

ABSTRACT

In order to take account of the statistical properties of random variables used in the structural analysis, the conventional approach usually adopts the safety factor based on past experiences for the qualitative assessment of structural safety problem. Recently, new approach based on the probabilistic concept has been applied to the assessment of structural safety in order to circumvent the difficulties of the conventional approach in choosing the appropriate safety factor.

Thus, computer program called "Probabilistic finite element method" is developed by incorporating the probabilistic concept into the conventional matrix method in order to investigate the effects of the random variables on the final output of the structural analysis. From the comparison of some examples, it can be concluded that the PFEM developed in this study deals with consistently with the uncertainty of random variables and provides the rational tool for the assessment of structural safety of plane frame.

1. 서 론

기존의 구조해석은 구조해석시 필요한 모든 변수, 즉 하중, 재료의 특성 및 구조물의 치수 등이 항상 일정한 값을 갖는 확정론적인 변수로 가정하여 계산을 수행하였다. 그러나, 실제로 구조해석을 수행하는 경우 모델링 하는 과정에서 구조물을 단순화 및 이상화 하므로 실제 구조물과는 어느정도 다르게 표현 될 가능성이 많으며, 또한 복잡한 환경으로부터 도출되는 하중을 정확히 추정한다는 것은 용이하지 않다. 이처럼 구조해석에 사용되는 변수들이 불변의 특성을 갖기 보다는 어느 기준치 또는 기대치를 중심으로 분산되어 있는 특성을 갖고 있어서, 이러한 불확실성들을 무시하고 해석하면 최악의 경우 치명적인 사고에 이르기 까지도 한다. 따라서 기존의 방법에서는 이러한 분산 특성을 보다 효율적으로 고려하기 위해 종래부터 경험에 입각한 안전계수를 사용해 오고 있는 실정이다. 그러나 복잡하고 새로운 형태의 구조물에 있어서 안전도를 기존의 안전계수만으로 평가하기에는 문제점이 있어, 최근 확률이론에 입각한 신뢰성이론을 구조물의 안전도 해석에 활용하려는 시도가 많이 이루어 지고 있다[1][2].

신뢰성 이론에 따라 구조물의 안전도를 파괴확률로서 표시하려면, 우선 구조물의 안전성을 판단할 수 있는 파괴방정식(Failure equation)을 극한 상태 설계개념에 의해 구한 뒤, 이 파괴방정식에 포함되어 있는 확률 변수들의 통계적 특성인 평균값과 분산정도를 이용하여 주어진 파괴모드에 대한 파괴확률을 불변 이차 모멘트법(Advanced First-order Second-moment Method)에 의해 구하는 것이 통상적인 방법이다[3][4]. 이러한 방법을 이용하여 구조물의 안전도를 평가하기 위해선 우선 구조물이 안전한가 아닌가를 판단하는 파괴방정식의 유도가 필수적이다. 이에 반해 일반적인 구조해석에서는 최종적으로 얻어진 최대응력이 주어진 구조부재의 허용응력에 비해 얼마만큼 적은가 하는 것이

구조물의 안전성을 평가하는 파괴방정식으로 사용되어 왔고, 해석 결과도 기존의 구조해석에서는 단지 평균값만을 이용한 판례로 신뢰성 해석에서와 같이 구조물의 안전성에 대해 파괴확률과 같은 정량적인 평가 대신에 안전계수에 의한 정성적인 평가방법에 의해 구조물의 안전도를 확인할 수 밖에 없었다. 특히, 같은 안전계수를 갖는다 하더라도 확률변수들이 갖는 분산정도에 따라 파괴확률이 판이하게 달라질 수 있어 기존의 구조해석은 사용되는 변수들의 통계적 특성을 충분히 고려하지 못한 문제점이 있다.

