Multiplicative ARIMA 모형에 의한 월유량의 추계학적 모의 예측
(Stochastic Forecasting of Monthly River Flows by Multiplicative ARIMA Model)

박 무 종** 윤 용 남*

1. 서 론

유출예측은 유출모형의 목적중 중요한 한부분으로 확정론적 모형이 시혹은 일유량과 같은 매우 짧은 시간의 유출을 예측하는데 주로 사용되지만 만약 물리적 변환을 위한 매개변수의 추정이 불가능하고 실제유역에서의 측정이 힘든 경우 확정론적 모형의 적용에는 한계가 있다. 이에 반해 추계학적 모형에 의한 유출예측은 긴시간 장경의 유출량을 과거자료의 통계학적 특성변수를 매개변수로 하여 예측하는 방법으로 모형의 적용에 필요한 매개변수의 수가 적어 그 적용이 간편한 장점이 있다. 본 연구에서는 Multiplicative ARIMA 모형을 적용하여 모형의 선정, 매개변수의 산정, 적합성 판정에 대해서 논하고 이 모형이 월유량의 예측에 적합한지를 검토하였다.

2. 이론적 배경

2.1 Simple ARIMA 모형

일반적인 단순 ARIMA(p,d,q) 모형(Autoregressive Intergrated Moving Average Model)은 다음과 같이 정의된다.

$$U_t = \sum_{j=1}^{p} \Phi_j U_{t-j} - \sum_{j=0}^{q} \theta_j e_{t-j}, \quad \theta_0 = -1 \qquad (1)$$

여기서 Ut 는 시계열 Xt 의 d 차 계차조작(differencing) 에 의한 값이다. 예를 들어 ARIMA(1,1,1) 형은

** 고려대학교 공과대학 토목공학과 석사과정
* 고려대학교 공과대학 토목공학과 교수

$$U_t = \Phi_1 U_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1} \qquad (2)$$

가 되며 여기서 Ut = Xt - Xt-1 이 된다.

2.2 Multiplicative ARIMA 모형

Multiplicative ARIMA 모형은 1 차, 2 차 혹은 일반적으로 d 차로 표현되는 단순 ARIMA (p,d,q) 모형(비계절성 ARIMA 모형) 과 주기가 w 인 계절성 차를 이용한 주기성 ARIMA (P,D,Q) 모형(계절성 ARIMA 모형) 의 결합으로 표현될수 있다.

즉, 주기가 w 인 D 차 differencing 이 고려된 ARMA(P,Q) 모형, 다시 말해서 ARIMA(P,D,Q) 모형은 다음과 같이된다.

$$(1 - \Phi_1 B^{w} - \Phi_2 B^{2w} - \cdots - \Phi_P B^{Pw})(1 - B^{w})^{D} X_t$$
$$= (1 - \Theta_1 B^{w} - \Theta_2 B^{2w} - \cdots - \Theta_P B^{Pw})\,\alpha_t \qquad (3)$$

그리고 잔차 에 적용되는 ARIMA(p,d,q) 모형 (즉 α 계열에 d 차 differencing 이 적용된 ARMA(p,q) 모형) 은 마찬가지로

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)(1 - B)^{d} X_t$$
$$= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)\, e_t \qquad (4)$$

여기서 e_t 는 독립변수이고 일반적인 다차항 ARIMA(p,d,q)x$(P,D,Q)_w$ 모형은 식(4) 의 α_t를 식 (3) 에 대입하여 얻을 수 있으며 일반식으로 도시하면 다음과 같다.

$$\Phi(B^{w})\,\phi(B)\,(1 - B^{w})^{D}(1 - B)^{d} X_t = \Theta(B^{w})\,\theta(B)\, e_t \qquad (5)$$

2.3 Multiplicative ARIMA 모형의 매개변수 산정

모형의 매개변수는 최우법(maximum likelihood method) 에 의해 구하는 것이 보통이다. 즉, 매개변수값을 적정범위내에서 가정한후 관측 자료를 사용하여 잔차의 자승치의 합 (sum of squares of residuals),

이 최소가 되는 매개변수의 값을 시산에 의해 구하게 되며, 이 값

을 초기치로 하여 비선형 추정법 (nonlinear estimation method) 에 의해 최종치를 구할수도 있다.

