

지붕 배수의 부정류
(Unsteady Flow in a Roof Drain)

황 창 호 *
은 태 훈 **

요 지

강우로 인한 급경사면의 흐름 해석은 지배방정식인 연속방정식과 운동량 방정식에 의해 수치적으로 해석된다. 이에대한 해석 방법에는 수문학적인 방법과 수리학적인 방법이 있는데, 본 연구에서는 세인트 베난트 방정식을 초기 및 경계조건에 맞게 푸는 수리학적인 방법을 이용하였고, 일반적인 완경사면에서 그 영향이 작아 무시되었던 경사의 영향을 고려한다. 수치해석 과정은 지배방정식에 무차원 매개변수를 도입하여 6점 음해법을 이용하여 해석하였다.

수치실험은 마닝(Manning)의 조도계수 n 을 변화시키면서, 각각 경사에서 강우에 의한 평형상태에 도달한 이후의 수심과 유량, kinematic flow 수, 후르드 수, 평형상태 도달시간등 변수 상호간의 관계를 고찰하였다.

1. 서 론

지표류 흐름(overland flow)을 지배하는 기본요소로는 유역 평면의 형상특성과 강우특성으로 주어지고, 지표류의 수리학적인 특성은 강우강도와 강우지속시간, 침투, 경사, 길이, 조도계수등의 인자에 영향을 받는다. 이경우 지표류의 거동은 공간과 시간적으로

* 한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정

* 한양대학교 공과대학 토목공학과 교수

변하는 부정부등류 (spatially varied unsteady nonuniform flow)이다. 이러한 지표류의 흐름특성을 규명하기 위해서는 모형실험과 수치실험이 있는데, 수치실험을 통하여 지표류 흐름에 대한 만족할만한 해를 얻을 수 있다면 시간적인 면과 경제적인 면에 있어서 매우 효율적일 것이다.

이와같은 경우로 인한 흐름의 해석 방법에는 수문학적인 방법과 수리학적인 방법이 있는데 본 연구에서는 세인트 베난트 (St. Venant) 방정식을 수치적으로 해석하는 수리학적인 방법을 이용하였다.

본 연구에서는 그림 1.과 같은 형상의 지붕면에 대하여 수치모형을 적용하여 일정한 강우강도로 강우가 시작되면서부터 강우에 의한 지붕 경사면의 흐름상태가 평형에 다다를때까지 수치모형 실험을 수행함으로써 경사면에서의 수심, 유량의 변화와 평형상태에 도달한 후의 수심과 유량을 고찰하였다. 그러므로서 경사면, 특히 지붕면의 흐름에 대한 제반사항을 파악하여 이를 실제 설계 및 배수 (drainage) 관계에 이용할 수 있겠다.

본 연구에서는 불투수 경사면에 대하여 수치모형을 적용하였으므로 흐름에 대한 침투의 영향을 고려하지 않았다.

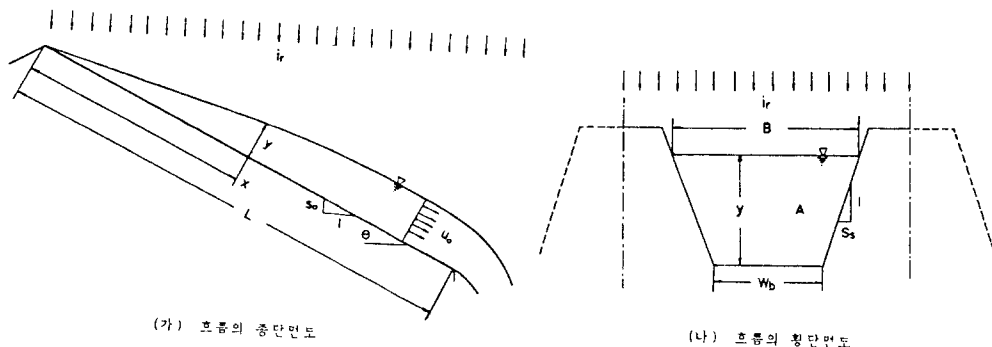


그림 1. 흐름의 단면

2. 지배방정식과 초기 및 경계조건

2.1 지배방정식

지배방정식을 적용하는데 있어서 다음의 가정을 도입한다.

