of revolution.

I. 서론

전자장의 산란과 방사문제들에 있어서 복잡한 구성체들을 다루기 위한 수치해석으로써 Moment법은 광범위하게 응용되고 있다. 또한 많은 관심은 간략화된 미분방정식과 기저함수를 응용하여 불연속 조건들을 효율적으로 다룸으로써 해

의 정확성을 향상시키고 있다.

본 논문에서는 임의의 회전형 유전체가 구조적 불연속성을 갖는 경우 입사전계에 의한 전류분포를 유도하고, 이식을 회전형 완전도체에 적용하여 전류분포를 해석하였다.

이때 회전체에 대해 유도된 체적전류를 사용하는 방법대신에 등가표현전류를 사용하여 전자계 적분방정식을 사용하였고, 수치해석으로써 Moment법을 전류와 전하 양쪽을 나타내기 위해 근사 Pulse전계식을 사용하였다.

수치해석 과정에 있어서 3차원 구조의 회전체 표면을 span하는  $t$ 와 경도각  $\phi$ 에 의해 구성하였으며, 회전대칭의 잇점을 이용하여 모든 전류를  $\phi$ 에 대한 Fourier급수로 전개하였다.

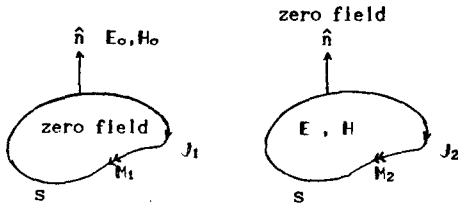
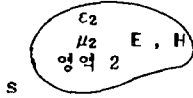
II. 본문

1. 적분방정식의 유도

등가표현전류를 이용한 적분방정식 유도과정에 있어서 임의의 모양체가 두 부분으로 분리된 선형중첩으로써 관찰 될수있다.

$$\begin{matrix} \epsilon_1 & E_0 = E^1 + E^* \\ \mu_1 & H_0 = H^1 + H^* \end{matrix}$$

영역 1



$$\begin{matrix} J_1 = \hat{n} \times (H^1 + H^*) \\ M_1 = (E^1 + E^*) \times \hat{n} \end{matrix} \quad \begin{matrix} J_2 = -\hat{n} \times H \\ M_2 = -E \times \hat{n} \end{matrix}$$

$E_0, H_0$ : 총 field       $E, H$ : 내부 field  
 $E^1, H^1$ : 입사 field       $E^*, H^*$ : 산란 field  
 $J_1, J_2, M_1, M_2$ : 표면 전류  
 $\hat{n}$ : 밖으로 향하는 단위 normal vector  
 $S$ : 임의의 모양체 표면  
 $\epsilon_1, \mu_1$ : 영역 1에 있어서의 상수값  
 $\epsilon_2, \mu_2$ : 영역 2에 있어서의 상수값

< 그림 . 1 > 임의의 모양체와 두 부분  
 으로 분리된 선형 중첩

접선 field 들은 표면 경계상에서 연속적이므로  
 다음과 같다 .

$$\hat{n} \times (E^1 + E^* - E) = 0 \quad (1)$$

$$\hat{n} \times (H^1 + H^* - H) = 0 \quad (2)$$

또한 등가 전류에 의해 만족되는 미지의 표면 전  
 류 밀도는 다음과 같다 .

$$J_1 = -J_2 = J_s \quad (3)$$

$$M_1 = -M_2 = M_s \quad (4)$$

electric vector potential과 magnetic vector  
 potential , 그리고 scalar potential 들로써 식  
 (1) , (2) 를 나타내어 각각의 potential과 표  
 면 전류 연속 방정식을 대입하면 다음식이 유도  
 된다 .

