

유한요소법에 의한 유전체 광도파관의 전파특성 해석
 Propagation Characteristics Analysis of Dielectric
 Waveguide Using a Finite-Element Method

강 길범 * 윤 대일 ** 김 정기 **

*동명전문대학 **중앙대학교

< ABSTRACT >

The most serious difficulty in using the finite element method is the appearance of the so-called spurious, nonphysical modes.

We have proposed the finite element formulation of the variational expression in the three-component magnetic field based on Galerkin's method.

In this approach, the divergence relation $\nabla \cdot \mathbf{H}$ is satisfied and spurious modes does not appear and finite-element solutions agree with the exact solutions.

I. 서론

최근, 고도정보화 사회로 발전해 가는데 중추적인 역할을 하는 광통신 기술은 높은 주파수의 전자파를 도파관에 의해서 신호를 집중시키고, 지향시키는 전송 매개체로서 뿐만 아니라 기능소자로서 부품의 근간을 이루고 1), 광집적 회로소자의 설계를 위한 기본적인 구성요소가 된다. 2)

따라서 도파모드의 전파특성을 정확히 파악하는 것은 이러한 디바이스의 설계와 고신뢰성을 위하여 필요 불가결하다. 각종 도파관에

유한요소법을 적용하는 경우 3) 대부분 spurious 해가 발생하여 큰 장애가 되어왔다. 4) 5)

이러한 spurious해를 제거하기 위하여 여러가지 방법이 제안되어 부분적으로 성과가 얻어지고 있으며 6) - 8) 그 중에서 Penalty 법에 의한 방법이 가장 많이 연구 되고 있다. 9) 그러나 이 방법에서도 Penalty계수라는 임의의 정수값을 적절하게 선정하지 않으면 spurious해는 다시 발생하고 있다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 개선하기 위해서 자체 3성분에 의한 표현식에 Galerkin법을 적용한 새로운 알고리즘을 제안하였다.

이 해법이 타당성을 확인하기 위하여 여러가지 도파관에 적용하여 수치해석 결과를 이론값 10)과 비교하였다.

II. Galerkin 방정식

전파축을 z방향으로 하고, 이 전파축에 수직인 도파관의 단면전체를 D, 영역의 경계를 라 한다. 해석영역의 매질은 자성체를 포함하지 않는 유전체 도파관으로 가정한다. 이때 Maxwell 방정식 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon_0 [\mathbf{K}] \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4ab} (x - r_2)(y - \eta_2) \\ N_2 &= \frac{-1}{4ab} (x - r_1)(y - \eta_2) \\ N_3 &= \frac{1}{4ab} (x - r_1)(y - \eta_1) \\ N_4 &= \frac{-1}{4ab} (x - r_2)(y - \eta_1) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} r_2 - r_1 &= 2b \\ \eta_2 - \eta_1 &= 2a \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

x-y 좌표계와 국부좌표계 $r - \eta$ 사이에 좌표변환을 한다.

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{1}{b} (x - r_s) \\ \eta &= \frac{1}{a} (y - \eta_s) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} r_s &= \frac{r_1 + r_2}{2} \\ \eta_s &= \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq r \leq 1 \\ -1 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

사변형 요소들 $r - \eta$ 좌표계로 표시하면 그림 (1)

의 (b) 와 같이 $r = \pm 1, \eta = \pm 1$ 의 각변이 있는 장방형 형태가 된다.

(12)식을 (10)식에 대입하면 $r - \eta$ 좌표계의 shape function 을 얻을 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - r)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 + r)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + r)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 - r)(1 + \eta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

요소의 특징값을 좌표변환을 통하여 각각 좌표계에서 정의된 것으로 전환되므로 r, η 가 독립변수라고 하면 chain rule 에 의해서

$$dx dy = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} dr d\eta = |J| dr d\eta \quad (16)$$

(8)식에 (15) (16) 식을 대입하여 각 요소에 대하여 matrix를 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & ([A]_{\bullet} + [C]_{\bullet})(H)_{\bullet} - k_0^2 [B]_{\bullet}(H)_{\bullet} \\ & + \int_{r_{\bullet}} [N]^T \exp(j\beta z) [n \times ([K]^{-1} \nabla \times H)] dr \\ & - \int_{r_{\bullet}} [N]^T \exp(j\beta z) [n (\nabla \cdot H)] dr \\ & = (0) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} [A]_{\bullet} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [S]^T [K]^{-1} [S]^T |J| dr d\eta \\ [B]_{\bullet} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] |J| dr d\eta \\ [C]_{\bullet} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (U) (U) |J| dr d\eta \end{aligned} \quad (18)$$

경계면이 완전도체라고 가정하고 (5) 과 (17) 식에 의해서 전 영역에 대해서 matrix를 구성하면 다음과 같다.

$$([A] + [C])(H) - k_0^2 [B](H) = (0) \quad (19)$$

V. 수치계산 및 적용예

도파관에서 전체 단면의 1/4을 4절점을 갖는 4변형요소로 분할하면 요소수는 9개, 절점수는 16개가 된다.