따라서, 본 연구에서는 구조해석에 필요한 변수들이 random 한 특성을 가질 경우 구조물의 구조해석을 확률론적으로 할 수 있는 확률 유한 요소 해석법(Probabilistic Finite Element Method)을 개발하여 주어진 하중 조건하에서 발생하는 최대응력 및 변위에 대한 통계적 특성을 구해 주어진 재료의 허용응력, 탄성을 등의 통계적 특성에 의한 구조물의 파괴확률을 추정하고자 한다. 다시말해, 기존의 구조해석에서 사용되는 변수들이 갖고 있는 random 특성들이 과연 얼마만큼 구조 해석의 최종 결과에 영향을 미치는가를 확률적으로 처리하여 구조물의 안전성을 정량적으로 평가 하고자 한다.

2. 문제의 정식화

2.1 변위의 불확실량

선형 탄성 해석을 위한 변위법의 기본가정 하에, 전체 구조물에 대한 하중-처짐의 강성방정식은 다음과 같다.

$$[K]\{Q\} = \{F\} \tag{1}$$

여기서, [K]: 전체 강성 행렬
{Q}: 변위벡터
{F}: 하중벡터

식(1)에 포함된 확률변수들 r_i ($i=1,2,\dots, n$)라 하면, 식(1)의 각 항은 r_i 의 함수로 표현된다. 즉,

* 정회원 서울대학교 조선공학과 조교수
** 서울대학교 조선공학과 박사과정

$$\begin{aligned} K &= K(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) \\ Q &= Q(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) \\ F &= F(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 상기의 모든 항들은 주어진 random 변수들의 분산정도에 따라 그 영향을 받으므로, 각항을 평균치와 분산성분으로 분리하면,

$$([\bar{K}] + [\delta K]) (\{\bar{Q}\} + \{\delta Q\}) = (\{\bar{F}\} + \{\delta F\}) \quad (3)$$

이 되는데, 여기서 $\{\bar{Q}\}$ 는 random 변수 r_i 의 평균치 \bar{r}_i 를 식(1)에 대입하여 얻어지는 값이다. 즉

$$\{\bar{Q}\} = [\bar{K}]^{-1} \{\bar{F}\} \quad (4)$$

식(3)을 전개하면,

$$\begin{aligned} [\bar{K}] \{\bar{Q}\} + [\bar{K}] \{\delta Q\} + [\delta K] \{\bar{Q}\} + [\delta K] \{\delta Q\} \\ = \{\bar{F}\} + \{\delta F\} \end{aligned} \quad (5)$$

가 되는데, $[\delta K]$ 와 $\{\delta Q\}$ 에 의한 2 차항을 무시하면 식(5) 는 다음과 같은 평균치에 의한 성분과 분산정도에 의한 성분으로 분리 된다[6][7].

$$[\bar{K}] \{\bar{Q}\} = \{\bar{F}\} \quad (6)$$

$$[\bar{K}] \{\delta Q\} = \{\delta F\} - [\delta K] \{\bar{Q}\} \quad (7)$$

식(7) 에서는 $\{\delta Q\}$ 만이 미지량이므로, $\{\delta Q\}$ 는

$$\begin{aligned} \{\delta Q\} &= [\bar{K}]^{-1} (\{\delta F\} - [\delta K] \{\bar{Q}\}) \\ &= [\bar{K}]^{-1} \{\delta P\} \end{aligned} \quad (8)$$

이 되어, $\{\delta P\}$ 를 random 변수 r_i 의 미계수로 표시하면

$$\{\delta P\} = \{\partial P / \partial r\} \{\delta r\} + 1/2 \{\partial^2 P / \partial r^2\} \{\delta r^2\} + \dots \quad (9)$$

이 되는데, 여기서 2차항 이상을 무시하여, 식(9)를 식(8)에 대입하면,

$$\{\delta Q\} = [\bar{K}]^{-1} \{\partial P / \partial r\} \{\delta r\} \quad (10)$$

따라서

$$\begin{aligned} \{\delta Q\} \{\delta Q\}^T \\ = [\bar{K}]^{-1} \{\partial P / \partial r\} \{\delta r\} \{\delta r\}^T \{\partial P / \partial r\}^T [\bar{K}]^{-1T} \end{aligned} \quad (11)$$