2.4 모형의 적합성 판정

Multiplicative ARIMA 모형의 잔차항 ε_t 는 정규분포를 가지며 서로 독립적인 무작위 계열 이어야 하므로 모형의 매개변수가 일단 산정되고 나면 관측자료 각각에 해당하는 잔차를 계산하고 이 잔차 시계열이 독립시계열인가를 검사함으로서 모형의 적합성을 판정하게 된다. 이는 잔차 시계열의 자기계열 상관도를 구하여 Anderson 의 Correlogram Test 와 같은 지속성 판정법을 사용하거나 혹은 Porte Manteau Test 등에 의한다. 후자의 경우 Test statistics 는

$$Q = N \sum_{k=1}^{L} r_k^2(\hat{\varepsilon}_t) \tag{6}$$

여기서 $r_k(\hat{\varepsilon}_t)$ 는 산정된 매개변수로 이용하여 계산한 잔차계열 ε_t 의 Lag k 계열상관계수이고 N 은 자료의 수, L 은 고려하는 Lag 의 수로써 통상 N 의 10 - 20 % 를 취한다. 식 (6) 으로 계산한 Q 값이 신뢰도 $(1-\alpha)$, 자유도 (L-p-q) 인 Chi-Square 매개변수값 $\chi^2_{1-\alpha,\,L-p-q}$ 보다 작으면 잔차계열은 독립 시계열로 볼수 있다.

2.5 예측 및 예측오차

예측(forecasting) 이란 과거 관측치의 거동을 조건으로하여 미래의 발생가능한 계열을 계산하는 것이다. Multiplicative ARIMA(p,d,q)x(P,D,Q) 모형에 의한 예측치를 정의하고 예시하기 위하여 월유량 계열의 예측에 흔히 사용되는 ARIMA(2,0,0)X(0,1,1)$_{12}$ 에 대해 생각해 보기로한다. 식(5) 에서 p=2, d=0, q=0, P=0, D=1, Q=1, ω =12 로 하여 Xt 에 관해 전개하면

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + X_{t-12} - \phi_1 X_{t-13} - \phi_2 X_{t-14} + \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-12} \tag{7}$$

시각 t 에서 Lead Time L 을 가지고 예측하면 $X_t(L)$ 은 X_{t+L} 의 조건부 기

대치이다. 즉

$$X_t(L) = [X_{t+L}] = \phi_1[X_{t+L-1}] + \phi_2[X_{t+L-2}] + [X_{t+L-12}] - \phi_1[X_{t+L-13}]$$
$$- \phi_2[X_{t+L-14}] + [\varepsilon_t] - \theta_1[\varepsilon_{t+L-12}] \qquad (8)$$

여기서 [ ]는 기대치(expectation)를 의미하며 현재 및 과거자료의 기대치는 자료값 그 자체이며 미래자료의 기대치는 예측치이다. 따라서

$$X_t(1) = \phi_1 X_t + \phi_2 X_{t-1} + X_{t-11} - \phi_1 X_{t-12} - \phi_2 X_{t-13} - \theta_1 \varepsilon_{t-11}$$
$$X_t(2) = \phi_1 X_t(1) + \phi_2 X_t + X_{t-10} - \phi_1 X_{t-11} - \phi_2 X_{t-12} - \theta_1 \varepsilon_{t-10}$$
$$\vdots$$
$$X_t(3) = \phi_1 X_t(12) + \phi_2 X_t(11) + X_t(1) - \phi_1 X_t - \phi_2 X_{t-1}$$
$$\vdots$$

한편, 시각 t+L 에서의 자료치는 시각 t 에서의 L 선행예측치 $X_t(L)$ 과 예측오차 $e_t(L)$의 합이라 할수 있으므로

$$X_{t+L} = X_t(L) + e_t(L) \qquad (9)$$

또한, 자료계열 Xt 는 독립시계열 ε_t 의 무한가중합 (infinite weighted sum of ε_t) 으로 생각할수 있으므로

$$X_{t+L} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+L-j} = \sum_{j=0}^{L-1} \psi_j \varepsilon_{t+L-j} + \sum_{j=L}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+L-j}$$
$$= e_t(L) + X_t(L) \qquad (10)$$

따라서 예측오차는

$$e_t(L) = \sum_{j=0}^{L-1} \psi_j \varepsilon_{t+L-j} \qquad (11)$$

식(11) 의 가중치 는 다음식으로부터 구할수 있음을 증명할수 있다.