- 1) 흐름은 일방향(unidirectional)이며, 흐름의 단면에서는 균일한 유속분포(uniform velocity distribution)를 가진다.
- 2) 작용하는 수압은 정수압으로 본다.
- 3) 수로 벽면에 생기는 마찰손실은 마닝공식으로 계산한다.
- 4) 강우의 흐름방향의 유속성분은 무시한다.
- 5) 강우강도는 시간적, 공간적으로 균일분포한다.

지배방정식은 다음의 연속 방정식과 운동량 방정식으로 표현된다.

연속 방정식

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = i, \quad (1)$$

운동량 방정식

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \cos \theta g A \frac{\partial y}{\partial x} = gA (S_0 - \cos \theta S_f) - i, \frac{Q}{A} \quad (2)$$

완경사면의 흐름을 해석할 경우 그림 1.(가)에 나타난 경사 θ 는 $\sin \theta$ $\tan \theta$ 로 표현할 수 있고 $\cos \theta$ 1.0로 나타낼 수 있으나, 본 연구에서는 운동량 방정식인 식 (2)의 각 항 중에서 수심에 따른 정수압의 변화를 표시하는 항 ($\cos \theta g A \frac{\partial y}{\partial x}$)과 중력 및 마찰손실을 표시하는 항 ($gA (S_0 - \cos \theta S_f)$)에 수로 바닥의 경사가 고려된 점이 경사가 작은 자연 수로에 적용되는 세인트 베난트 방정식과 다르다.

식 (2)의 $\frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있으며

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (3)$$

흐름의 마찰경사의 항 S_f 는 마닝공식을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_f = \frac{n^2 Q |Q|}{A^2 R_h^{4/3}}$$

연속 방정식과 운동량 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

연속 방정식

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} = i, \quad (4)$$

운동량 방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2QB}{A} \frac{\partial y}{\partial t} - \left(\frac{Q^2}{A^2} B - \cos \theta gA \right) \frac{\partial y}{\partial x} \\ = gA \left(S_0 - \cos \theta n^2 \frac{Q|Q|}{A^2 R_k^{4/3}} \right) - 3i, \frac{Q}{A} \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 지배 방정식의 무차원화

본 연구에서는 지배방정식을 무차원화 함으로서 각 매개변수들의 영향을 고찰하는데 편리함을 도모하고, 흐름의 현상을 보다 쉽게 해석할 수 있으며 다른 연구결과와의 비교가 용이하므로 지배방정식을 무차원화 하기 위하여 다음의 무차원 매개변수를 도입한다. 여기에서 L 은 수로길이이며, y_0 와 u_0 는 평형상태에 도달한 후의 수로의 하류단에서의 유량에 대한 등류수심과 등류유속이다.

$$\begin{aligned} X^* &= \frac{x}{L} & Y^* &= \frac{y}{y_0} & T^* &= t \frac{u_0}{L} \\ U^* &= \frac{u}{u_0} & B^* &= \frac{B}{y_0} & A^* &= \frac{A}{y_0^2} \\ F_0^* &= \frac{u_0}{\sqrt{gy_0}} & I_r^* &= \frac{i_r L}{u_0 y_0^2} & Q^* &= \frac{Q}{u_0 y_0^2} \end{aligned}$$

이와같은 무차원 매개변수를 식(4)과 (5)에 대입하면 다음의 무차원 지배방정식을 얻을 수 있다. 편의상 *는 제거한다.

무차원 연속 방정식

$$\frac{\partial Q}{\partial X} + B \frac{\partial Y}{\partial T} = I_r, \quad (6)$$

무차원 운동량 방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial T} - \frac{2QB}{A} \frac{\partial Y}{\partial T} - \left(\frac{Q^2}{A^2} B - \cos \theta \frac{A}{F_0^2} \right) \frac{\partial Y}{\partial X} \\ = kA \left(1 - \frac{\cos \theta}{S_0} C_f \frac{Q|Q|}{A^2 R_k^{4/3}} \right) - 3I_r, \frac{Q}{A} \end{aligned} \quad (7)$$

여기에서 k 는 kinematic flow수로서, 등류흐름의 변수에 대한 길이와 경사의 영향을 나타내는 매개변수이다.

