

구조물의 동특성 추정방법에 관한 연구

Identification of Structural Dynamic Systems

오윤정방* Shinozuka, Masanobu**
Yun, Chung-Bang

ABSTRACT

Methods for identification of modal properties of linear structures are presented. The extended Kalman filtering technique is employed. The state equation is formulated by two different ways, namely by the time domain and frequency domain approaches. Verifications are carried out by using simulated records of ground acceleration and structural response. Then the techniques are applied to the estimation of modal parameters of a scaled model for a 3-story building which is installed on a shaking table.

1. 서론

최근 국내외적으로 자연재해, 구조적 노후 등으로 구조적 안전성의 검토가 요구되는 구조물의 수가 급증하고 있는 실정이라서 기존 구조물의 강성 및 강도에 대한 현재상태의 추정에 대한 연구가 전 세계적으로 활발히 진행되고 있다¹⁻¹⁰. 본 논문에서는 구조물에 작용되는 입력하중과 거동응답의 측정기록을 바탕으로 구조계의 동특성을 추정하는 방법에 대하여 연구하였다. 이에 관련된 기법으로는 최소자승법^{11,12,13}, Instrumental Variable 방법^{8,13,14}, Maximum Likelihood 방법^{8,15,16}, Extended Kalman Filtering^{9,17,18}을 이용하는 방법 등이 있는데, 여기서는 선형만이 아니고 비선형계의 문제에도 용이하게 활용될 수 있는 Extended Kalman Filtering 기법을 사용하여 연구하였다.

지진하중을 받는 구조물에 대하여, 거동에 큰 영향을 주는 최초 수개의 자유진동 모드에 관련된 계수들을 추정하였으며, 이를 위하여 상태방정식을 통상의 시간영역만이 아니고 주파수영역에서 구성하는 방법도 아울러 연구하였다. 위의 두 방법의 검증은 시뮬레이션 기법에 의한 방법과 함께 Shaking Table에 설치된 소형 구조모형을 사용한 실험적 방법으로 수행되었다. 연구결과, 본 논문에서 제시한 두 방법이 기본이 되는 수개의 주요 모드의 동특성을 잘 추정하여 줌을 알 수 있었다.

2. 운동방정식

수평지진하중을 받는 구조계(n-자유도)의 운동방정식은 아래와 같다.

$$M_0 \ddot{Z} + C_0 \dot{Z} + K_0 Z = - M_0 \{1\} \ddot{x}_g \quad (1)$$

여기서 Z , \dot{Z} , \ddot{Z} 는 구조물의 절점변위, 속도, 가속도 벡터; \ddot{x}_g 는 지반의 수평가속도; M_0 , C_0 , K_0 는 구조계의 질량, 감쇠 및 강성행렬; 그리고 $\{1\}$ 는 값이 1 또

는 0인 하중계수벡터이다.

구조계의 비감쇠 자유진동 모드행렬(Φ)을 이용하면, 식(1)은 아래와 같이 변환된다.

$$\ddot{\eta}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = - \Gamma_j \ddot{x}_g \quad (2)$$

여기서 η_j 는 j-번째 모드좌표계($Z = \Phi\{\eta\}$); ω_j , ξ_j 는 j-번째 모드에 대한 자유진동수 및 감쇠비; 그리고 Γ_j 는 모드지진하중계수($= \sum_{k=1}^n m_k \phi_{kj}$)이다.

본 연구에서와 같이 구조계의 동적계수들을 구조물 거동의 측정기록을 바탕으로 추정할 때, 측정기록이 제한된 절점에서만 가용한 것이 통상의 경우이다. 따라서 여기서는 한 절점(i)에서의 측정치만이 가용하다고 가정하였다. 이 절점의 응답(Z_i)을 각 모드의 기여도(u_{ij})의 합으로 나타내면 아래와 같으며,

$$Z_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} \eta_j \quad (3)$$

또한 u_{ij} 는 아래의 식을 만족한다.

$$\ddot{u}_{ij} + 2\xi_j \omega_j \dot{u}_{ij} + \omega_j^2 u_{ij} = - p_{ij} \ddot{x}_g \quad (4)$$

여기서 p_{ij} 는 u_{ij} 에 대한 지진하중계수($= \phi_{ij} \Gamma_j$)이다.