$$\Phi(B^w)\,\phi(B)\,(1-B^w)^D(1-B)^d\,\psi(B) = \Theta(B^w)\,\theta(B) \qquad (12)$$

여기서

$$\psi(B) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots, \quad \psi_0 = 1 \qquad (13)$$

2.6 예측 수정 및 실시간 예측

시각 t 에서의 L 시간 구간 앞선 예측치는 식(11) 로 표시되는 예측오차를 가지므로 L =1 로 하여 단위시간 구간별로 예측해 나감으로서 실시간 예측치를 구할수 있다. 즉, 식(10) 으로부터

$$X_{t+1}(L) = \sum_{j=L}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+1+L-j} = \psi_L \varepsilon_{t+1} + \sum_{j=L+1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+1+L-j}$$
$$= \psi_L \varepsilon_{t+1} + X_t(L+1) \qquad (14)$$

한편 , 식(10) 에서 L=1, j=0 를 취하면

$$X_{t+1} = \psi_0 \varepsilon_{t+1} + X_t(1) = \varepsilon_{t+1} + X_t(1) \qquad (15)$$

식(15) 를 식(14) (L=1 로 취함) 에 대입하면 실시간 예측치를 구할수 있다.

$$X_{t+1}(L) = X_t(2) + \psi_1 [X_{t+1} - X_t(1)] \qquad (16)$$

3. 자 료

월유량의 예측을 위하여 선택된 표본자료는 낙동강 수계중 진동 수위관측교에서 관측된 월평균 수위자료로서 건설부에서 출간된 " 한국수문조사서, 수위편" 과 "한국 수문조사연보"에 수록되어 있으며 수위-유량 관계곡선(rating curve) 에 의하여 월유량으로 환산하였다. 표본자료로 선택된 월유량자료는 1964 년부터 1984 년까지의 21 년간의 자료이고 예측치는 1985 년에서 1986 년 까지의 2 년간의 자료와 비교하였다. 각 매개변수는 21 년간의 자료에서 구하였다. 이 기간중에 1970 년에 남강댐이, 1976 년에 안동댐이 준공되어 하천유량의 인위적인 변화를 예상할수 있으며 자연현상에 의하여 발생할수 있는 장기간에 걸친 경향도 있을것으로 생각한다.

4. 자료의 분석 및 결과토론

4.1 월유량 자료의 변환

진동지점의 월유량자료를 Multiplicative ARIMA 모형에 맞추어 해석하기위해서는 월유량 자료의 정규분포화가 필요하다. 따라서 유량의 적정분포형을 결정하기 위해 대수정규분포를 가정하여 Kolmogorov-Smirnov Test 에 의해 유의수준 5 %로 분포형 검정을 실시한 결과 대수정규분포의 적합성이 인정되었으며 월유량자료 계열은 대수치로 변환하여 추후의 분석에 사용하였다.

4.2 모형의 차수선정

진동지점에서의 월유량자료의 대수를 취한 자료값을 비계절성 계차(d=0,1,2) 와 계절성 (D=0,1,2) 의 가능한 계차수를 고려하여, 자기상관도를 그림(4.1) 에서와 같이 구하였다. 1 차 계절성 계차는 자기상관함수에 있어 주기성을 크게 배제시키며, 동시에 1 차 비계절성 계차(D=1, d=1) 도 경향을 줄여줌을 알수 있다. 이러한 거동은 계절성, 비계절성 Moving Average 항을 포함하려는 경향이 있다. 따라서 ARIMA(2,0,0)x(0,1,1)$_{12}$모형을 선정하기로 하였다. 이는 BOX 와 JENKINS 가 국제공항을 이용하는 월 승객수의 대수치를 자료로 나타낸것과 동일하다. 그러나, 일반적인 수문자료에서는 장기성향을 보이지 않기때문에 비계절성 계차는 불필요하고 계열이 AR(1), 혹은 AR(2) 항을 필요로 하므로 ARIMA(2,0,0)x(0,1,1)$_{12}$모형을 역시 고려하였다.