이 얻어져, 변위벡터의 covariance 행렬이 다음과 같이 구해진다.

$$[\Gamma_{QQ}] = [H] [\Gamma_{rr}] [H]^T \quad (12)$$

여기서, $[\Gamma_{QQ}]$: 변위의 covariance 행렬
 $[\Gamma_{rr}]$: random 변수의 covariance 행렬
 $[H]$: $[\bar{K}]^{-1} \{\partial P / \partial r\}$

$[\Gamma_{QQ}]$ 의 대각 요소들은 각 절점에서의 변위의 분산정도를 나타내며, 비대각 요소들은 변위간의 상관 관계를 표시한다.

2.2 단면력의 불확실량

변위법은 각 부재의 절점 변위를 미지수로 하는 구조해석법이므로, 이들 절점변위의 평균치와 분산정도를 이용하여 각 부재의 단면력의 평균치와 분산정도를 구해야 하는데, 특히 이들 단면력의 분산정도를 구하는 과정은 이들 단면력의 평균치와 분산정도가 구조 부재의 파괴확률을 구하는데 있어서 없어서는 안 될 중요한 인자인 관계로 확률 유한 요소 해석법에 있어서 변위의 분산을 구하는 과정에 못지 않게 중요하다.

각 부재의 단면력을 부재좌표계로 표시하면

$$\{f\} = [k] \{q\} \quad (13)$$

이 되는데, 이를 평균치와 변동성분의 항으로 나타내면,

$$\{\bar{f}\} + \{\delta f\} = ([\bar{k}] + [\delta k]) (\{\bar{q}\} + \{\delta q\}) \quad (14)$$

이 되므로, 식(14)를 전개하여 $[\delta k] \{\delta q\}$ 항을 무시하고 정리하면,

$$\{\bar{f}\} = [\bar{k}] \{\bar{q}\} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \{\delta f\} &= [\bar{k}] \{\delta q\} + [\delta k] \{\bar{q}\} \\ &= ([\bar{k}] \{\partial q / \partial r\} + [\partial k / \partial r] \{\bar{q}\}) \{\delta r\} \\ &= [h] \{\delta r\} \end{aligned} \quad (16)$$

따라서

$$\{\delta f\} \{\delta f\}^T = [h] \{\delta r\} \{\delta r\}^T [h]^T \quad (17)$$

이 되어, 결국 단면력의 covariance 행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$[\Gamma_{ff}] = [h] [\Gamma_{rr}] [h]^T \quad (18)$$

여기서, $[\Gamma_{ff}]$: 단면력에 대한 covariance 행렬

3. 수치해석 및 고찰

3.1 프로그램의 검증

본 연구에서 개발된 프로그램의 타당성을 검증하기 위해 간단한 부정정보에 대한 확률론적 구조해석 결과를 프로그램의 결과와 비교하였다.

(1) 하중이 random 특성을 갖는 경우

Fig. 1 과 같은 보에 Table 1 과 같은 4 가지 경우의 하중이 작용하는 문제를 해석하였는데, 편의상 고정단 반력(R_4), 고정단 모우먼트(M_4), 절점 2 의 처짐(y_2), 단순지지점의 경사각(θ_1) 에 대해 비교하였으며 그 결과는 Table 2 와 같다. Fig. 1 과 같은 보의 거동은 재료역학이론에 의하면,

$$\begin{aligned} R_4 &= 13/27 P_1 + 23/27 P_2 + 49/36 w \\ M_4 &= 6/27 P_1 + 5/27 P_2 + 13/6 w \\ y_2 &= 8/405 P_1 + 23/2025 P_2 + 47/1350 w \\ \theta_1 &= 1/75 P_1 + 1/150 P_2 + 13/600 w \end{aligned} \quad (19)$$

이 되는데, random 변수 Y 가 평균치와 표준편차를 이르는 다른 random 변수 $X_i (i=1,2, \dots, n)$ 의 선형결합으로 표시된다고 하면, 즉

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots + a_n X_n \quad (20)$$

이 Y 의 평균치와 분산정도는

$$E(Y) = \sum_{j=1}^n a_j E(X_j) \quad (21)$$

$$VAR(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j COV(X_i, X_j)$$

되어, Table 1 의 값들을 식(19) (21) 에 대입하면 주어진 문제의 정확해를 얻게된다.

