신경회로망의 학습규칙을 이용한 SDF 적응 필터 설계

Adaptive SDF filter design using the Widrow-Hoff learning rule

김홍만, 정재우, 심창섭
한국전자통신연구소 광통신연구실

곽종훈
한국전자통신연구소 기초기술연구부

<abstract>

A method of adaptive formation of the synthetic discriminant function(SDF) both in image plane and spatial frequency plane by using the Widrow-Hoff learning rule is proposed. The proposed method uses minimum number of interconnections between neurons so it can reduce the time for learning the neural net. Also complex valued interconnection weights are introduced for the purposes of handling the phase objects or Fourier transformed spatial frequency objects which usually have complex values for the representation of not only amplitude but also phase information. Also methods of optical implementation for the complex valued interconnection weights are discussed.

1. 서 론

SDF(Synthetic discriminant function) 필터는 여러 개의 유형들을 분류하기 위하여 광학적 영상인식 분야에서 많이 이용되고 있다.[1] 그러나 지금까지 알려진 SDF 필터 설계 방법은 새로운 유형이 추가될 때 전체 SDF 필터를 다시 계산해야 하므로 대상 패턴의 수가 증가되면 매우 비효율적인 방법이 된다. 본 고에서는 새로운 패턴이 추가되어질 때 신경회로망의 연결세기(interconnection strength)를 조금씩 조정하여 줌으로써 새로운 패턴에 적응이 가능한 SDF 필터 설계 방법을 제시하였으며 이 때 뉴론들간의 연결수를 최소화할 수 있도록 하였다. 또한 홀로그램을 이용한 광학적 신경회로망의 구현에서 각각의 홀로그램 화소들은 진폭 및 위상성분을 모두 가지고 있으므로 이들 각 홀로그램 화소들을 신경회로망의 세포들 간의 각 연결과 대응시키기 위해서는 복소수 값을 갖는 연결세기를 고려할 수 있다. 본 고에서는 gradient descent 방식을 사용하는 Widrow-Hoff 학습규칙을[2] 변형하여 복소수 값의 연결세기에 대해서도 학습이 가능하도록 하였으며 이들 각 복소수 값을 갖는 연결들이 홀로그램을 이용한 신경회로망의 구현에 잘 적용될 수 있음을 기술하였다. 아울러 복소 연결세기를 도입하여 영상평면에서의 SDF 필터뿐만 아니라 공간 주파수 평면에서의 SDF 필터 설계 방법에 대해서도 기술하였다.

2. 이 론

가. SDF 필터 계산

패턴 f_1, f_2 중 패턴 f_1은 집합1에 속하고 패턴 f_2는 집합1에 속하지 않는 경우, 이를 선형분리할 수 있는 함

이 발표논문은 과학기술처 특정연구과제에 관련된 것입니다.

수 h는 다음과 같이 표현될 수 있다.[3]

$$\begin{aligned} f_1 h &= 1 \\ f_2 h &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

여기서 f_1, f_2는 n개의 화소를 $f_i(1)$, $f_i(2)$, ... ,$f_i(n)$, (i = 1, 2)을 원소로 하는 열벡터(row vector)이며 h는 h(1), h(2), ... ,h(n)을 원소로하는 행 벡터(column vector)이다. 여기서 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ 라 하고 $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 라 하면, 식(1)은 $fh = u$와 같이 되며 이를 만족시키는 해 h는 다음과 같이 구할 수 있다.[3]

$$h = f^T(ff^T)^{-1}u + (I-f^T(ff^T)^{-1}f)y \qquad (2)$$

여기서 I는 nxn 크기를 갖는 단위 매트릭스(unit matrix)이며 y는 n개의 원소를 갖는 임의의 행벡터이다. y가 임의의 벡터이므로 식(1)에서 n>2이면 식(2)를 만족하는 무수히 많은 해 h가 존재한다. 이러한 h가 존재하기 위해서는 f_1과 f_2가 서로 선형 독립인 관계를 만족해야 하나 f_1과 f_2가 영상패턴인 경우는 일반적으로 그 화소수가 매우 많으므로 대부분 선형 독립인 관계를 잘 만족한다. 여기서 y = 0인 경우 h는 최소의 벡터크기(norm)을 갖는 해가 됨이 알려져 있고 원래 패턴 f_1, f_2의 선형 결합으로 구성되어질 수 있다. 즉,

$$h = f^T a \qquad (3)$$

단, $a = r^{-1}u$, $r = ff^T$이다. 이러한 h를 SDF라 하며 이것을 푸리에 변환(Fourier transform)하여 복소 공액값을 취한 H^*를 구하면 SDF 필터가 된다. 이러한 SDF 필터는 코우히어런트 광을 이용하는 광학적 패턴인식에서 여러개의 패턴들을 여러개의 집합으로 분류하기 위해서 많이 사용되고 있다.

