

광학계 평가 계산과 Apodisation 에 대하여

Computation of optical image assessment and apodisation

정 창 섭* · 심 상 현
전남대학교 자연대학 물리학과

1. 서 론

최근에 불균일한 진폭의 빛을 투과시키는 광학계에 의한 간섭성 또 비 간섭성 물체의 회절상에 대하여 많은 연구가 이루어지고 있다. 비 간섭성 물체에 대해서는 일찌기 Hopkins¹⁾ 와 Toraldo de Francia²⁾ 에 의하여 불균일한 진폭의 빛에 대한 회절강도 분포에 대하여 연구가 시작되었고 Jacquinot 와 Roizen-Doissier³⁾ 에 의하여 동공에서의 실수 진폭의 변화를 apodisation이라 불리워지기 시작하였다. Yzuel⁴⁾ 등은 몇가지 amplitude filter 와 위상 filter 를 가정하여 PSE와 MTF를 비교 연구하였으며 Boivin⁵⁾ 등은 무수차 광학계에 대한 encircled energy 등에 대하여 연구 보고하였다. 또한 최근에 Gaussian beam에 대한 관심이 고조되어 많은 연구가 발표되었는데 Herman⁶⁾ 등과 Mahajan⁷⁾ 는 Gaussian beam을 이용하여 몇가지 간단한 광학계의 초평면 이동과 encircled energy 등에 대하여 연구 보고한바 있다.

본 논문에서는 apodisation과 광학계 평가 방법에 대하여 각각 알아보고 몇가지 불균일한 진폭에 대한 PSF와 OTF의 변화에 대하여 조사 검토한다.

2. Apodisation

Apodisation이란 출사동(exit pupil)상의 진폭을 변조시켜 광학계의 분해능이나 초점심도등을 변화시키는 방법을 말하는데 이는 “발을 제거(無足化)”한다는 뜻으로 일찌기 Jacquinot 등에 의하여 불리워지기 시작하였는데 여기서 발이란것은 회절상에서 주 극대를 제외한 극대들을 말하는데 주 극대를 제외한 극대들을 감소시키므로 인하여 광학계의 결상 능력에 변화를 가져오게 한다. Apodisation은 불균일한 진폭의 변화를 가지고 주로 이론적으로 연구되어 왔으나 최근에는 레이저와 카타디움트릭 광학계에 많은 관심을 갖게되어 실제의 광학계를 중심으로 많은 연구 결과가 발표되고 있는 실정이다.

Ojeda-Castaneda⁸⁾들은 Bessel annular apodiser에 의한 PSF와 OTF 그리고 Strehl ratio 등 결상특성등에 대하여,

Hazra⁹⁾ 등은 radial walsh filter를 사용하여 회절 특성과 OTF에 대하여, Tanaka¹⁰⁾ 등은 Gaussian 빔에 대한 회절 특성등에 대하여, Kuttner¹¹⁾ 는 단락된 Gaussian 레이저 빔의 encircled energy와 MTF 등에 대하여 그리고 Barakat¹²⁾ 는 central obstruction이 있는 광학계의 회절에 대하여 연구 발표하였다. 이 밖에 수많은 연구 발표가 있으나 이러한 불균일한 진폭의 변화는 크게 두가지로 대별 할 수 있는데 그것은 동의 중앙으로 부터 가장자리로 감에 따라 진폭이 감소하는 경우와 반대로 증가하는 경우이다. 본 논문에서는 이 두가지 진폭의 변화가 PSF와 OTF에 미치는 영향을 알아보고 균일한 진폭의 경우와 각각 비교 검토한다.

3. 광학계 평가 계산 방법

광학계의 평가 방법은 여러가지가 있으나 수차에 의해서 광학계에 미치는 정확한 영향은 회절 현상을 보통 이용하므로 본 논문에서는 scalar 회절이론을 이용한 방법으로 주로 point spread function(PSF)과 optical transfer function(OTF)에 대하여 알아본다.

광학계에 의한 상의 평가에 대한 계산은 동(pupil)의 면적 적분으로 주어지므로 동의 형태와 위치가 먼저 계산되어져야 되며 수차 등이 다음에 계산되어진다. 동의 형태와 위치는 동 탐사(pupil exploration)에 의하여 이루어지며 이는 간단한 logic¹³⁾과 광선추적에 의하여 이루어질 수 있다. King¹⁴⁾은 비축상 물체에 대한 동이타원의 형태로 주어짐을 밝혔는데 본 논문에서 사용될 Hopkins의 좌표계¹⁵⁾를 사용하면 이 타원 형태의 동이 반경인 1인 원으로 바뀌게 됨으로 상 평가 계산을 쉽게 만든다.