Table 2. 에서 보는 바와 같이 프로그램의 결과가 정확한 해와 일치함을 알 수 있는데, 이는 보 문제의 유한요소법에 의한 해석결과는 그 자체가 해석적인 정확한 해와 일치하기 때문이며, 특히 제 2 장의 이론 전개과정에서 무시했던 $[\delta K] \{\delta Q\}$, $[\delta k] \{\delta q\}$ 및 식(9)의 고차항들이 하중만이 random 변수인 경우에는 실제로 그 값이 0 이기 때문이기도 하다. 즉

$$[\delta K] = [\delta Q] = \{\partial^2 P / \partial r^2\} = \{0\}$$

(2) 탄성 계수 E 가 random 특성을 갖는 경우

Fig. 2 와 같은 보에 Table 3. 과 같은 4 가지 경우의 하중이 작용하는 문제를 해석하였는데, 편의상 고정단 반력(R_3), 고정단 모우먼트(M_3), 절첩 2 의 처짐(y_2), 단순지지점의 경사각(θ_1) 에 대해 비교하였으며 그 결과는 Table 4 와 같다. 이 경우, 보의 거동은 재료역학이론에 의하면,

$$\begin{aligned} R_3 &= (9E_1 + 2E_2)/(14E_1 + 2E_2) P \\ M_3 &= (10E_1 + 5E_2)/(7E_1 + E_2) P \\ y_2 &= (75E_1 + 100E_2)/12E_2(14E_1 + 2E_2) P \\ \theta_1 &= (5E_1 + 15E_2)/4E_2(14E_1 + 2E_2) P \end{aligned} \quad (22)$$

이 되는데, 각 식을 $E_1 = E_2 = 10, P = 5$ 에 대해 Taylor 전개를 하고 1 차항까지 취하면,

$$\begin{aligned} R_3 &= 3.438 - 0.01953(E_1 - 10) \\ &\quad + 0.01953(E_2 - 10) + 0.6875(P - 5) \\ M_3 &= 9.375 - 0.19530(E_1 - 10) \\ &\quad + 0.19530(E_2 - 10) + 1.8750(P - 5) \\ y_2 &= 0.456 - 0.02040(E_1 - 10) \\ &\quad + 0.02520(E_2 - 10) + 0.0912(P - 5) \\ \theta_1 &= 0.156 - 0.00977(E_1 - 10) \\ &\quad - 0.00586(E_2 - 10) + 0.0313(P - 5) \end{aligned} \quad (23)$$

이 되어, Table 3 의 값들을 식(21) (23) 에 대입하면 주어진 문제의 근사해를 얻게된다.

Table 4. 에서 보는 바와 같이 E 값이 random 특성을 갖는 경우에도 프로그램의 결과가 근사해와 잘 일치함을 알 수 있는데, 이는 근사해를 구하는 과정에서도 프로그램과 마찬가지로 고차항을 무시하였기 때문이다.