4.3 매개변수의 산정

4.3.1 최우법

ARIMA(0,1,1)x(0,1,1)$_{12}$ 모형(I) 을 식(5) 로 표현하면

$$(1-B)(1-B^{12})\,y_t = (1-\theta_1 B)(1-\Theta_1 B^{12})\,e_t \qquad (17)$$

식(17) 을 전개하면

$$y_t = y_{t-1} + y_{t-12} - y_{t-13} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \Theta_1 e_{t-12} + \theta_1\Theta_1 e_{t-13} \qquad (18)$$

ARIMA(2,0,0)x(0,1,1)$_{12}$ 모형(I) 을 식(5) 로 표현하면

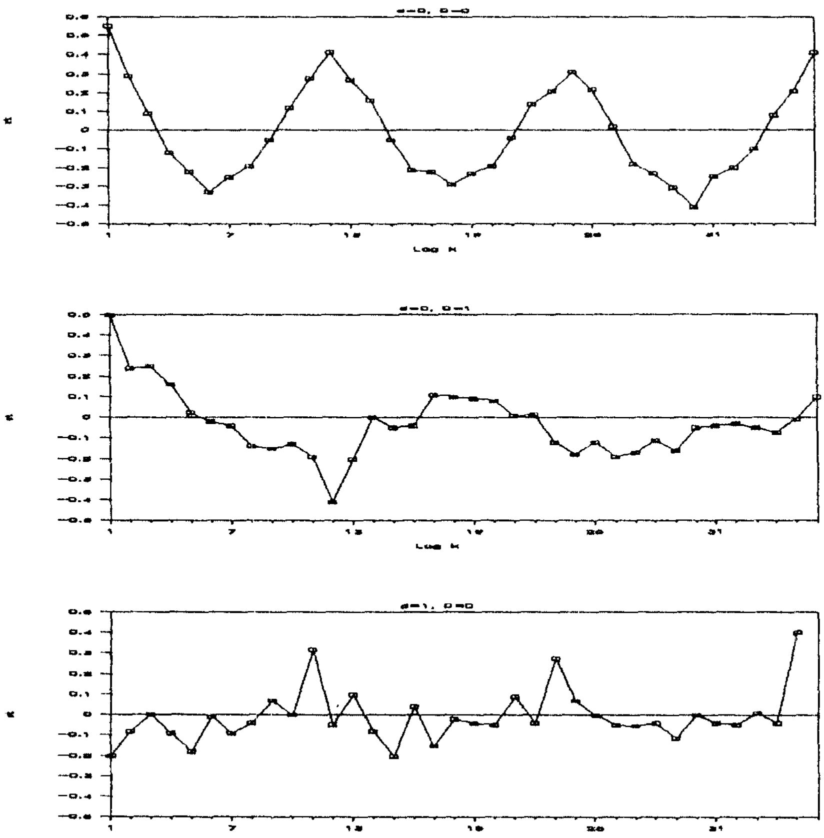
$$(1-\Phi_1 B - \Phi_2 B)(1-B^{12})\,y_t = (1-\Theta_1 B^{12})\,e_t \qquad (19)$$

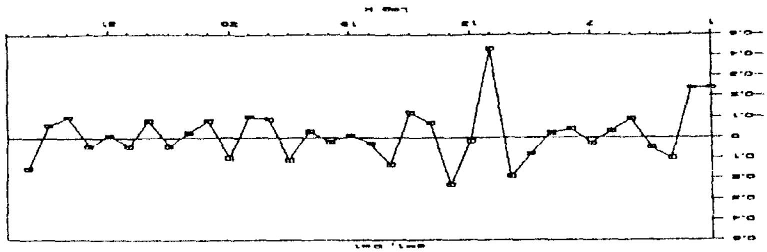
식(19) 을 전개하면

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-12} + y_{t-12} - \Phi_1 y_{t-13} - \Phi_2 y_{t-14} + e_t - \Theta_1 e_{t-12} \qquad (20)$$

이를 최우법을 적용하여 모형(I), (II) 의 매개변수를 각각 구하면 모형 (I) 의 경우에는 $\sum e_t^2(\theta_1,\Theta_1)$ 면을 $0.4<\theta_1<0.6$ 이고 $\Theta_1=0.1$ 인 경우에 최소면을 이루게되고 비선형추적법에 의해 최종치를 구하면 $\theta_1 = 0.54924$ 이고 $\Theta_1 = 0.79380$ 이 된다.