$$k = \frac{S_0 L_0}{y_0 F_0^2}$$

2.3 초기 및 경계조건

지표류의 초기조건은 전 흐름면이 건조상태이므로 모든 점에서의 수심 및 유량은 강우가 시작되는 $t=0.0$ 에서 0.0 이다. 그러나 본 연구에서는 수심의 초기값을 0.0 이 아닌 등류수심의 1.0%를 사용하였는데 이는 수심의 초기값을 0.0 으로 할 경우 차분식의 계산 불능이 되는 초기치 문제 (starting problem)때문에 부득이 작은값을 초기수심으로 이용하였다.

상류(upstream flow)의 경계조건은 그림 2. 와 같이 대칭조건 (symmetry condition)을 이용한다. 즉 $U_M=0.0$, $Y_L = Y_R$, $U_L = -U_R$ 임을 알 수 있다. 하류의 경계조건으로서는 흐름이 상류(subcritical flow)인 경우에는 수로의 끝에서 한계수심(critical depth)이 발생하므로 이를 하류단의 경계조건으로 취하고, 흐름이 사류(supercritical flow)인 경우에는 하류단의 경계조건은 필요하지 않다. 즉,

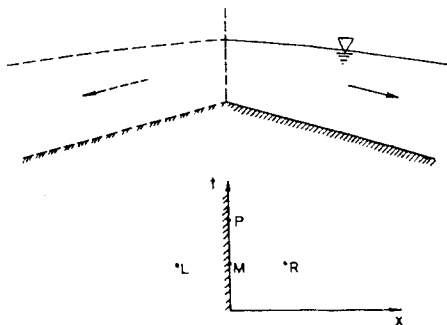


그림 2. 대칭 경계

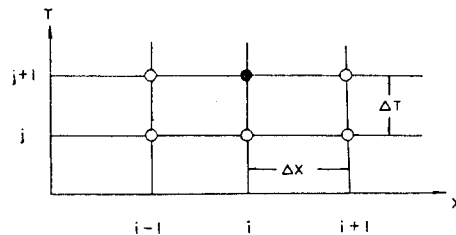


그림 3. 차분 격자

$$\text{초기 조건} \quad Y(x, 0) = Y_{ini}$$

$$\text{상류 경계조건} \quad U(0, t) = 0.0$$

$$\text{하류 경계조건} \quad Y(L, t) = Y_c$$

여기에서 Y_c 는 일정한 강우강도하에서 수로 끝에서 발생한 유출량에 대한 한계수심을 나타낸다,

3. 수치 실험

3.1 차분화 과정

본 연구에서는 음해법(implicit method)의 유한 차분기법(finite difference method)을 이용하였으며, 그림 3. 에서 보는 바와 같이 공간에 대해서는 중앙차분(central difference), 시간에 대해서는 전방차분(forward difference)을 이용하였다.

무차원 연속 방정식과 무차원 운동량 방정식에 대한 차분화 과정은 다음과 같다.

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{1}{\Delta T} (Y_i^{j+1} - Y_i^j)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{1}{\Delta T} (Q_i^{j+1} - Q_i^j)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta X} \left(\frac{1}{2} (Y_{i+1}^{j+1} + Y_{i+1}^j) - \frac{1}{2} (Y_{i-1}^{j+1} + Y_{i-1}^j) \right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta X} \left(\frac{1}{2} (Q_{i+1}^{j+1} + Q_{i+1}^j) - \frac{1}{2} (Q_{i-1}^{j+1} + Q_{i-1}^j) \right)$$

$$|Q| = Q_i^{j+1} |Q_i^j|$$

무차원 연속 방정식

$$\frac{D_1}{\Delta T} (Y_i^{j+1} - Y_i^j) + \frac{1}{2\Delta X} \left(\frac{1}{2} (Q_{i+1}^{j+1} + Q_{i+1}^j) - \frac{1}{2} (Q_{i-1}^{j+1} + Q_{i-1}^j) \right) = I_r \quad (8)$$