3-1 PSF

그림(1)에서 비축상 물점 \bar{Q} 로 부터 발산하는 광속은 pupil sphere의 각 점에서 complex amplitude는 모두 같은 값을 갖는데 이것은 \bar{Q} 로 부터 발산하는 구면파가 바로 pupil sphere와 일치하기 때문이다. 수차가 없는 광학계를 통과한 파면은 reference sphere $\bar{E}'B'$ 와 일치하게 되며 이 $\bar{E}'B'$ 는 exit pupil sphere와 일치한다. 또한 주광선 $\bar{E}'\bar{Q}$ 는

비축상 불점 \bar{Q} 와 상점 \bar{Q}' 의 위치를 상면 $Q'\bar{Q}'$ 내에 결정케 한다.

상면의 임의의 점 ψ' 에서 Complex amplitude는

$$u_{\psi'} = \frac{i}{\lambda} \iint f(X', Y') \frac{\exp(-ikR')}{R'} dA' \dots (1)$$

로 주어지며 여기서 $f(X', Y')$ 는 동 함수로써 동 안에서

$$f(X', Y') = \tau(X', Y') \exp[ikw(X', Y')]$$

로 정의된다. 여기서 $\tau(X', Y')$ 와 $w(X', Y')$ 는 각각 실수진 폭변화와 파면수차를 나타낸다. 그림(1)에서 $R' = (B'Q')$ 고 $\bar{R}' = (\bar{E}'Q')$ 며, 실제의 경우 $\bar{R}' - R' \ll \bar{R}'$ 이다.

R' 의 변화가 적다고 가정하여 $\frac{1}{R'} = \frac{1}{\bar{R}'}$ 와 $N = \bar{N}'$ 의 근사식을 사용하면 식(1)은

$$u_{\psi'} = \frac{i \exp(-ik\bar{R}')}{\lambda \bar{R}'} \cdot \exp[-i\epsilon(\xi', \eta')] \cdot \iint f(X', Y') \cdot \exp[i2\pi \frac{(X'\xi' + Y'\eta')}{\lambda \bar{R}'}] \frac{dX' dY'}{\bar{N}'} \dots (2)$$

로 주어지게 된다. 여기서 N' 와 \bar{N}' 는 각각 $B'Q'$ 와 $\bar{E}'Q'$ 의 방향여현이며 $\epsilon(\xi', \eta')$ 는 본 논문에서 취급되는 비간섭성 물체에 대해서는 무시될 수 있는 양이다.

따라서 Q' 점에서 상수항을 무시한 강도에 관한 식은

$$G(\xi', \eta') = |F(\xi', \eta')|^2 \dots (3)$$

로 주어지며 $F(\xi', \eta')$ 는 동 함수 $f(X', Y')$ 의 Fourier 변환으로써

$$F(\xi', \eta') = \iint f(X', Y') \exp[i2\pi \frac{(X'\xi' + Y'\eta')}{\lambda \bar{R}'}] dX' dY' \dots (4)$$

이 된다. 식(4)에 포함된 변수들은 Hopkins 좌표계를 사용하면 좀 더 간단한 형태로 주어지게 되는데

$$2\pi \frac{(X'\xi' + Y'\eta')}{\lambda \bar{R}'} = 2\pi(u'_s x'_s + v'_r y'_r) \dots (5)$$

와

$$dX' dY' = \bar{N}' h'_r h'_s dx'_s dy'_r$$

의 관계가 있으므로 식(5)은 상수항을 제거하고 첨자를 무시하면

$$F(u', v') = \frac{1}{A} \iint f(x', y') \exp[i2\pi(u'x' + v'y')] dx' dy' \dots (6)$$

이 된다. 여기서 A 는 규격화를 위한 것으로써

$$A = \iint \tau(x', y') dx' dy'$$

로 표현되며 이는 $u' = v' = 0$ 인 점에서 수차를 무시할때 진폭에 해당된다. 계산을 쉽게 하기 위하여 극좌표를 사용하면 식(6)은

$$F(\rho', \psi') = \left(\frac{1}{A}\right) \int_{r=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} f(r, \phi) \exp[i2\pi \rho' r \cos(\phi - \psi')] r dr d\phi \dots (7)$$