$$\begin{aligned} \hat{n} \times E^1 &= \hat{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_s [j\omega \cdot J_s (\mu_1 G_1 + \mu_2 G_2) \\ &- \frac{\nabla' \cdot J_s}{j\omega} \nabla \left( \frac{G_1}{\epsilon_1} + \frac{G_2}{\epsilon_2} \right) ] ds' \end{aligned}$$

$$- \hat{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_s M_s \times \nabla (G_1 + G_2) ds' \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{n} \times H^1 &= \hat{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_s [J_s \times \nabla (G_1 + G_2)] ds' \\ &+ \hat{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_s [j\omega \cdot M_s (\epsilon_1 G_1 + \epsilon_2 G_2) \\ &- \frac{\nabla' \cdot M_s}{j\omega} \nabla \left( \frac{G_1}{\mu_1} + \frac{G_2}{\mu_2} \right) ] ds' \end{aligned} \quad (6)$$

식 (5) , (6) 에 대해 접선 연산자가 되도록 연  
 산자를 정의하면 다음과 같다 .

$$\begin{bmatrix} L_{11} & -L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_s \\ M_s \end{bmatrix}_{\tan} = \begin{bmatrix} E^1 \\ H^1 \end{bmatrix}_{\tan} \quad (7)$$

$$L_{11}(J_s) = \frac{1}{4\pi} \int_s [j\omega \cdot J_s (\mu_1 G_1 + \mu_2 G_2)$$

$$- \frac{\nabla' \cdot J_s}{j\omega} \nabla \left( \frac{G_1}{\epsilon_1} + \frac{G_2}{\epsilon_2} \right) ] ds'$$

$$L_{12}(M_s) =$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_s M_s \times \nabla (G_1 + G_2) ds'$$

$$L_{21}(J_s) =$$

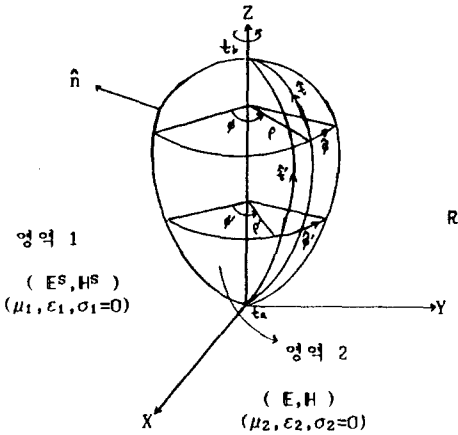
$$\frac{1}{4\pi} \int_s J_s \times \nabla (G_1 + G_2) ds'$$

$$L_{22}(M_s) = \frac{1}{4\pi} \int_s [j\omega \cdot M_s (\epsilon_1 G_1 + \epsilon_2 G_2)$$

$$- \frac{\nabla' \cdot M_s}{j\omega} \nabla \left( \frac{G_1}{\mu_1} + \frac{G_2}{\mu_2} \right) ] ds' \quad (8)$$

## 2. 수치 해석

식 (7) 을 임의의 회전형 유전체에 적용하기  
 위해 그림과 같은 좌표계를 사용한다.



여기서  $\nu$ 는  $\hat{n}$ 방향과 Z축 사이의 각이다

$$\hat{n} = \cos\nu \cos\phi \hat{x} + \cos\nu \sin\phi \hat{y} - \sin\nu \hat{z}$$

$$\hat{t} = \sin\nu \cos\phi \hat{x} + \sin\nu \sin\phi \hat{y} + \cos\nu \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}$$

$$R = [ \rho + \rho' - 2\rho\rho'\cos(\phi - \phi') + (z - z') ]^{1/2}$$

< 그림 . 2 > 회전체에 대한 표면 좌표계

그림에서 보는바와 같이 직각 좌표계의 z축을 선택 하여 generating arc라고 부르는 planar 곡선  $t$ 를 회전시킴으로써 회전체를 구성하며, 회전체의 외부영역 1과 내부영역 2는 변수  $\mu_1$   $\epsilon_1$ 과  $\mu_2$   $\epsilon_2$ 로 특성화시켰다. X-Z 평면으로부터 측정된 방위각을  $\phi$ 로하여 표면 S에 대해 좌표  $(t, \phi)$ 를 나타낸다. 또  $\rho$ 는 회전체의 반경이며, 표면 전류밀도는 두 성분vector의 합으로써 표시할 수 있다.

$$J_s = J^t + J^\phi \tag{9}$$

$$M_s = M^t + M^\phi \tag{10}$$

회전체가 Z축에 대해 회전대칭이므로 회전대칭의 각  $\phi$ 로써 Fourier급수는 mode orthogonality에 의한 system해로써 간략화 될수있다.