무차원 운동량 방정식

$$\begin{aligned} & \frac{Q_i^{j+1} - Q_i^j}{\Delta T} - D_2 \frac{Y_i^{j+1} - Y_i^j}{\Delta T} - D_3 \frac{\frac{1}{2} (Y_{i+1}^{j+1} + Y_{i+1}^j) - \frac{1}{2} (Y_{i-1}^{j+1} + Y_{i-1}^j)}{2\Delta X} \\ & = D_4 (1 - D_5 |Q_i^j| |Q_i^{j+1}|) - D_6 \end{aligned} \quad (9)$$

여기에서 $D_1 \sim D_6$ 은 다음과 같다.

$$D_1 = B$$

$$D_2 = \frac{2QB}{A}$$

$$D_3 = \frac{Q^2}{A^2} B - \cos \theta \frac{A}{F_o^2}$$

$$D_4 = kA$$

$$D_5 = \frac{\cos \theta}{S_o} C_f \frac{1}{A^2 R_h^{4/3}}$$

$$D_6 = 3 \frac{I_r Q}{A}$$

3.2 수치계산 과정

식(8)과 (9)에서 계수 $D_1 \sim D_6$ 이 $T = (j+1)\Delta T$ 에서 계산되는 값이라면 전체 계수가 미지수가 되어 식(8)과 (9)는 비선형 연립 방정식이 된다. 그러나 $D_1 \sim D_6$ 를 $T = j\Delta T$ 에서 계산한다면 $D_1 \sim D_6$ 이 기지이므로 식(8)과 (9)에서 Y_i^{j+1} 와 Q_i^{j+1} 만이 미지수인 선형 연립 방정식이 된다.

$T = (j+1)\Delta T$ 의 계산과정에서 $D_1 \sim D_6$ 이 이용되고 선형 연립 방정식의 수치해는 반복법(iteration method)에 의하여 계산된다. 본 연구에서는 수심과 유량의 허용오차 범위를 각각 $5.0 * 10^{-4}$ 으로 취했으며, 수로 끝에서의 유출량이 강우로 인한 유입량의 97.5%에 이르게 되면 평형상태에 이른것으로 가정한다.

3.3 수치모형의 적용

본 연구에서는 수치모형을 그림 1.(나) 와 같은 형상의 수로에 적용시켰다. 수치실험은 일정한 강우강도하에서 마닝의 조도계수 n 값을 변화시키면서 이에 따른 수심 및 유량의 변화와 후르드 수, kinematic flow 수, 평형상태 도달시간등의 변수 상호간의 관계를 고찰하였다.

인공수로중 대형구조물의 지붕의 경우, 재료가 강철인 경우에 조도계수 n 값이 0.012이고, 재료가 콘크리트인 경우에는 0.013 - 0.017의 값을 갖는다. 본 연구에서는 $n=0.012$, $n=0.014$, $n=0.016$ 의 경우에 대하여 수치모형을 적용시키면서 각 n 값에 대한 수심의 변화와 kinematic flow 수의 변화, 평형상태 도달시간에 대하여 조사하였다.

4. 수치실험의 결과및 고찰

4.1 경사의 변화에 따른 수심의 분포

식(9)의 운동량 방정식에서 알 수 있듯이 조도계수 n 은 마찰 손실의 항에 영향을 주게 된다. 그림 4, 그림 5, 그림 6은 n 값이 각각 0.012, 0.014, 0.016의 경우에 있어서 수심의 분포를 각 경사에 따라 수로의 하류단에서의 유량에 대한 한계수심에 대하여 무차원화하여 도시한 것이다. 그림 4, 5, 6을 비교하여 볼 때, 일정한 경사에 대하여 n 값의 변화는 수심의 증가에 상당한 영향을 준다는 것을 알 수 있다.

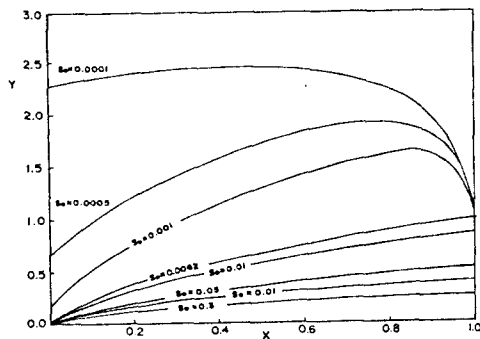


그림 4. 경사의 변화에 따른 수심분포 ($n=0.012$)