3.2 Frame 의 확률 구조 해석

Fig. 3 과 같은 frame 구조물에 random 하중 P_1, P_2 가

작용할 때, 구조물의 거동 및 단면력의 평균치와 분산치를 근사해와 비교해 보았다. 이때 하중 P_1 과 P_2 사이의 상관계수를 $\rho = 0.0, 0.5$ 인 경우에 대해 계산하였다. 프로그램의 결과와 비교 하기 위하여 해석적인 방법으로 frame 구조물의 근사해를 구하기 위해 보의 축방향의 변형을 무시하여 구조물의 대칭성을 고려하여 강성방정식을 구하면,

$$\{F\} = [K] \{Q\} \quad (24)$$

$$\text{여기서, } \{F\} = \left\{ \frac{P_1}{2}, 0., \frac{P_2}{2}, 0. \right\}^T$$

$$[K] = \frac{12}{225} \begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & -1.0 & 7.5 \\ 0.0 & 420. & -7.5 & 37.5 \\ -1.0 & -7.5 & -1.0 & -7.5 \\ 7.5 & 37.5 & 7.5 & 34.5 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\{Q\} = \{u_2, \theta_2, u_3, \theta_3\}^T$$

이 되므로, $\{Q\} = [K]^{-1} \{F\}$ 로 부터,

$$\begin{aligned} u_2 &= 11.04 P_1 + 12.86 P_2 \\ u_3 &= 12.86 P_1 + 27.75 P_2 \\ \theta_2 &= 0.228 P_1 + 0.471 P_2 \\ \theta_3 &= 0.015 P_1 + 0.273 P_2 \end{aligned} \quad (26)$$

이 얻어지고, 부재의 단면력중 부재 1 과 5 의 재단모우먼트를 구하면,

$$\begin{aligned} M_{(1-2)} &= -3.96 P_1 - 4.21 P_2 \\ M_{(2-5)} &= 3.28 P_1 + 6.78 P_2 \end{aligned} \quad (27)$$

이 되므로 각 random 변수의 평균치와 표준편차를 식(26),(27) 에 대입하여 구조물의 절첩변위와 단면 모우먼트의 평균과 표준편차를 식(21) 에 의해 구하면 근사해가 Table 5. 와 같이 얻어진다.

3.3 확률 유한 요소법에 의한 선체 휨강도 해석

본 프로그램의 유용성을 검토하기 위해 DWT 19000 ton 유조선[9]의 web frame 의 휨강도 해석을 확률론적 구조해석 방법에 의해 수행하였다. 실선 Model에 보다 접근하기 위하여 Fig. 4(a) 와 같은 web frame을 Fig. 4(b)와 같이 이상화하였는데 여기에서 중방향 부재의 영향은 그 부재들을 증가의 spring으로 치환하여 고려하였으며 bracket의 영향은 해당 bracket에 대한 spanpoint[10]를 구하여 그 부분을 강재로 치환하였다. 또 Fig. 5(a,b) 와 같은 하중조건을 고려하였는데 여기에서 선형적으로 변화하는 분포하중은 프로그램의 편의상 Fig. 5(c) 와 같이 몇개의 구간에서 균일 분포하중이 작용하는 것으로 보고 해석하였다. 이때 1 - 3 및 4 - 15 번 하중은 각각 분산의 특성이 같으므로 상관계수를 1.0 으로 하였으며 16 번 하중은 외부하중과 탱크 내부하중 모두에 영향을 받으므로 1 - 3 번 하중과의 상관계수는 0.3, 4 - 15 번 하중과의 상관계수는 0.7 로 하였다. 이 때 random 변수로서는 외력과 부재의 허용응력 만을 가정하였고, 기하학적 치수나 탄성계수는 상수로 취급하였다. 하중의 COV 를 변화시키면서 web frame의 휨강도 해석을 수행한 결과를 Table 6. 및 Fig. 6 에 실었다. 결국 web frame 의 확률 구조해석에 의해 구조물에 작용하는 하중의

random 특성이 구조해석의 최종 결과인 최대 굽힘응력의 통계 특성으로 변환되어 각 부재 단면에서 파괴확률을 평균 이차 모우먼트법에 의해 계산할 수 있게 되었다. 이때 개개의 random 변수들의 분포는 편의상 정규분포로 가정하였다.