나. 신경회로망을 이용한 SDF 적응필터 계산

한편 식(1)과 같은 문제는 Widrow-Hoff 학습규칙을 갖는 신경회로망으로도 풀 수 있다. 즉, 그림 1.과 같이 입력 신경세포 수가 n개, 출력 신경세포 수가 한 개이고 선형 문턱치 함수(linear thresholding function)을 갖는 신경회로망을 생각하자.

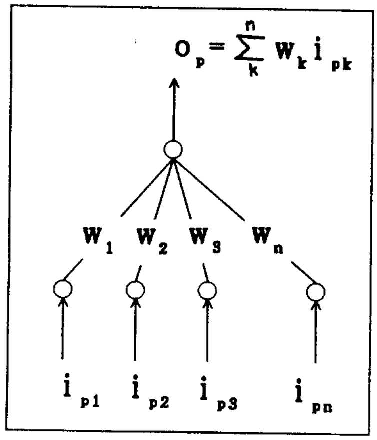

그림1. 출력 신경세포수가 한 개이고 입력신경세포수가 n개인 신경회로망

위 그림 1.과 같은 신경회로망을 이용하여 신경회로망의 학습 규칙에 의한 식(1)의 해 h를 구하기 위해서 다음과 같이 p번째 패턴이 신경회로망에 입력되었을 때의 오차 E_p를 정의한다.

$$E_p = (1/2)(t_p - o_p)^2 \qquad (4)$$

여기서 t_p는 p번째 패턴에 대한 원하는 출력 값, o_p는 p번째 패턴이 입력되었을 때 실제의 출력값

$$o_p = \sum_{k=1}^{n} w_k i_{pk} \qquad (5)$$

를 각각 나타낸다. k번째 연결세기 w_k에 대한 E_p의 미분 변화율을 구하면

$$\frac{\partial E_p}{\partial W_k} = -(t_p - o_p) i_{pk} \qquad (6)$$

가 되고 이것의 절대치를 줄이는 방향으로 w_k를 변화시키면 된다. 즉,

$$\Delta_p W_k = \eta (t_p - o_p) i_{pk} \qquad (7)$$

여기서 η는 변화량의 크기를 결정해 주는 상수이다. 이러한 학습 규칙을 델타 룰(delta rule)이라 하며 Widrow-Hoff 학습 규칙의 한 형태이다. 그림1에서 i_{pk} 대신 $f_p(k)$를, t_p 대신 u_p를 대치하면 훈련이 끝난뒤의 w_k는 식(1)을 만족시키는 h(k)가 되며 w_k의 평균 기대치는 식(3)의 h(k)와 같음이 알려져 있다.[4]

다. 최소 연결수를 갖는 신경회로망을 이용한 SDF 적응필터 설계

앞 항에서 논의된 방법에 의해서도 식(1)의 해를 구할 수 있지만 이 때 n개의 화소를 갖는 패턴을 대상으로 하는 경우 n개의 연결 갯수가 필요하게 되고 각각에 대해서 매 학습마다 그 크기를 조금씩 조정해야 하므로 화소의 수가 많은 경우 이 방법은 매우 비효율적이다. 따라서 신경세포간의 연결수를 줄이기 위하여 다음과 같이 생각한다. 즉, 식(5)에서 p번째 패턴 f_p가 입력되었을 때의 출력 o_p는

$$o_p = \sum_{k=1}^{n} w_k f_p(k)$$

가 되고 w_k는 h(k)와 같도록 하는 것이 목적이므로 식(3)을 이용하여 o_p를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} o_p &= \sum_{k=1}^{n} f_p(k)h(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_p(k)\left(\sum_{q=1}^{2} a_q f_q(k)\right) \\ &= \sum_{q=1}^{2} a_q \sum_{k=1}^{n} (f_p(k)f_q(k)) \\ &= \sum_{q}^{2} a_q r_{pq} \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 r_{pq}는 식(3)의 r 매트릭스의 p행 q열 원소이다. 여기서 식(8)을 식(4)와 비교하여 보면 신경세포간의 연결가중치 w_k는 a_q로, 입력 i_{pk}는 r_{pq}로 각각 대치되었음을 알 수 있다. 또한 입력 신경세포수 및 세포간 연결수도 각각 n개에서 2개로 줄어 들었음을 알 수 있다. 따라서 앞 항의 경우와 같이 2개의 연결세기 a_1, a_2에 대해서 마찬가지의 학습규칙을 적용할 수 있어 매우 빠른 속도로 학습이 이루어 질 수 있음을 알 수 있다. 학습이 끝난뒤 $h = a_1 f_1 + a_2 f_2$ 와 같이하여 식(3)의 h를 구할 수 있다.