3. 상태방정식

다음절에서 설명될 Extended Kalman Filtering 기법을 사용하여 구조계의 동특성을 추정하기 위하여, 본 논문에서는 식(4)를 시간영역과 주파수영역에서의 두가지 상태방정식(State Equation)으로 변환하였다.

시간영역 상태방정식

구조계의 상태변수벡터(State Vector)를 구조물의 응

* 정희원 한국과학기술원 토목공학과 교수

** 미국 Princeton 대학교 토목공학과 교수

답과 미지계수를 포함시켜서 아래와 같이 정의하면

$$X = \{X_1^T, X_2^T, \dots, X_n^T\}^T \quad (5)$$

$$X_j = \{x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j}, x_{5j}, x_{6j}\}^T \\ = \{u_{ij}, \dot{u}_{ij}, \ddot{u}_{ij}, \xi_j, \omega_j, p_{ij}\}^T \quad (6)$$

식(4)로부터 선형가속도법을 사용하여 다음과 같은 불연속시간 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \\ \vdots \\ X_n(k+1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1(X_1(k);k) \\ g_2(X_2(k);k) \\ \vdots \\ g_n(X_n(k);k) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서, $X_j(k)$ 는 $t=k\Delta t$ 에서의 $X_j(t)$ 의 값을 나타내며, $g_i(X_j(k);k)$ 는 성분의 크기가 6인 벡터로서, 처음의 세 성분은 $X_j(k)$ 의 성분의 비선형함수이며, 나머지 세 성분은 식(6)과 같이 시간에 따라 변하지 않는 상수들 (ω_j, ξ_j, p_{ij})에 해당되므로 각각 $X_j(k)$ 의 해당성분과 동일하게 나타내진다. 식(7)에서 구조계의 모형화와 입력지진의 측정에 따른 오차를 무시하였다.

만약 구조물의 i -번째 절점에서 가속도(Z_i)가 측정되었다면, 측정방정식(Observational Equation)은 아래와 같이 된다.

$$Y(k) = \langle 0, 0, 1, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0, 0; \dots \rangle \begin{Bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_n(k) \end{Bmatrix} + v(k) \quad (8)$$

여기서 $Y(k)$ 는 $t=k\Delta t$ 에서의 측정치이며, $v(k)$ 는 이때의 측정오차이다.

주파수영역 상태방정식

이 방법에서는 측정된 지진가속도 및 구조물 응답의 기록으로부터, 지진가속도에 대한 구조물상 한 절점에서의 변위(Z_i)의 주파수응답함수 $H_i(\omega)$ 가 구해졌다고 가정할 후, 이로부터 구조계의 동적특성(ω_j, ξ_j, p_{ij})을 추정하게 된다. 식(3)과 (4)의 Fourier 변환으로부터, $H_i(\omega)$ 는 아래와 같이 나타내진다.

$$H_i(\omega) = \sum_{j=1}^n H_{ij}(\omega) \quad (9)$$

$$\text{여기서 } H_{ij}(\omega) = \frac{-p_{ij}}{(\omega_j^2 - \omega^2) + i(2\xi_j\omega_j\omega)} \quad (10)$$

그리고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.

구조계의 상태변수벡터를 아래와 같이 미지의 동적 계수들로 정의하면,

$$X = \{X_1^T, X_2^T, \dots, X_n^T\}^T \quad (11)$$

$$X_j = \{\xi_j, \omega_j, p_{ij}\}^T \quad (12)$$

주파수영역에서의 상태방정식은 아래와 같이 간단히 구해진다.

$$X(k+1) = X(k) \quad (13)$$

여기서 $X(k)$ 는 $\omega = k\Delta\omega$ 에서의 $X(\omega)$ 값이다. 반면, 측정방정식은 식(10)으로부터 아래와 같이 상태변수들의 비선형함수로 나타내진다.

$$Y(k) = \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} \text{Re}[H_{ij}(X(k);k)] \\ \text{Im}[H_{ij}(X(k);k)] \end{matrix} \right\} + \{v(k)\} \quad (14)$$

여기서 $\text{Re}[\cdot], \text{Im}[\cdot]$ 는 각각 복소수의 실수부와 허수부를 의미하며, $\{v(k)\}$ 는 $H_i(k)$ 의 측정오차 벡터이다. 앞절의 시간영역의 경우는 비선형 상태방정식과 선형 측정방정식(식(7)과 (8))으로 구성되나, 주파수영역의 경우는 선형 상태방정식과 비선형 측정방정식으로 이루어진다.