로 주어지게 되며 여기서 (r, ϕ) 와 (ρ', ψ') 는 각각 동과 상면의 좌표들으로써

$$\begin{aligned} x' &= r \sin \phi, & y' &= r \cos \phi \\ u' &= \rho' \sin \psi', & v' &= \rho' \cos \psi' \end{aligned} \dots (8)$$

의 관계에 있다. 그리고 동 함수 $f(r, \phi)$ 도

$$f(r, \phi) = \tau(r, \phi) \exp[i2\pi w(r, \phi)] \dots (9)$$

로 표현된다.

동 함수 $f(r, \phi)$ 를 실수진폭과 파면수차로 표현하고 $t = r^2$ 라 놓으면 식(7)은

$$f(\rho', \psi') = \left(\frac{1}{2A}\right) \int_{t=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} \tilde{\tau}(t, \phi) \exp[i2\pi \tilde{w}(t, \phi)] dt d\phi \dots (10)$$

가 되며 여기서 $\tilde{\tau}(t, \phi)$ 와 $\tilde{w}(t, \phi)$ 는 각각

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(t, \phi) &= \tau(r, \phi) \\ \tilde{w}(t, \phi) &= w(r, \phi) + \rho' \phi \cos(\phi - \psi') \dots (11) \end{aligned}$$

주워 지는데 Hopkins 방법을 사용하면 $F(\rho', \psi')$ 는 ^{16,17}

$$\begin{aligned} F(\rho', \psi') &= \frac{\pi}{NA} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \tilde{\tau}(t_j, \phi_k) \\ &\cdot \exp[i2\pi \tilde{w}(t_j, \phi_k)] \\ &\cdot \frac{\sin \tilde{w}_i(t_j, \phi_k)}{\tilde{w}_i(t_j, \phi_k)} \cdot \frac{\sin \tilde{w}(t_j, \phi_k)}{\tilde{w}(t_j, \phi_k)} \dots (12) \end{aligned}$$

이 된다. 여기서 $N = J \times K$ 로써 전체 area element의 개수가 되며 $\tilde{w}_i(t_j, \phi_k)$ 와 $\tilde{w}(t_j, \phi_k)$ 는 각각 $\tilde{w}(t_j, \phi_k)$ 의 t 와 ϕ 에 대한 1차 미분을 말한다.

3-2 OTF

2차원 물체의 공간주파수 (s, t) 에 대한 OTF는

$$D(s, t) = \frac{1}{A} \iint f(x' + \frac{1}{2}s, y' + \frac{1}{2}t) f^*(x' - \frac{1}{2}s, y' - \frac{1}{2}t) dx' dy' \quad \dots\dots\dots (13)$$

로 주워지고 여기서 $f(x', y')$ 는 PSF에서와 같이 동 함수이며 S 는 중심이 $(x' \pm \frac{1}{2}s, y' \pm \frac{1}{2}t)$ 인 두 등의 중첩 부분을 나타낸다(그림 2 참조). 그리고 A 는

$$A = \iint |f(x', y')|^2 dx' dy'$$

로써 규격화를 위한 것이며 $D(0, 0) = 1$ 로 계산되게 한다. Sagittal case와 tangential case의 OTF는 각각

$$D(s) = \frac{1}{A} \iint f(x' + \frac{1}{2}s, y') f^*(x' - \frac{1}{2}s, y') dx' dy' \quad \dots\dots\dots (14)$$

와

$$D(t) = \frac{1}{A} \iint f(x', y' + \frac{1}{2}t) f^*(x', y' - \frac{1}{2}t) dx' dy' \quad \dots\dots\dots (15)$$

로 표현 될수 있으며 y' 축의 경사각을 ψ' 라 하면 $D(s, t)$ 는 $D(s, \psi')$ 의 형태로도 표현 될수 있는데 이는

$$D(s, \psi') = \frac{1}{A} \iint f(x + \frac{1}{2}s, y) f^*(x - \frac{1}{2}s, y) dx dy \quad \dots\dots\dots (16)$$