또한 모형 (II) 의 경우에는 $\sum e_t^2(\phi_1,\phi_2,\Theta_1)$ 면을 $0.4<\phi_1<0.7$ 이고 $\phi_2=0$ 그리고 $0.7<\Theta_1<1$ 인 경우에 잔차의 제곱의 합이 최소를 이루게되며 비선형추적법에 의해 최종치를 구하면 $\Phi_1 = 0.45849$, $\phi_2 = 0.05349$,





그림(4.1) 진동의 자기상관계수 여기서 $W_t = \nabla^d \nabla^D y_t$
, $y_t = \ln Q_t$

Θ_1 = 0.78817 이 된다.

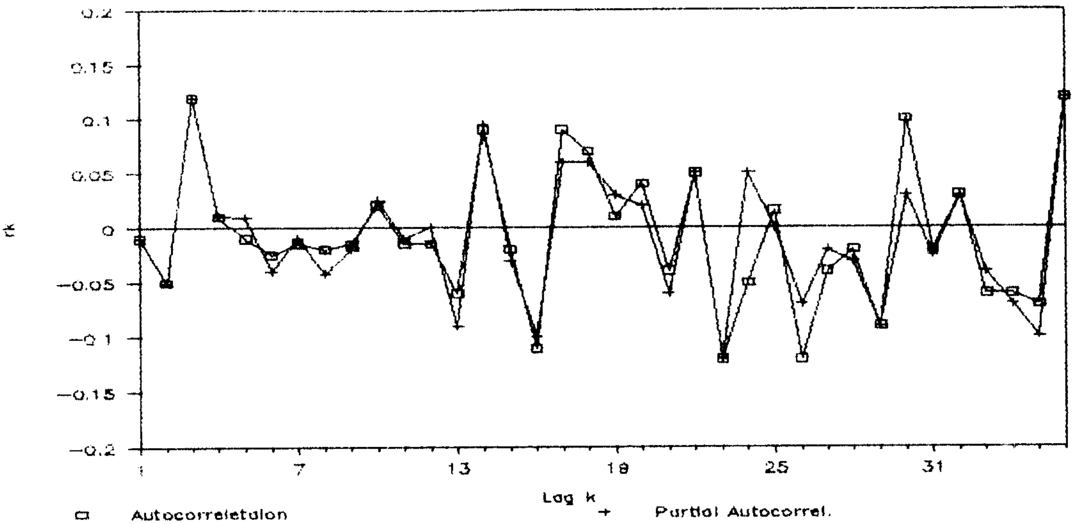
4.3.3 매개변수의 확인검산

모형 (I) 의 잔차 e_t 를 구하여 처음 20 개의 값을 Porte Manteau Test 을 시행하면 Q= 25.2653 이고 10% 유의수준에서 $\chi^2_{0.9,18}$ = 26.0 이므로 잔차의 값은 서로 독립적이라고 할수 있고 잔차의 자기상관도도 난수계열임을 입증하였다. 마찬가지로 모형(II) 의 잔차를 구하여 Porte Manteau Test 를 실시하면 Q= 13.8368 이고 10 % 유의수준에서 $\chi^2_{0.9,17}$ = 24.8 이므로 잔차의 값은 서로 독립적이라고 할수있고 잔차의 자기상관도도 역시 난수계열임을 나타내었다. 따라서 본 진동지점에 대해서는 모형(I) 과 모형(II) 어느것이나 유출예측에 사용될 수 있을것으로 보이며 본 연구에서는 모형 (II) 을 선택하였다.

모형(II) 의 잔차는

$$e_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} + \Theta_1 y_{t-13} + \phi_2 y_{t-14} + \Theta_1 e_{t-12} \quad (21)$$

그리고 잔차의 자기상관도와 부분자기 상관도를 그림(4.2) 에 나타내었는데 이는 잔차가 서로 독립적임을 보여준다. 따라서 ARIMA(2,0,0)x(0,1,1)$_{12}$ 모형이 진동의 대수자료치의 적용에 적당함을 알수있다.