미지의 표면전류밀도를 Fourier mode들의 항들으로써 전개시키면 다음과 같다.

$$J_s(t, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [ J_m^t(t) + J_m^\phi(t) ] e^{jm\phi} \tag{11}$$

$$M_s(t, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [ M_m^t(t) + M_m^\phi(t) ] e^{jm\phi} \tag{12}$$

$J_m$ 와  $M_m$ 은 subdomain basis함수  $f_j$ 로써 generating arc 틀따라 전개시킨다.

$$J_m^t(t) = \hat{t} \sum_{j=1}^N a_{mj} \cdot f_j(t)$$

$$J_m^\phi(t) = \hat{\phi} \sum_{j=1}^N b_{mj} \cdot f_j(t)$$

$$M_m^t(t) = \hat{t} \sum_{j=1}^N c_{mj} \cdot f_j(t)$$

$$M_m^\phi(t) = \hat{\phi} \sum_{j=1}^N d_{mj} \cdot f_j(t)$$

(13)

여기서  $a_{mj}$ ,  $b_{mj}$ ,  $c_{mj}$ ,  $d_{mj}$ 는 구하고자하는 미지의 계수들이다.

다음으로써 testing함수를 전개하면 다음과 같다.

$$W(t, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^N [ \hat{t} f_{ln}(t) + \hat{\phi} f_{ln}(t) ] e^{-jn\phi} \tag{14}$$

식 (14)로써 내적을 정의하게되면  $W$ 는  $J_s$ 와  $M_s$  또는  $L(J_s)$ 와  $L(M_s)$ 에 대해 직교적이기때문에 각 mode들이 다른 mode들과 완전히 독립적으로 다루어지면,  $m=n$ 일때의 것을 제외하고는 모든 내적은 zero이다. 그러므로 다음과 같은 network 형태의 matrix방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle W, L_{11} J_n \rangle & \langle W, -L_{12} M_n \rangle \\ \langle W, L_{21} J_n \rangle & \langle W, L_{22} M_n \rangle \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle W, E^{inc}(t) \rangle & \langle W, H^{inc}(t) \rangle \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & M \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

$$\nabla' \cdot J_n = \frac{1}{\rho'} \left[ \frac{\partial}{\partial t'} (\rho' J^t(t')) + j_m J(t') \right] e^{-j m \phi'} \quad (19)$$

$$\nabla \Phi = \hat{t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \hat{\phi} \frac{j m}{\rho} \Phi + \hat{n} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (20)$$

$$\Phi = (G_1 + G_2)$$

이때의 G는 free space Green함수이다.

식 (16)의 일반화된 impedance matrix의 내적은 2중적분을 포함한다. 즉,

$$\int_{\Omega} ds' \int_{\Omega} ds = \int_t dt' \int_t dt \int_{\rho'}^{2\pi} d\phi' \int_{\rho}^{2\pi} d\phi \quad (21)$$

계산을 간략화 하기 위하여 J와 M대신에  $\rho J$ 와  $\rho M$ 를 근사 pulse함수로 전개하여 사용한다.