가 되고 $f(x, y)$ 는 $f(x', y')$ 로 부터

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \psi' - y \sin \psi' \\ y' &= y \cos \psi' + x \sin \psi' \end{aligned}$$

의 관계를 이용하여 구할수 있다. 수차 함수 $w(x, y)$ 도 마찬가지로 위의 관계식을 이용하여 $w(x', y')$ 로 부터 계산되어 진다(16)식의 계산 방법은 참고문헌(18)에 자세히 기술되어 있으며 여기서는 마지막 부분만 소개한다. (16)식에 포함된 내적분과 외적분은 Hopkins 방법과 Gauss 방법을 사용하여 적분하면

$$\begin{aligned} D(s, \psi) &= (1/A) \sqrt{1 - (\frac{1}{2}s)^2} \sum_{k=1}^n \omega_k \epsilon_k \\ &\sum_{\substack{j=-jk \\ (j=0)}}^{jk} \tau(x_j + \frac{1}{2}sy_k) \times \tau(x_j - \frac{1}{2}sy_k) \\ &\exp\{i2\pi \tilde{W}_{jk}\} \text{sinc}\{\frac{1}{2}(\tilde{W}_{j+1,k} - \tilde{W}_{j-1,k})\}, \dots (17) \end{aligned}$$

가 된다. 여기서 동함수는 실수진폭 함수 $\tau(x, y)$ 와 파면수차 함수 $\tilde{W}(x, y)$ 로 표현되었으며 y_k 와 w_k 는 각각 k 번째 Gauss 점과 그점의 가중치이다. 그리고 ϵ_k 는 내적분서 k 번째 Gauss 점에서 하나의 적분구간을 나타내며 (17)식은 마지막으로

$$D(s, \psi) = T(s, \psi) \exp\{i\theta(s, \psi)\}, \quad \dots\dots (18)$$

로 표현되며 여기서 $T(s, \psi)$ 와 $\theta(s, \psi)$ 는

$$\begin{aligned} T(s, \psi) &= \sqrt{[R(s, \psi)]^2 + [I(s, \psi)]^2}, \\ \theta(s, \psi) &= \arg\{R(s, \psi) + iI(s, \psi)\} \quad \dots\dots (19) \end{aligned}$$

이며 $R(s, \psi)$ 와 $I(s, \psi)$ 는 각각 $D(s, \psi)$ 의 실수부와 허수부를 나타낸다.

3-3 파면수차

PSF와 OTF에 관련된 식에 포함된 파면수차 함수 $w(x, y)$ 는

$$W(x, y) = \sum_m \sum_p W_{mp} (x^2 + y^2)^{\frac{m-p}{2}} y^p \dots (20)$$

로 주워지고 극좌표를 사용하면 위식은 $W_{mp} r^m \cos \phi$ 로 표현되며 W_{mp} 는 광선추적에 의해서 결정되는 계수들이다.

4. Apodisation이 광학계의 결상력에 미치는 영향

4-1 불균일한 진폭

본 논문에서 다루게될 불균일한 진폭은 2절에서 언급된 바와 같이 세가지로써 첫째는 등의 중앙으로 부터 가장자리로 감에 따라 증가 하는 경우(진폭변화 τ_B)와 둘째로 등의 중앙으로 부터 가장자리로 감에 따라 감소하는 경우(진폭변화 τ_C) 그리고 마지막으로 균일한 진폭(진폭변화 τ_A)이다. 진폭변화 τ_A 와 τ_B 그리고 τ_C 는 그림 3에서 보여주고 있는 것과 같이 동 안에서 각각

$$\tau_A = 1 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\tau_B = (x^2 + y^2) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\tau_C = 1 - (x^2 + y^2) \quad \dots\dots\dots (23)$$

으로 주워지며 등 밖에서는 세 진폭 모두 0이 된다.