여기서 유전체 도파관의 폭(w), 두께(t)를, 비유전율은 각각 1.5, 2.45 인 경우에 대하여 고려하였으며, 경계조건으로 DA 와 CD는 완전도체라고 가정하였다.

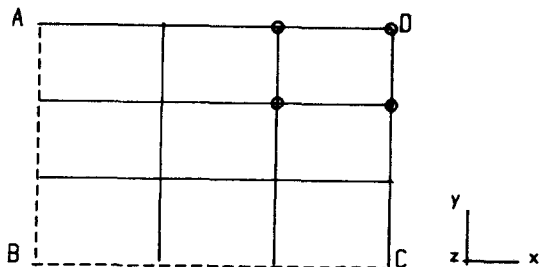


Fig 2. Quadrilateral element division for an dielectric rectangular waveguide

여기서, ω 는 각주파수, ϵ_0, μ_0 는 각각 진공유전율, 진공투자율, $[K]$ 는 비유전율 Tensor 이다.

$$\nabla \times ([K]^{-1} \nabla \times H) - k_0^2 H = 0 \quad (3)$$

여기서, k_0 는 자유공간에 있어서의 wavenumber 이다.

(3)식은 축방향 성분 변분표현식에서 문제가 되었던 특이점은 제거 되었지만 spurious해는 사라지지 않았다.5) 이러한 spurious해의 발생은 수학적으로 $\nabla \cdot H = 0$ 조건이 만족되지 않기 때문에 발생한다.7)

$$\nabla (\nabla \cdot H) = 0 \quad \text{in } D \quad (4)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (5)$$

영역 D 를 유한개의 4변형요소로 나누고 각 요소에 있어서 계 vector 를 요소내의 절점 미지량으로 전개하면

$$H = (H_x \ H_y \ H_z)^T = [N]^T (H)_e \exp(-j\beta z) \quad (6)$$

여기서, $[N]$ 는 요소내에서 보간함수 (interpolation function) 또는 형상함수 (shape function) 라 하며 다음과 같은 성질을 갖고 있다.

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

(3)식과 (4)식에 Galerkin 법을 적용하면 다음과 같다.

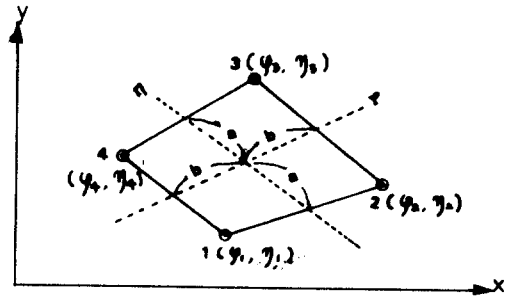
$$\begin{aligned} & \iint_D [[N] \exp(-j\beta z)]^M [\nabla \times ([K]^{-1} \nabla \times H)] x dy \\ & - \iint_D [[N] \exp(-j\beta z)]^M k_0^2 H dx dy \\ & - \iint_D [[N] \exp(-j\beta z)]^M \nabla (\nabla \cdot H) dx dy \\ & = (0) \end{aligned} \quad (8)$$

III 유한요소법 적용

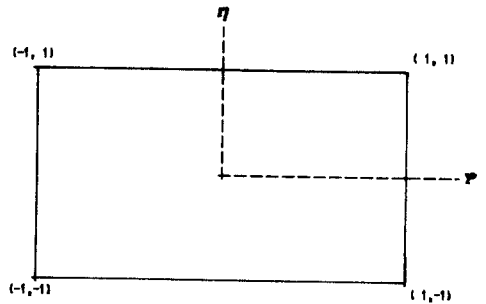
해석영역을 그림 1 와 같이 선형 사변형 요소로 분할하여 요소의 각 절점에서 자계 H 의 값을 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_x &= \langle N_{xx} \rangle (H_x)_e \exp(-j\beta z) \\ H_y &= \langle N_{yy} \rangle (H_y)_e \exp(-j\beta z) \\ H_z &= j \langle N_{zz} \rangle (H_z)_e \exp(-j\beta z) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $(H_x)_e, (H_y)_e, (H_z)_e$ 는 각 요소의 절점에 대응하는 자계 벡터이며, e 는 z 방향의 위상정수를 나타낸다.



(a) The antisymmetric linear quadrilateral element in the x-y plane



(b) A natural coordinate system for the quadrilateral element

Fig 1. Linear quadrilateral element and a natural coordinate system
x-y 좌표계에 의해서 선형 사변형 요소의 shape function ($N_1 - N_4$) 은 다음과 같이 정의 된다.