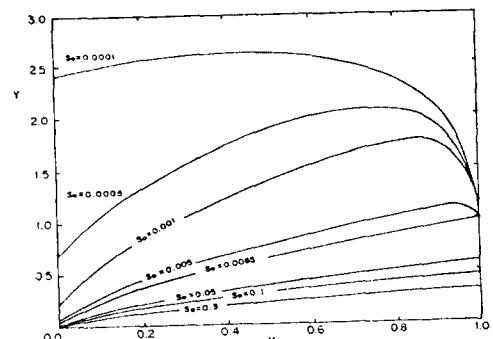


그림 5. 경사의 변화에 따른 수심분포 ($n=0.014$)

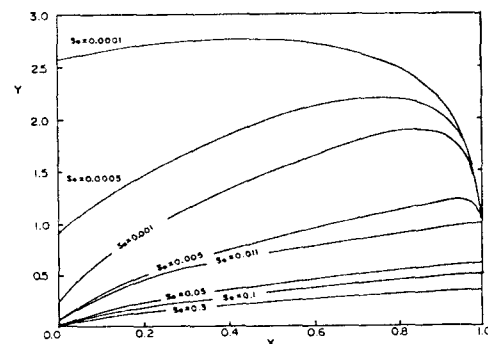


그림 6. 경사의 변화에 따른 수심분포 ($n=0.016$)

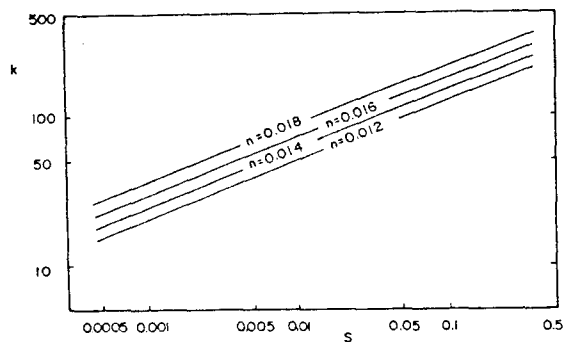


그림 7. n 에 따른 k 의 변화

4.2 n값과 kinematic flow수, 평형상태 도달시간과의 관계

그림 7.은 n에 따른 k의 관계를 나타낸 것으로서, k값은 경사와 조도계수 n값에 따라서 변화를 하는데, k와 n은 선형적인 관계를 보이고 있다. k와 n, 경사의 관계를 보면 다음과 같다.

$$k = C_1 n S^{0.388} \quad (10)$$

그림 8.는 k의 변화에 대한 평형상태 도달시간의 변화를 보인 것으로서 k값이 증가함에 따라서 평형상태 도달시간은 작아지고, k의 값이 일정한 경우에 있어서는 n값이 커짐에 따라서 평형상태 도달시간은 증가하게 되며 평형상태 도달시간과 조도계수 n과는 선형관계를 가짐을 알 수 있다.

$$t_e = (C_2 n + C_3) k^{-1.280} \quad (11)$$

4.3 수치해에 의한 최대수심과 마닝공식에 의한 최대수심의 비교

수치해에 의한 최대수심과 마닝공식에 의한 최대수심의 비교는 두 방법에 의하여 구한 최대수심을 이용하여 인공수로의 설계시 안전측의 최대수심을 구할 수 있다.

그림 9. 는 수치해에 의한 최대수심과 마닝공식에 의한 최대수심을 비교한 것으로서, 후르드수가 1.0보다 큰 사류의 경우에는 수치해에 의한 최대수심과 마닝공식에 의한 최대수심이 거의 일치함을 알 수 있으나, 후르드수가 1.0보다 작은 상류흐름에서는 수치해에 의한 최대수심이 작게 나타나고 있다. 즉, 인공수로 설계시의 최대수심은 마닝공식에 의한 최대수심을 이용하는 것이 보다 안전하게 된다.

본 연구에서 제시된 경사의 영향을 고려한 경우의 최대수심과 고려하지 않은 경우의 최대수심의 비교는 그림 10.에서와 같이 완경사의 경우에는 수심의 차이가 매우 작으나, 급경사일수록 수심의 차이가 커져서 경사가 0.5에 이르러서는 7% 정도의 수심차가 발생한다.