4-2 불균일한 진폭이 PSF와 OTF에 미치는 영향

PSF를 계산하는식(12)와 OTF를 계산하는식(17)에 각각 τ_A 와 τ_B 그리고 τ_C 를 대입하여 계산한 결과가 그림 4에서 16까지 보여주고 있다. 그림 4에서 6까지는 수차가 없는 경우 각 진폭변화에 따른 축상의 PSF를, 그림 7에서 9까지는 W_0 가 3 λ 일때 각 진폭변화에 따른 축상 PSF

를 그리고 그림 10에서 12까지는 W_{40} 가 3λ 일때 세가지 다른 초평면상에서 PSF를 각각 보여주고 있다. 이상의 PSF에서 진폭변화 τ_C 와 같이 동의 중앙에서 가장 자리로 감에 따라 감소할때에는 수차의 영향을 어느정도 감소시킬 수 있으며 부과되는 진폭의 변화에 따라 촛점의 변화를 가져올 수 있음을 알 수 있다. 그림 13은 수차가 없는 경우 OTF를 보여주고 있는데 τ_B 와 같이 진폭이 동의 중앙에서 가장자리로 감에 따라 증가 하는 경우 저주파수 영역에서는

τ_A 와 같이 균일한 진폭의 경우보다 낮은 OTF 값을 가지며 고주파수 영역에서는 τ_A 의 경우보다 높은 OTF 값을 찾을 수 있다. 그림 14에서 16까지는 W_{40} 가 3λ 일때 세가지 다른 초평면에서 OTF의 값을 보여주고 있으며 그림 14에서 16까지의 OTF의 값의 변화는 그림 7에서 9까지의 축상의 PSF로써 설명이 가능하나 더욱 많은 계산을 해보아야 확실할것 같다.

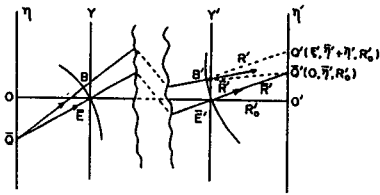


Fig. 1. Diffraction theory of PSF

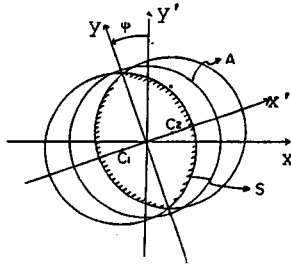


Fig. 2. Region of integration for the OTF

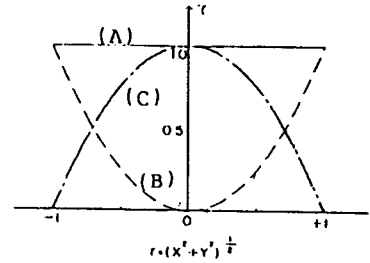


Fig. 3. Amplitude variations

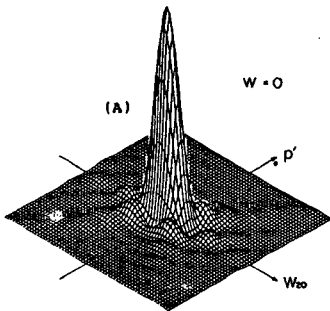


Fig. 4.

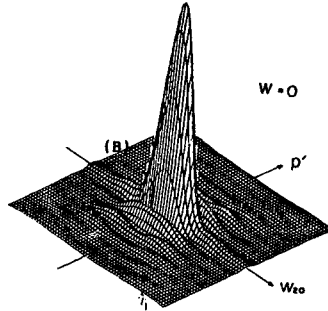


Fig. 5.

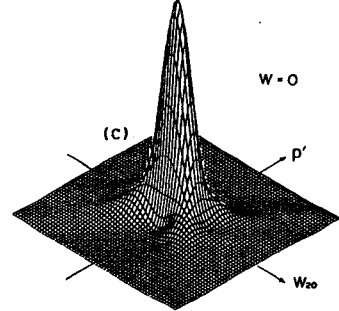


Fig. 6

Axial PSF when the system has no aberration and the amplitudes are given by τ_A, τ_B and τ_C

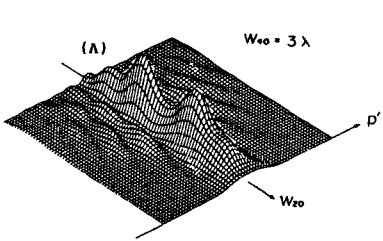


Fig. 7.

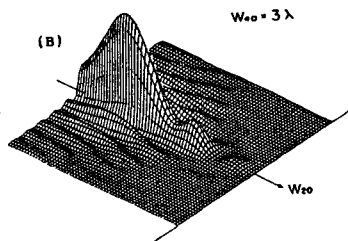


Fig. 8

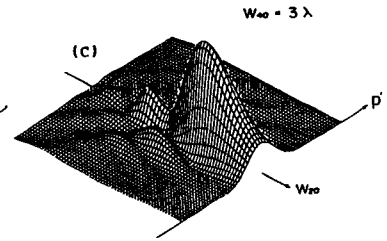


Fig. 9.