식 (17)의 일반화된 voltage matrix는 수식을 간략화 하기 위해 X-Z평면상에 존재하는 경우를 고려했다. 이때 입사전계의 본극 vector를  $\hat{u}$ 라하고, 입사전계의  $\hat{k}$ 와 Z축이 이루는 각을  $\theta$ 라할때 입사전계는 다음과 같다.

$$E^{inc} = \hat{u} e^{j k_0 (\rho \sin \theta \cos \phi + z \cos \theta)}$$

$$H^{inc} = \frac{\hat{k}_0 \times \hat{u}}{\eta_0} e^{j k_0 (\rho \sin \theta \cos \phi + z \cos \theta)}$$

$$\eta_0 \text{ (자유공간의 고유임피던스 } 120\pi \text{)} \quad (22)$$

$E^{inc}$ 가  $\theta$ 본극인 경우는 다음 식과같이 표현된다.

$$\hat{u} = \hat{x} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta$$

$$\hat{k}_0 \times \hat{u} = -\hat{y}$$

여기서 편의상 입사전계가 수직으로 입사하는 경우 내적에의한 적분식을 나타내면 다음과 같다.

$$V_{n1}^{t\theta} = -\pi \int_0^t \sin \nu \rho f_1(t) e^{-j k_0 z} dt$$

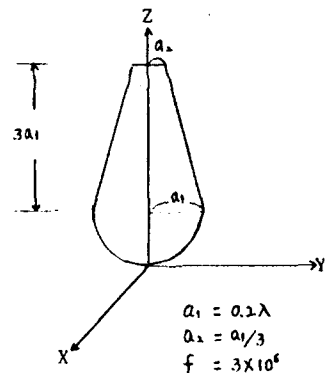
$$V_{n1}^{\phi\theta} = -j\pi \int_0^t \rho f_1(t) e^{-j k_0 z} dt$$

$$V_{n1}^{t\phi} = \frac{j\pi}{\eta_0} \int_0^t \sin \nu \rho f_1(t) e^{-j k_0 z} dt$$

$$V_{n1}^{\phi\phi} = -\frac{\pi}{\eta_0} \int_0^t \rho f_1(t) e^{-j k_0 z} dt \quad (23)$$

### 3. 결과 및 고찰

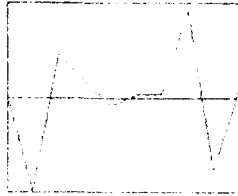
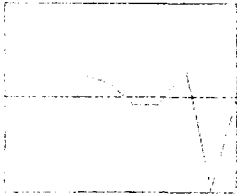
여기서 제시된 결과는 임의의 완전도체로써 잘린 cone-sphere의 전류분포 특성이다. 잘린 cone-sphere에 대해 cone각은 30°로써 고정되어 있고 주파수는 400 MHz일때 입사파는 Z축방향으로 수직입사하는 경우이다.



< 그림. 3 >

Y max  
6.1472E-02  
Y min  
-7.5153E-02

Y max  
1.5284E-01  
Y min  
-1.3968E-01



- (6) A.W. Glisson and D.R. Wilton, "Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces," IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-28, pp. 593-603, 1980.

## II. 결론

본 논문에서는 산란체특성을 고찰하기위해 임의적인 도체에 적용이 가능한 적분방정식을 유도하여 회전형 도체의 전류분포특성을 구하였다.

이 이론을 확인하기 위하여 R. F. Harrington의 데이터와 비교한결과 좋은 일치를 보였다.

앞으로 하나 이상의 유전체및 도체와 유전체로 결합된 문제의 해석으로 확장이 요구된다.

## REFERENCES

- (1) Mogens G. Andreasen, "Scattering from Body of Revolution," IEEE Trans. Antennas Propagat., AP13 pp.303-310, 1965.
- (2) R. Mittra, Computer Techniques for Electromagnetics. Pergamon Press, pp.159-264, 1973.
- (3) P. Barber and C. Yeh, "Scattering of Electromagnetic Waves by Arbitrarily shaped Dielectric Bodies," Appl. Opt., vol. 14, No. 12, pp. 2864-2872, 1975.
- (4) Josep Meixner, "The Behavior of Electromagnetic Fields at Edges," IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-20, pp. 442-446, 1972.
- (5) J.R. Mautz and R. F. Harrington, "Radiation and Scattering from bodies of revolution," Appl. Sci. Res., vol. 20, pp. 405-435, 1969.