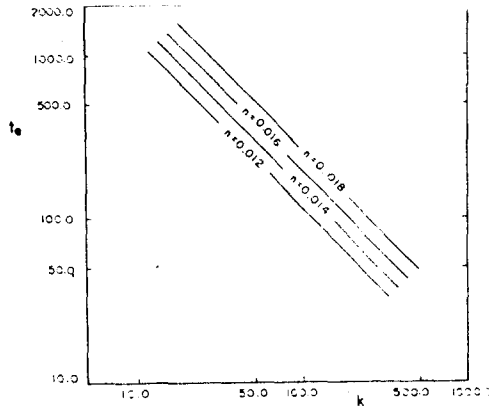


그림 8. n 에 따른 k 와 병형상태 도달시간과의 관계

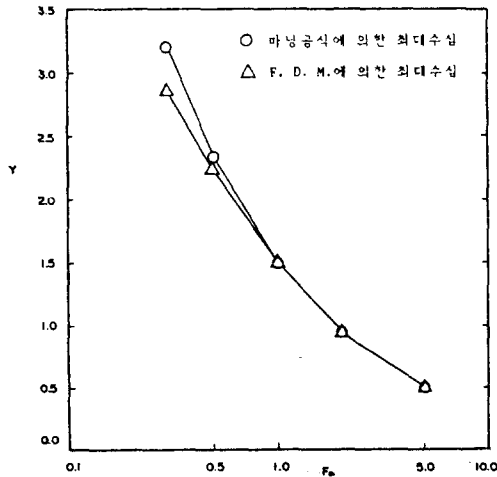


그림 9. 수치해에 의한 최대수심과 마닝공식에 의한 최대수심

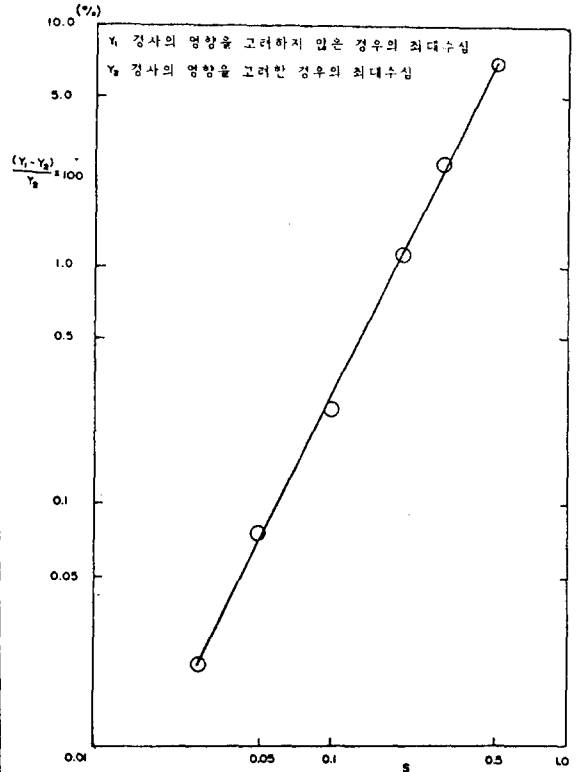


그림 10. 경사의 영향을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 수심비교

5. 결 론

일정한 강우강도로 인한 흐름을 해석한 결과, 마닝의 조도계수 n 은 수로 전 구간의 수심에 영향을 준다는 것을 알 수 있다. 이는 인공수로를 만드는데 있어서 재료에 따른 조도계수 n 의 선정이 중요함을 알 수 있다. 또한 경사면의 흐름에 대한 최대수심은 환경사인 경우, 마닝 공식에 의하여 구한 최대수심이 수치해에 의한 최대 수심보다 크므로서, 실제 구조물에 대한 적용에 있어서는 보다 안전측의 최대 수심값을 보이고 있으나, 급경사의 경우에 있어서는 수치해에 의한 최대수심을 실제 구조물에 적용할 수 있겠다. 그리고 경사면의 흐름해석에 있어서 경사가 급할수록 경사의 영향을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 수심차가 크게 나타남으로 정확성을 요하는 급경사면의 흐름해석은 경사의 영향을 고려하여야 한다.