4. Extended Kalman Filter

앞절에서는, 구조계의 상태변수벡터를 구조물의 응답과 함께 미지계수를 포함시켜서 정의할 경우 운동방정식이 비선형 상태방정식으로 변환될 수 있음을 보였다. 이 방정식에 Extended Kalman Filtering기법^{9,17,18}을 사용하면 미지의 계수는 상태변수벡터의 일 부분으로서 구할 수 있다. Extended Kalman Filter는 각 시점에서 그때까지의 추정된 상태변수와 측정된 거동의 응답을 바탕으로 하여 상태변수의 추정값을 점진적으로 개선하는 기법으로 이의 개략적인 내용은 아래와 같다.

상태방정식과 측정방정식이 다음과 같은 경우를 생각하면,

$$X(k+1) = \{g(X(k);k)\} + \{w(k)\} \quad (15)$$

$$Y(k) = \{h(X(k);k)\} + \{v(k)\} \quad (16)$$

여기서, $\{w(k)\}$ 와 $\{v(k)\}$ 는 각각 시스템오차와 응답측정오차 벡터로서, Covariance행렬이 Q_k 와 R_k 이다.

시점이 $k\Delta t$ 인 경우의 상태변수의 추정값과 응답의 추정값을 바탕으로, 시점이 $(k+1)\Delta t$ 인 경우에 대하여 상태변수를 예측하면, 그 결과는 아래와 같다.

$$\hat{X}(k+1/k) = E\{X(k+1)|Y(1), Y(2), \dots, Y(k)\} \\ = \{g(\hat{X}(k/k);k)\} \quad (17)$$

$$P(k+1/k) = \phi(k+1,k)P(k/k)\phi^T(k+1,k) + Q_k \quad (18)$$

여기서 $P(k+1/k)$ 는 $\hat{X}(k+1/k)$ 의 오차 Covariance 행렬을 나타내며, $\phi(k+1,k)$ 는 선형화된 상태전이행렬(State Transition Matrix)로서 $X(k)=\hat{X}(k/k)$ 에서의 $g(X(k);k)$ 의 Jacobian행렬을 나타낸다. 또한 위 결과를 $(k+1)$ -시점의 응답의 측정치($Y(k+1)$)를 활용하여 보정하면(Filtering), 그 결과는 아래와 같다.

$$\hat{X}(k+1/k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1) \cdot [Y(k+1) - h(\hat{X}(k+1/k);k)] \quad (19)$$

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1)M(k+1)]P(k+1/k) \cdot [I - K(k+1)M(k+1)]^T + K(k+1)R_k K^T(k+1) \quad (20)$$

여기서, $K(k+1)$ 는 Kalman Gain행렬로서 아래와 같이 구해진다.

$$K(k+1) = P(k+1/k)M^T(k+1) \cdot [M(k+1)P(k+1/k)M^T(k+1) + R_k]^{-1} \quad (21)$$

그리고 $M(k+1)$ 는 측정방정식의 선형화계수행렬로서 $h(X(k);k)$ 의 $\hat{X}(k+1/k)$ 에서의 Jacobian행렬이다.

식(17)-(21)에서 알 수 있듯이 상태변수 $X(k)$ 는 초기상태인 $\hat{X}(0/0)$ 와 $P(0/0)$ 가 주어지면, 즉각적으로 구해될 수 있다. 그러나 본 연구의 경우는 상태변수가 미지의 동적계수를 포함하고 있어서(식(6)과 (12)) 이의 초기 추정값이 필요하며, 또한 이 초기 추정값의 불확실성에 대한 영향의 검토가 매우 중요하게 된다. 본 논문에서는 최근에 개발된 Weighted Global Iteration 방법^{4,5)}을 이용하여 위의 문제를 해결하였다.