4. 결 론

구조물에 내재하는 여러가지 불확실양들이 구조물의 거동에 미치는 영향을 평가하기 위한 확률 유한요소 해석법을 개발하여 그 유효성을 검토하여 보았고, 특히 이러한 변수들의 통계적 특성들로부터 구조물의 파괴확률을 추정할 수 있어, 중건의 해석방법에 비해 보다 합리적인 구조물의 안전도 평가가 가능하게 되었다.

추후 더 연구 되어야 할 과제는 각 random 변수들의 통계적 분포를 고려할 수 있고, 각 변수들간의 종속적인 관계도 함께 고려할 수 있는 신뢰성 이론의 불변 이차 모우먼트법을 적용하여 보다 엄밀한 파괴확률을 구하는 방법과 유한요소 해석법과의 결합시키는 연구가 요망되며, 아울러 frame 구조물을 벗어나 판 구조물등의 확률 구조해석 이라든지, 압축하중을 받는 구조물의 좌굴해석에 이러한 확률론적 해석방법을 가미하여, 구조물의 좌굴강도에 대한 확률해석이 가능토록 하는 연구가 기대된다.

후 기

본 연구는 한국 과학 재단의 86년도 목적기초 연구지원으로 수행되었으며, 이 기회에 관계자 여러분에 깊은 사의를 표한다.

참 고 문 헌

- [1] S.M. Planeix, "Recent Progress in Probabilistic Structural Design.", Advanced in Marine Structures, pp 670-697, Dunfermline, May 1986.
- [2] Alaa E. Mansour, "Probabilistic Design Concepts in Ship Structural safety and Reliability.", SNAME, 1972.
- [3] P.T. Christensen, M.J. Baker, "Structural Reliability Theory and Its Application.", Springer-Verlag Berlin Heidenberg New York 1982.
- [4] A.H. Ang, W.H. Tang, "Probabilistic Concepts in Engineering Planning and Design.", 1984, WILEY.
- [5] S. Nagagili, T. Hisada, "확률 유한요소법 입문.", 배풍관.
- [6] Kamal Handa, Gunnar Karrholm, "Application of Finite Element Method in the Statistical Analysis of Structures.", Chalmers University of Technology, 1975, Sweden.
- [7] Kamal Handa, Anderson K. "Application of Finite Element Method in the Statistical Analysis of Structures.", ICOSSAR '81, Elsevier.
- [8] A.D. Kiureghian, J.B. Ke, "Finite-Element Based Reliability Analysis of Frame Structures.", ICOSSAR '85, Kobe, Japan.
- [9] 寺澤一雄, "선체 구조 역학", 해문당.
- [10] Yamaguchi I., "On the Tests of Fixed Beam with bracket.", SNAJ, vol. 102, 1958.
- [11] Per Lersbryggen, DnV Strength Manual, 1981.

Table 1. Statistical properties of random loads for various cases

(Unit P : kN, w : kN/m)

	μ_{P1}	μ_{P2}	μ_w	σ_{P1}	σ_{P2}	σ_w	$\rho_{P1, P2}$
Case 1	4.0	6.0	---	0.4	0.5	---	---
Case 2	4.0	6.0	---	0.4	0.5	---	0.5
Case 3	---	---	3.0	---	---	0.3	---
Case 4	4.0	6.0	3.0	0.4	0.5	0.3	---

Table 2. Results of probabilistic structural analysis

		CASE 1		CASE 2		CASE 3		CASE 4	
		Exact	Program	Exact	Program	Exact	Program	Exact	Program
R4(KN)	Mean	7.037	7.037	7.037	7.037	4.083	4.083	11.120	11.120
	COV	6.64	6.64	7.79	7.79	10.0	10.0	5.58	5.58
M4(KNm)	Mean	10.222	10.222	10.222	10.222	6.500	6.500	16.720	16.720
	COV	6.45	6.45	7.78	7.78	10.0	10.0	5.54	5.54
y2(m)	Mean	0.147	0.147	0.147	0.147	0.104	0.104	0.252	0.252
	COV	6.61	6.61	8.03	8.03	10.0	10.0	5.67	5.67
θ_1	Mean	0.0933	0.0933	0.0933	0.0933	0.065	0.065	0.1580	0.1580
	COV	6.74	6.74	8.11	8.11	10.0	10.0	5.71	5.71