그림 3는 폭은 2cm , 두께는 1cm 비유전율은 1.0 일때의 유전체 도파관의 분산특성을 나타내고 있다.

실선은 이론값을 나타내고, o 표시는 F.E.M. (Finite Element Method) 에 의한 결과를 표시하고 있다.

그림 4는 폭은 2cm , 두께는 1cm 비유전율은 2.45 일때의 유전체 도파관의 분산특성을 나타내고 있으며 10% 이내의 오차를 보이고 있는 것은 요소수를 증가시키거나, 고차의 계수로 표현된 형상계수를 사용함으로써 오차를 줄일수 있다.

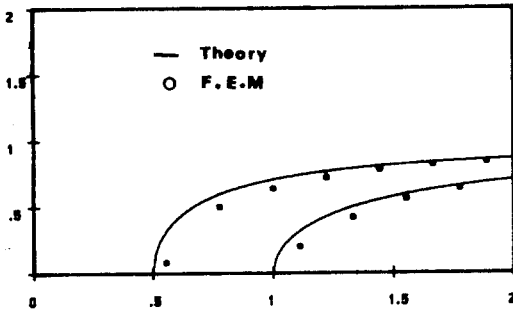


그림3 Dispersion characteristics for waveguide with dielectric of refractive index $\epsilon_r = 1.0$

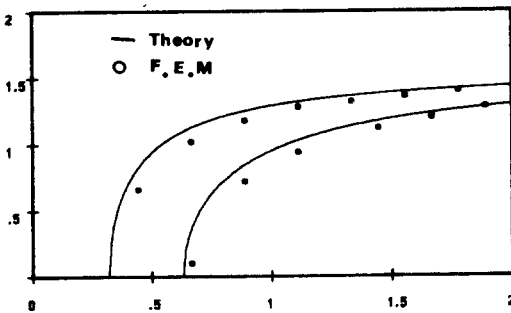


그림4. Dispersion characteristics for waveguide with dielectric of refractive index $\epsilon_r = 2.45$

IV. 결론

유전체 도파관의 도파모드 해석법으로서 자체 전성분에 의한 표현식에 Galerkin법을 적용한 새로운 알고리즘을 제안하였다.

사변형 요소 (quadrilateral element) 에 의한 유한요소 표현식은 종래의 전성분 표시식에 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ 조건을 고려하여 해석한 결과 spurious 해는 도파의 전영역에서 나타나지 않았다.

이 해법이 타당성을 확인하기 위하여 유전체 도파관에 적용하여 얻은 해석결과와 이론값과 잘 일치하는 것을 알수있다. 다만 여기서 생기는 오차는 요소수를 증가 시킨다거나 고차모드 (high mode) 로 해석하면 줄일 수 있다고 생각한다.

참고문헌

- [1] F. Aurracherr and H. White, " A New Design for an Integrated Optical Isolator ", Optics Communications, Vol, 13, No.4, pp. 435-440, Apr. 1975.
- [2] C. Yeh, S.B.Dong, and W.Oliver, " Arbitrarily shaped inhomogenous optical fiber or integrated optical waveguides, " J.Appi.Phys., Vol.46, PP.2125-2129, May 1975.
- [3] S.Ahmed and P.Daly, " Finite Element Method for Inhomogeneous Waveguides ", Proc. Inst. Elec. Eng. , Vol. 116, No. 10, pp. 1661-1664, 1969.
- [4] B. M. A. Rahman and J. B. Davies, " Finite-element analysis optical and microwave waveguide problems, " IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-32, PP.20-28, Jan.1984. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-32, PP.20
- [5] A. Konrad, " High-order triangular finite elements for electromagnetic waves in anisotropic media, " IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-25, PP.353-360, May 1977.
- [6] N.Mabaya, P.E.Lagasse, and P.Vandenbulcke, " Finite element analysis of optical waveguides, " IEEE Trans.Microwave Theory Tech., Vol.MTT-29, PP.600-605, June 1981.
- [7] J. B. Davies, F.A. Fernandez, and Z. Y. Philippou, "Finite Element Analysis of All Modes in Cavities with Circular Symmetry ", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-30, 11, pp.1975-1980, Nov.1982.
- [8] M. Hano, " Finite Element Analysis of Dielectric-loaded Waveguides ", IEEE Trans. Microwave Theory tech., MTT-32, 10, pp. 1275-1279, Oct. 1984.
- [9] B. M. A. Rahman and J. B. Davies, " Penalty Function Improvement of Waveguide Solution by Finite Elements ", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-32, 8, pp. 922-928, Aug. 1984.
- [10] N. Marcuvitz, Waveguide Handbook, New York : McGraw-Hill, 1951.