5. 예제해석 및 토의

시뮬레이션 해석

지진입력(그림 1a)을 받는 구조체에 대하여 시뮬레이션 기법으로 구한 구조물응답(가속도)의 시계열(그림 1b)을 바탕으로 초기 두개의 진동모우드에 대한 값을 추정한 후, 그 결과를 최초 가정된 값과 비교함으로써(표 1과 2) 앞에서 기술한 기법들의 타당성을 검토하였다. 표 1과 2에서 보여주듯이, 미지계수의 추정은 첫번째 모우드에 대하여 먼저 수행한 후, 이 추정치를 이용하여 두번째 모우드를 추정함으로써, 한번에 구해야 할 미지계수의 수를 줄여서 단계적으로 추정하는 방법을 사용하였다. 위의 결과는 구조물응답의 측정치가 표준편차로 10%의 오차를 포함하는 경우인데, 시간영역법과 주파수영역법 공히 매우 좋은 결과를 주나, 정확도에서 시간영역의 결과가 다소 우월함을 보여주고 있다. 그림 1c는 시간영역법으로 추정된 계수를 사용하여 계산된 구조물의 가속도를 보이는데, 그림 1b의 측정결과와 거의 일치함을 보여주고 있다.

표 1 추정된 모우드 계수(시간영역해석)

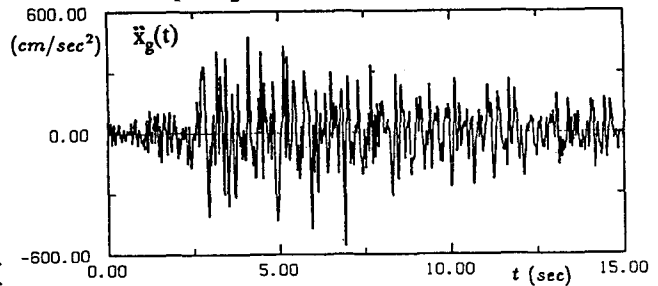
모우드 계수	정확한 값	초기 가정치	추정치		
			1	2	3
ξ_1	0.05	0.5	0.175	0.175	0.05
ω_1	6.28	5.0	6.615	6.615	6.282
P_{i1}	0.724	0.5	1.121	1.121	0.721
ξ_2	0.05	0.5	-	0.021	0.05
ω_2	9.42	15.0	-	9.562	9.42
P_{i2}	0.276	0.5	-	0.078	0.275

주: 1. 측정오차 : 10 % (기하평균)
2. ω_1 과 ω_2 의 단위 = rad/sec

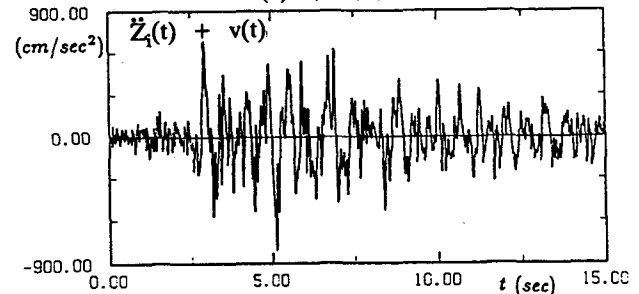
표 2 추정된 모우드 계수(주파수영역해석)

모우드 계수	정확한 값	초기 가정치	추정치		
			1	2	3
ξ_1	0.05	0.5	0.056	0.056	0.054
ω_1	6.28	5.0	6.189	6.189	6.183
P_{i1}	0.724	0.5	0.766	0.766	0.737
ξ_2	0.05	0.5	-	0.048	0.050
ω_2	9.42	15.0	-	9.311	9.309
P_{i2}	0.276	0.5	-	0.256	0.262

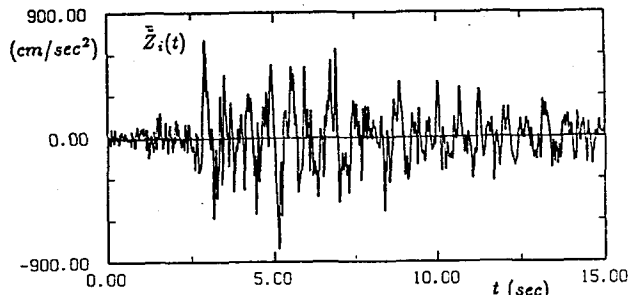
주: 1. 측정오차 : 10 % (기하평균)
2. ω_1 과 ω_2 의 단위 = rad/sec



(a) 지진가속도



(b) 추정된 구조물의 상대가속도



(c) 추정된 구조물의 상대가속도

그림 1. 시뮬레이션된 기록을 이용한 추정결과 (시간영역해석 : 측정오차 = 10%)