그림(4.2) 진동에 적용된 잔차의 자기상관도와 부분자기상관도

4.4 예측및 예측오차

진동지점의 월유량자료 계열 X_t 의 대수치계열 $y_t = \ln X_t$ 를 ARIMA $(2,0,0)x(0,1,1)_{12}$ 모형으로 표시하면 식(7) 로부터

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + y_{t-12} - \phi_1 y_{t-13} - \phi_2 y_{t-14} + e_t - \theta_1 e_{t-12} \qquad (22)$$

따라서, 시간 t 에서 L 시간 앞선 예측치를 구하기위한 예측함수(fore-cast function)는1 식(8) 의 형태로 표시될수 있고 L 값에 따라 예측치를 차례로 구할수 있다. 예를 들어 t=252 번째 달(21 년의 마지막 달)을 기준으로 하여 예측치를 구하면

$$\begin{aligned} y_{252}(1) &= \phi_1 y_{252} + \phi_2 y_{251} + y_{241} - \phi_1 y_{240} - \phi_2 y_{239} - \theta_1 e_{241} \\ &= 4.654 \end{aligned}$$

마찬가지로 14 번째 달을 예측하면

$$\begin{aligned} y_{252}(14) &= \phi_1 y_{252}(13) + \phi_2 y_{252}(12) + y_{252}(2) - \phi_1 y_{252}(1) - \phi_2 y_{252} \\ &= 4.568 \end{aligned}$$

한편, 예측오차의 계산을 위해 필요한 가중치 ψ_j 는 식(12) 의 관계

로 부터 구할수 있으며 ARIMA $(2,0,0)x(0,1,1)_{12}$ 의 경우에 진동지점의 월유량자료로부터 구한 값은 표 (4.1) 과 같다.

표(4.1) 진동의 대수치에 적용된 ARIMA$(2,0,0)x(0,1,1)_{12}$

모형의 예측오차의 ψ 값

WEIGHTS USED IN CALCULATING CONFIDENCE LIMITS
AND UPDATING FORCASTS AFTER NEW OBSERVATION

J	PS(J)	J	PS(J)
0	1.000000	13	0.097525
1	0.458490	14	0.056084
2	0.263703	15	0.030930
3	0.145430	16	0.017181
4	0.080784	17	0.009532
5	0.044818	18	0.005289
6	0.024870	19	0.002935
7	0.013800	20	0.001629
8	0.007657	21	0.000904
9	0.004249	22	0.000501
10	0.002358	23	0.000278
11	0.001308	24	0.211984
12	0.212556		

4.5 역변환

4.4 절에서 구한 진동지점의 L 개월 앞선 시점에서의 예측치를 모멘트법(method of moment) 에 의하여 역변환시켰으며 이를 지수법 (method of exponation) 으로 변환시킨 결과와 비교하였다.

$$q_t(L) = \exp[\, y_t(L) + \frac{1}{2} S_y^2(L) \,]$$

이고

$$S_t(L) = q_t(L) \{ \exp[\, S_y^2(L) \,] - 1 \}^{1/2}$$

또한 예측치는 1984 년 12 월 자료를 기준으로 하였으며 이를 실제 관측치 (1985 년 - 1986 년) 의 대수치와 함께 그림 (4.3) 에 도시하였으며, 그림(4.4)에는 대수치를 모멘트법 으로 변환시킨 월유량을 그림(4.5)에는 지수법으로 역변환시킨 월유량자료를 관측치와 비교하였다. 또한,

2 년간의 관측치 및 예측치의 통계적인 특성은 표(4.2) 에 비교하였다.

표(4.2) 자료의 기본적인 통계특성

	예측치	관측치
자료의 수	24	24
평 균	413.245	385.95
분 산	113669	99533.6
표준 편차	337.149	315.49
중간값	300.53	252.225