Table 3. Statistical properties of random loads for various cases
(Unit P : kN, E : kN/m²)

	μ_{x1}	μ_{x2}	μ_P	σ_{x1}	σ_{x2}	σ_P	$\rho_{x1,x2}$
Case 1	10.	10.	5.0	0.5	1.0	---	---
Case 2	10.	10.	5.0	0.5	1.0	---	0.5
Case 3	10.	10.	5.0	0.5	1.0	0.5	---
Case 4	10.	10.	5.0	0.5	0.5	---	1.0

Table 4. Results of probabilistic structural analysis

		CASE 1		CASE 2		CASE 3		CASE 4	
		Aprox	Program	Aprox	Program	Aprox	Program	Aprox	Program
R3(KN)	Mean	3.438	3.437	3.438	3.437	3.438	3.437	3.438	3.437
	COV	0.64	0.64	0.49	0.49	10.0	10.0	0.0	0.0
M3(KNm)	Mean	9.375	9.375	9.375	9.375	9.375	9.375	9.3750	9.375
	COV	2.33	2.33	1.80	1.80	10.3	10.3	0.0	0.0
y2(m)	Mean	0.456	0.456	0.456	0.456	0.456	0.456	0.456	0.456
	COV	5.97	5.97	6.93	6.93	11.65	11.65	5.0	5.0
θ_1	Mean	0.1563	0.1563	0.1563	0.1563	0.1563	0.1563	0.1563	0.1563
	COV	4.88	4.88	5.96	5.96	11.13	11.13	5.0	5.0

Table 5. Results for probabilistic structural responses of frame

		$\rho = 0.0$		$\rho = 0.5$	
		Aprox	Program	Aprox	Program
u2(m)	Mean	3.438	3.437	3.438	3.437
	COV	0.64	0.64	0.49	0.49
u3(m)	Mean	9.375	9.375	9.375	9.375
	COV	2.33	2.33	1.80	1.80
θ_2	Mean	0.456	0.456	0.456	0.456
	COV	5.97	5.97	6.93	6.93
θ_3	Mean	0.1563	0.1563	0.1563	0.1563
	COV	4.88	4.88	5.96	5.96
M1(N-m)	Mean	9.375	9.375	9.375	9.375
	COV	2.33	2.33	1.80	1.80
M2(N-m)	Mean	0.456	0.456	0.456	0.456
	COV	5.97	5.97	6.93	6.93

Table 6. Probability of failure of various parts

		Deck	L.Bhd.	Shell	Bott.	Strut
Max.B.M.(Ncm)		5.17E7	5.26E7	6.40E7	9.87E7	2.98E7
I (cm ⁴)		4.46E5	5.23E5	6.26E5	9.82E5	1.54E5
y (cm)		79.8	83.0	87.6	103.2	40.0
B.Stress(N/cm)		9260.1	8344.7	8956.3	10376.	7768.2
Safety Factor		1.94	2.16	2.00	1.73	2.32
COV of Loads	Stress	Deck	L.Bhd.	Shell	Bott.	Strut
10 x	COV(x)	9.66	9.68	8.45	9.21	9.52
	β	4.35	4.89	4.63	3.74	5.25
30 x	COV(x)	28.98	29.04	25.35	27.63	28.56
	β	2.70	3.20	3.12	2.25	3.58
50 x	COV(x)	48.30	48.40	42.25	46.05	47.60
	β	1.81	2.18	2.16	1.49	2.49
70 x	COV(x)	67.62	67.76	59.15	64.47	66.64
	β	1.34	1.63	1.62	1.10	1.87

where $\sigma_a = 18000. \text{ N/cm}^2$ (DaV rule)