실험적 연구

그림 2와 같이 Shaking Table에 설치된 3층건물의 단순화한 소형모형에 대하여 실험을 수행한 후, 측정 기록을 바탕으로 구조물의 동특성을 추정하였다. 측정 기록으로는 건물기초(Shaking Table)와 3층(최상층)에서의 가속도를 활용하였다. 그림 3은 반복되는 하중의 경우, 건물기초와 3층에서의 가속도를 보인 것이며, 그림4는 기초에 작용된 충격하중의 경우에 대한 것이다. 표 3은 위의 경우에 대하여 추정된 3모우드의 계수들을 구조모형의 실제 크기를 근거로 구조해석한 결과와 비교한 것이다. 구조해석 결과와 비교하여 추정결과들이 초기의 2모우드에 대하여는 매우 좋은 결과를 얻었음을 알 수 있다. 최고차인 3차 모우드에 대하여는 결과가 좋지 못함을 보여주고 있는데, 이는 3차 모우드가 구조물의 진동에 미치는 영향이 매우 작으므로 판단된다.

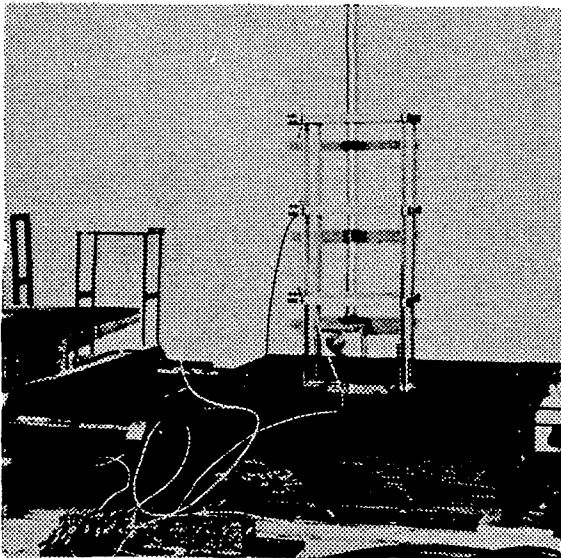
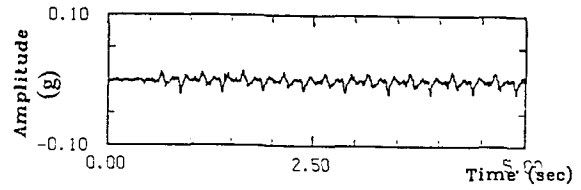
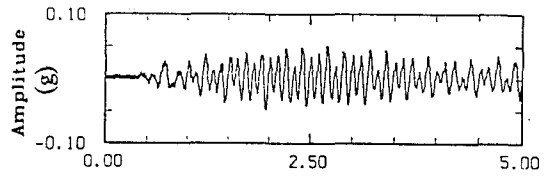


그림 2. 건물모형과 Shaking Table

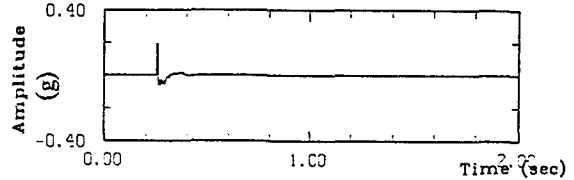


(a) 지반가속도

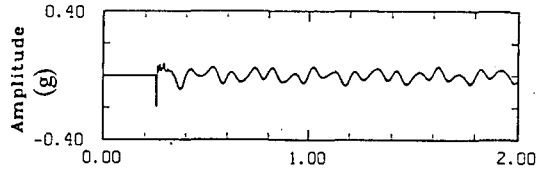


(b) 3층의 상대가속도

그림 3. 측정된 지반 및 구조물의 거동(실험-I)



(a) 지반가속도



(b) 3층의 상대가속도

그림 4. 측정된 지반 및 구조물의 거동(실험-II)

표 3 실험에 의해 추정된 모우드 계수

모우드계수	실험 I	실험 II	구조해석
ω_1	22.36	22.4	24.06
ξ_1	0.0023	0.029	-
P_{13}	1.181	1.174	1.20
ω_2	64.22	62.7	69.3
ξ_2	0.0014	0.0014	-
P_{23}	-0.263	-0.32	-0.25
ω_3	363.6	93.0	102.4
ξ_3	0.107	0.0016	-
P_{33}	0.168	0.07	0.05
지반하중	반복하중	충격하중	