4.6 예측수정과 실시간예측

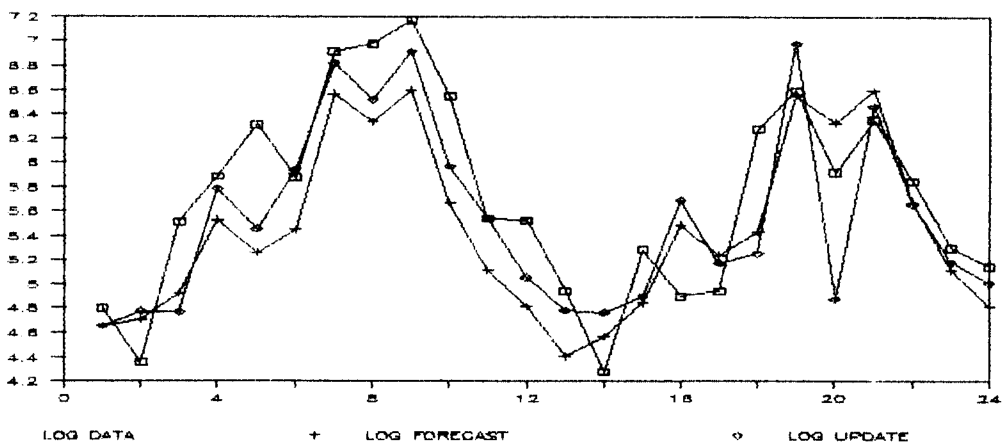
예측수정에 의한 실시간 예측은 식(16) 에 의해 가능하며, 관측자료 계열의 마지막 시간 (252 번째 달) 에서의 1 개월 앞선 유량 $y_{252}(1)$ 와 2 개월 앞선 유량 $y_{252}(2)$ 를 식(8) 로 계산하고나면 다음달 (253번째 달) 에서의 예측수정에 의한 실시간 예측치는 다음과 같이 구한다.

$$y_{253}(1) = y_{252}(2) + \psi_1 (y_{253} - y_{252}(1))$$

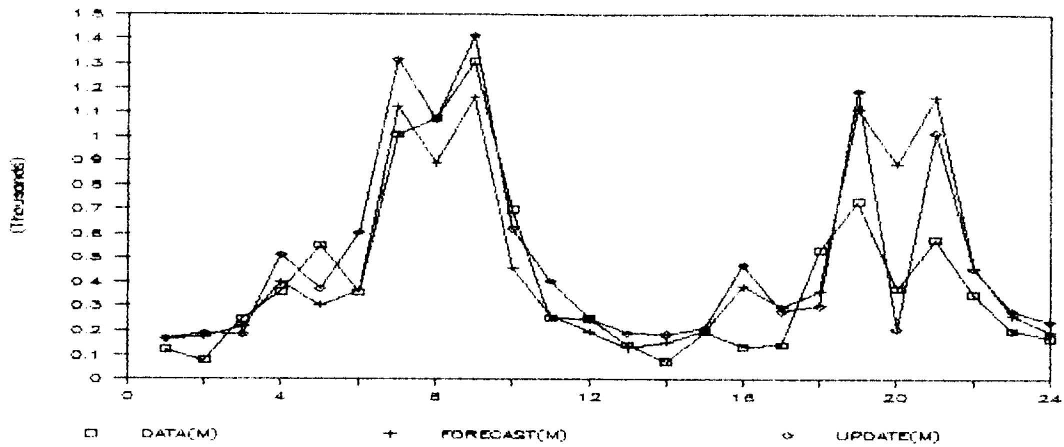
$$y_{253}(2) = y_{252}(3) + \psi_2 (y_{253} - y_{252}(1))$$

$$\vdots$$

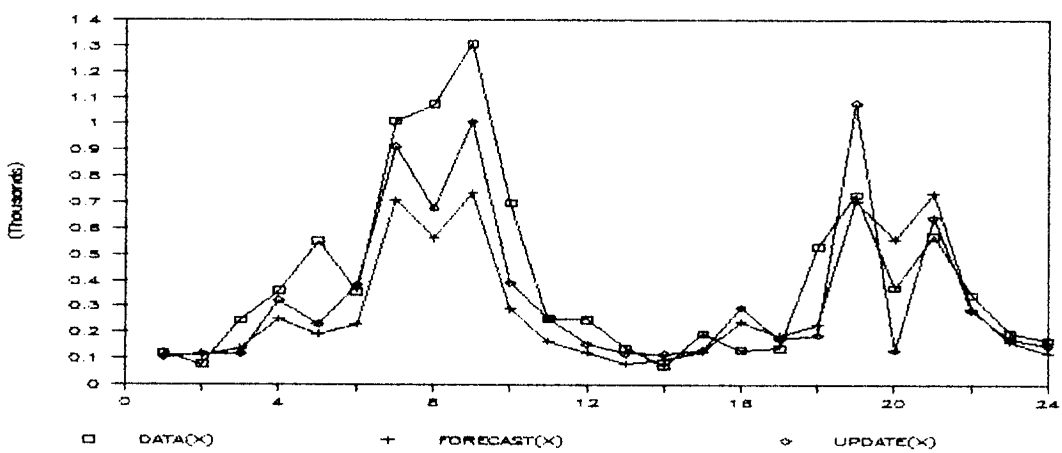
$$y_{254}(1) = y_{253}(2) + \psi_1 (y_{254} - y_{252}(1))$$