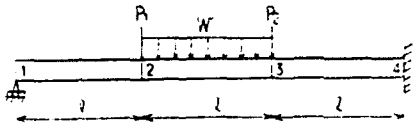


Fig. 1 Simple indeterminate structure

$EI = 100 \text{ KN-m}^2$
 $l = 2 \text{ m}$

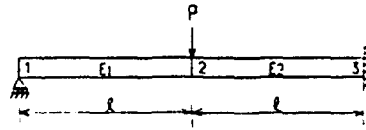
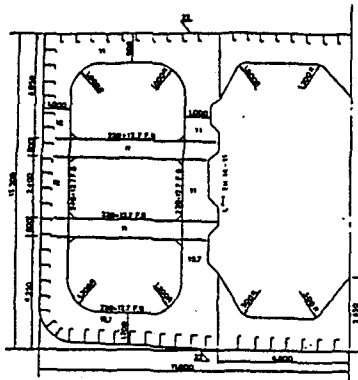
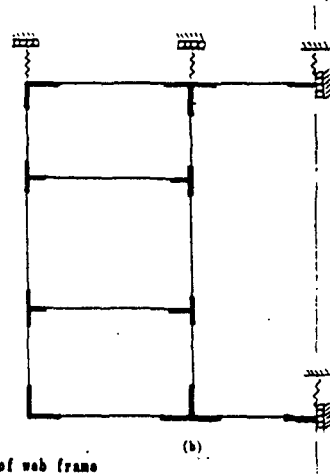


Fig. 2 Simple indeterminate structure

$I = 10 \text{ m}^4$ $I = 5 \text{ m}^4$
 $\mu_1 = 5 \text{ kN}$
 $\mu_{11} = \mu_{12} = 10 \text{ kN/m}^2$

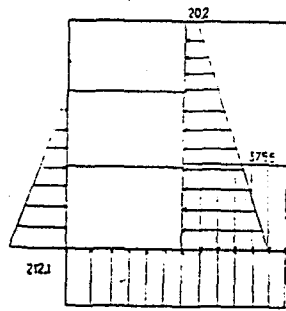
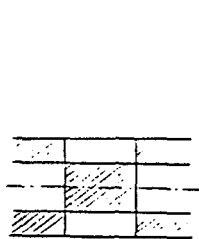


(a)

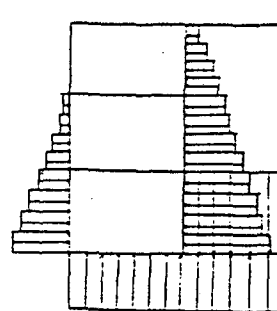


(b)

Fig. 4. Idealization of web frame



(b)



(c)

Fig. 5. Idealization of loading

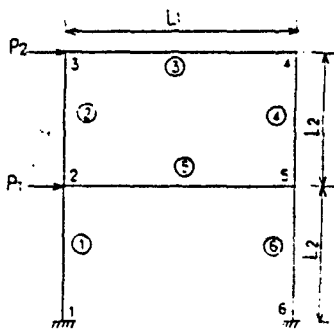


Fig. 3. Frame structure for probabilistic analysis

$E = 10 \text{ kN/m}^2$
 $I_1 = 4 \text{ m}^4$
 $I_2 = 1 \text{ m}^4$
 $L_1 = 25 \text{ m}$
 $L_2 = 15 \text{ m}$

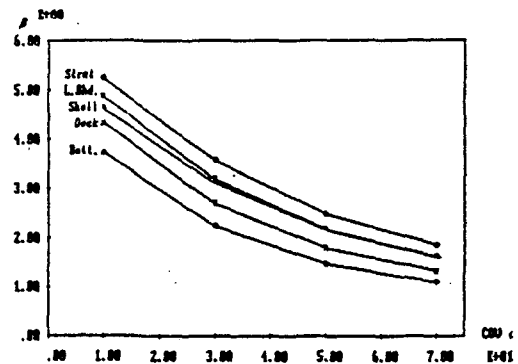


Fig. 6. Probability of failure of various parts