주: 1. 건물모형의 지반과 3층에서 측정된 가속도를 사용하였음.
 2. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 의 단위 = rad/sec

6. 결론

본 논문에서는 다자유도를 가지는 구조계의 동특성을 Extended Kalman Filtering기법을 사용하여 추정하는 방법에 대하여 연구하였다. 이를 위하여 운동방정식으로 부터 시간영역과 주파수영역의 두가지 방법으로 상태방정식을 구성하였으며, 각 방법의 효율성을 검토하였다. 시뮬레이션기법에 의한 위의 두 방법의 검증과 함께 소형 구조모형을 이용한 실험적인 검토도 수행하였는데, 두 방법이 공히 구조물의 주요 진동모우드에 대한 동특성을 효율적으로 잘 추정하여 줌을 알 수 있었다. 실제 구조계와 같이 많은 자유도를 가진 구조계의 활용시, 본 논문에서 제시한 기법의 효율성검토와 이 방향으로의 지속적인 연구가 필요하다고 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한·미양국 과학재단의 지원으로 수행중인 국제공동연구의 결과이며, 양재단의 지원에 감사를 표한다.

참고문헌

1. Chen, J.-C. and Garba, J.A.(1987), "Structural Damage Assessment Using a System Identification Technique," *Proc. of the Workshop on Structural Safety Evaluation Based on System Identification Approaches*, Lambrecht, West Germany, Hune 29-July, pp. 474-492.
2. DiPasquale, E. and Cakmak, A.S. (1987), *Detection and Assessment of Seismic Structural Damage*, NCEER Technical Report NCEER-87-0015, Dept. of Civil Engrg., Princeton University.
3. Hart, G.C. and Yao, J.T-P. (1977), "System Identification in Structural Dynamics," *J. of Engrg. Mechanics*, ASCE, Vol. 103, No. EM6, pp. 1089-1104.
4. Hoshiya, M. and Saito, E. (1984), "Structural Identification by Extended Kalman Filter," *J. of Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 110, No. 12, pp. 1757-1770.
5. Hoshiya, M. and Maruyama, O.(1987), "Identification of Nonlinear Structural Systems," *Proc. of ICASP-5*, Vancouver, Canada, Vol. I, pp. 182-189.
6. Kozin, F. and Natke, H.G. (1986), "System Identification Techniques," *Structural Safety* Vol. 3, pp. 269-316.
7. Natke, H.G., Yao, J.T-P. (1986), "System Identification Approach in Structural Damage Evaluation," *ASCE Structures Congress '86*, Preprint 17-1.
8. Shinozuka, M., Yun, C-B. and Imai, H.(1982) "Identification of Linear Structural Dynamic Systems," *J. of Structural Engrg.*, ASCE, Vol. 108, No. EM6, pp. 1371-1390.
9. Yun, C-B. and Shinozuka, M.(1980), "Identification of Nonlinear Structural Dynamic Systems," *J. of Structural Mechanics*, Vol. 8, pp. 187-203.
10. Yun, C-B., Kim, W-J. and Ang A.H-S.(1989) "Damage Assessment of Bridge Structures by System Identification," *Proc. of ICOSAR '89*, San Francisco, CA.
11. Eykhoff, P.(1974), *System Identification - Parameter and State Estimation*, John Wiley & Sons, New York.
12. Lee, R.C.K. (1964), *Optimal Estimation, Identification and Control*, Research Monograph, MIT Press.
13. Ljung, L. (1987), *System Identification - Theory for the User*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
14. Wong, K-Y. and Polack, E.(1967), "Identification of Linear Discrete Time Systems Using the Instrumental Method," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, pp.707-718
15. Astrom, K.I. and Eykhoff, P.(1971), "System Identification - A Survey," *Automatica*, Vol. 7, pp. 123-162.
16. Kashyap, R.L.(1970), "Maximum Likelihood Identification of Stochastic Linear Systems," *IEEE Trans. of Automatic Control*, Vol.AC-15, pp. 25-34.
17. Kalman, R.E. and Bucy, R.S. (1961), "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," *J. of Basic Engrg*, ASME, Series D, Vol. 83, pp. 95-108.
18. Jazwinski, A.H.(1970), *Stochastic Processes and Filtering Theory*, NY, Academic Press.