그림(4.3) 진동의 월유량에 적용된 ARIMA(2,0,0)x(0,1,1)$_{12}$ 모형의 대수 예측치



그림(4.4)　진동의 월유량에 적용된 ARIMA(2,0,0)x(0,1,1)$_{12}$
모형의 예측치(모멘트법에 의한 변환)



그림(4.5)　진동의 월유량에 적용된 ARIMA(2,0,0)x(0,1,1)$_{12}$
모형의 예측치(지수법에 의한 변환)

이상의 방법으로 예측수정값을 계산하여 얻은 유량대수치의 실시간 예측치는 그림(4.4)에서 관측치 및 예측치와 비교되어있다. 그림에서 볼수있는 바와 같이 예측수정에 의한 실시간예측치는 수정하지 않은 예측치보다 관측치에 더 잘 맞음을 알수있다.

5. 결론

본 연구에서는 진동지점의 21 년간의 월유량자료를 Multiplicative ARIMA 모형에 적용하기 위한 매개변수 산정과 월유량을 모의예측하여 실측자료와 비교하였으며, 결과를 분석한 결론은 다음과 같다.

1) ARIMA 모형의 매개변수 및 차수결정에 있어서 계열 자기상관도와 부분 계열 자기상관도를 가지고 판단하였으며, 확인을 위해서 잔차의 계열 자기상관도를 이용하였다. 또 Porte Manteau Test 를 잔차의 값에 적용하였으며 이 방법에 의해 모형의 차수결정을 올바르게 할 수 있는 것으로 나타났다.

2) ARIMA 모형의 매개변수 산정을 잔차에 최우법(maximum likekihood method) 을 적용하여 매개변수들의 범위를 계산하여 비선형 반복계산(nonlinear iterative estimation) 을 실시하여 매개변수의 값을 정확하게 구할수 있다.

3) ARIMA$(2,0,0)\mathrm{x}(0,1,1)_{12}$ 모형은 오직 4 개의 매개변수만이 필요하고 월평균의 계절적 변화를 설명할수 있으나 각 달의 표준편차의 계절적 변화를 표시하지 못하므로 예측치의 오차는 물리적으로 정확하지 못하고 실제유량으로도 정확하게 변환되지 못하게되므로 지수법(method of moment) 을 사용하여 각 달의 표준편차를 고려하여 역변환함으로서 실측치에 가까운 값을 얻을 수 있다.

4) ARIMA$(2,0,0)\mathrm{x}(0,1,1)_{12}$ 모형이 실제 진동 지점의 월유량의 모의 예측에 적합한지를 판단하기 위해서 실측치와 예측치의 두 집단의 표준편차와 평균의 일치도를 판정한 결과 실제유량의 모의예측에 유용한것으로 판단되었다.

참 고 문 헌

1. 윤 용 남, "공업 수문학", 청문각 1986
2. 윤 용 남, "수리학", 청문각 1986
3. 최 영 박, "수문학", 보성출판사 1981
4. 최 영 박, 윤 용 남, " 확률의 기초 개념", 형설출판사 1982
5. Chareles T. Han, "Statistical Method in Hydrology", Iowa State University Press 1977
6. J.D.Salas, J.W.Dellelur, V.Yevjevich and W.L.Lane, " Applied Modeling of Hydrologic Time Series", WRP 1980
7. Rafael L.Bras and Ignacio Rodriguez - Iturbe, "Random Functions and Hydrology", Addison-Wesley 1985
8. V. Yevjuvich, "Stochastic Process in Hydrology", WRP 1972
9. Enders A. Robinson, " Time Series Analysis and Applications" ,Goose Pond Press 1981
10. M.A.H. Dempster, "Stochastic Programming", Academic Press 1974
11. A. H. El - Shaarawi and S .R .Esterby, "Time Series Methods in Hydrosciences", McGraw-Hill 1982
12. Box and Jenkins, "Time Series Analysis forcasting and control" , Holden Day 1970