Axial PSF of the system whose amplitudes are given by τ_A, τ_B and τ_C when $W_{40} = 3\lambda$

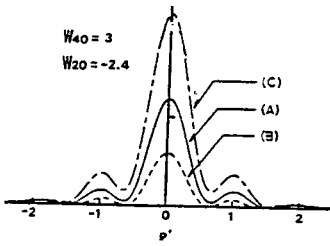


Fig. 10.

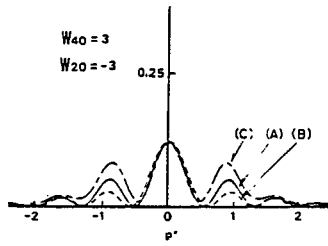


Fig. 11.

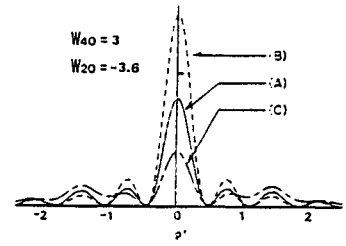


Fig. 12.

The defocused PSF when W_{40} of the system has $W_{40} = 3 \lambda$ and the amplitudes are given by τ_A, τ_B and τ_C

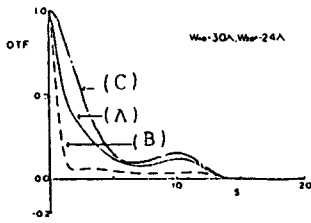


Fig. 14.

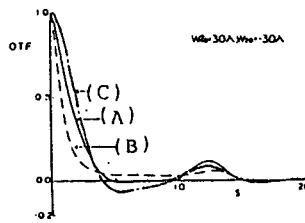


Fig. 15.

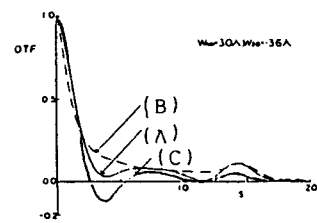


Fig. 16.

OTF in the presence of $W_{40} = 3 \lambda$ in different focal planes with nonuniform amplitudes τ_A, τ_B and τ_C

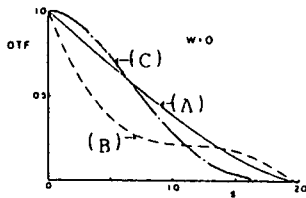


Fig. 13. OTF with amplitudes τ_A, τ_B and τ_C when $W = 0$

Reference

1. H.H. Hopkins, Proc. Phys. Soc. B., LX11, 22(1949)
2. G.Toraldo di Francia, Nuovo Cimento Suppl. 9, 426.
3. P. Jacquinot and B. Roizen-Doisser, *Progress in Optics*, Vol III (1964).
4. M.J.Yzuel and F.Calvo, Opt. Act., 26, 1397(1979).
5. R.Boivin and. Boivin, Opt. Act., 27, 587(1980).
6. R.M.Herman, J. Pardo, and T.A.Wiggins, Appl. Opt., 24,1346(1985).

7. V.N.Mahajan, JOSA, A, 3,470(1986).
8. J.Ojeda-Castaneda, L.R.Berriel-Valdos, and E. L.Montes, Appl. Opt. 26, 2770(1987).
9. L.N.Hazra and A.Guha, J.Opt. Soc. Am. A 3, 843(1986).
10. K.Tanaka and O.Kanzaki, Appl. Opt.26,390(1987).
11. P.Kuttner, Opt. Eng. 25,189(1986).
12. R.Barakat, "Obscuration," Appl. Opt. 26,3790(1987).
13. 정창섭, 제 52 회 한국물리학회 광학 및 양자전자분과 초청강연 (1986).
14. W.B.King, Opt., 7, 197(1968).
15. H.H.Hopkins, Jap. J. Appl. Phys. 4, Sppl.(1965).
16. H.H.Hopkins, and M.J.Yzuel, Opt. Act., 17, 157 (1970).
17. 정창섭, 새물리, 28, 92(1988).
18. C.S.Chung and H.H.Hopkins, Appl. Opt. 23, 1244 (1983).