라. 복소 연결세기를 갖는 신경회로망의 학습

지금까지 논의된 바와 같이 식(1)의 h를 구하기 위하여 h(k = 1,2,...,n)를 신경세포간의 연결세기로 하여 그 크기를 조금씩 학습규칙에 따라 변화시키면 됨을 기술하였다. 광학적으로 이러한 신경세포간의 연결세기를 표현하는 방법으로는 빛의 투과 정도를 연결세기로 하는 방법이 생각될 수 있다. 그러나 이 경우에도 음의 값을 갖는 연결세기를 표현하여야 하는 어려움이 있어 이를 해결코자 하는 시도가 있어 왔다.[5] 그러나 광학에서 사용되고 있는 홀로그램은 음의 값 뿐만 아니라 빛의 위상에 대한 정보도 지니고 있으므로 홀로그램의 각 화소를 신경회로망의 각 연결세기로 대응시킬 수 있는 학습규칙을 얻을 수 있으면, 연결세기의 광학적 표현에서 유리할 뿐만 아니라 홀로그램의 많은 화소를 전부 신경세포간의 연결세기로 표현할 수 있으므로 신경회로망의 광학적 구현에 매우 유리할 수 있을 것이다. 홀로그램이 갖는 진폭 및 위상 성분은 복소수로 표현될 수 있으므로 복소수 연결세기를 갖는 신경회로망의 학습이 어떻게 이루어질 수 있는지를 고찰한다. 복소함수에 대한 고려를 위하여 식(4)의 오차함수를 $E_p = 1/2\,|t_p - o_p|^2$으로 하고, $w_k = A_k + iB_k$는 복소 연결세기를 나타낸다고 한다. A_k 및 B_k를 서로 독립이라고 가정할 수 있으므로 복소수 연결세기 w_k에 대해서도 앞의 식(4), (6) 및 (7)을 이용하여 다음과 같은 학습 규칙을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta_p A_k &= \mathrm{Re}[(t_p - o_p)\, i_{kp}] \\ \Delta_p B_k &= \mathrm{Im}[(t_p - o_p)\, i_{kp}] \end{aligned} \tag{9}$$

3. 결과 및 고찰

복소 연결 세기에 대한 학습 규칙을 2-(다)항에서 논의된 최소 연결수를 갖는 적응 SDF 필터의 경우에 대해서 적용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 하였다. 그 결과를 쉽게 해석할 수 있게 하기 위하여 f_1, f_2의 2개 패턴을 대상으로 하고 각 패턴은 4 개의 화소를 가지는 것으로 하고 그 값은 임의로 다음과 같이 하였다.

$$f1 = (\ 1,\ i,\ 0,\ -1)$$
$$f2 = (\ -i,\ 0,\ 1,\ 0)$$

복소수를 사용하는 경우 식(3)은 다음과 같이 되며

$$\mathbf{h} = \mathbf{f}^{*T}\mathbf{a} \tag{10}$$

단, $a = r^{-1}u$, $r = ff^{*T}$ 이다.

또한 2-(3)항에서와 같은 방법으로 식(9)의 학습규칙은 다음과 같이 됨을 쉽게 알 수 있다.

$$\Delta_p A_k = \eta \mathrm{Re}[(t_p - o_p) r_{kp}]$$
$$\Delta_p B_k = \eta \mathrm{Im}[(t_p - o_p) r_{kp}] \qquad (11)$$

단, 여기서는 $a_k = A_k + iB_k$가 된다. a_k에 대한 학습이 모두 이루어진 뒤 식(10)을 이용하면 h가 얻어진다. 실제로 $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ 으로 하고 여러가지의 a_1, a_2 초기값을 주어 학습시킨 결과 η가 0.2 보다 작은 값에서 안정되게 수렴하였으며 η가 0.2일 때 7번 이내의 반복 학습에 오차 $E = E_1 + E_2$의 값이 0.001 이하가 되었다. p번째 패턴, k번째 연결세기를 훈련할 때 신경회로망의 입력값으로 사용한 r_{kp}는

$$r = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

이며 최종 h 값으로 (0.2, -0.4i, 0.2i, -0.4)를 얻을 수 있었다. 여기서 만약 f_1, f_2가 공간주파수 평면에서의 패턴이라면 h는 공간주파수 평면에서의 SDF 필터가 된다. 지금까지는 패턴 수를 2개에 국한시켰으나 이를 m개로 늘리는 경우도 쉽게 생각할 수 있다. 단, 2-(나)항에서와 같은 신경회로망에서는 패턴수가 증가되어도 연결 갯수에는 변화가 없으나 2-(다)항에서 제안된 신경회로망에서는 패턴수 만큼의 연결 갯수가 필요하게 된다. 그러나 패턴들간의 선형독립이라는 조건이 만족되면 m은 n보다 항상 작거나 같기 때문에 2-(다)항에서 제안된 신경회로망의 연결갯수가 2-(나)항의 신경회로망의 연결갯수 보다는 작거나 같게 된다. 한편 출력 신경세포수가 s개라면 각 출력세포에 해당하는 h_1, h_2, … , h_s가 필요하게 됨을 예상할 수 있다. 이를 광학적으로 실현하기 위해서는 h_1, h_2, … , h_s 각각에 대한 별도의 SDF 필터를 만들거나 이들을 중첩한 홀로그램 필터를 만들 수 있을 것이며 중첩홀로그램의 값을 결정하기 위하여 앞에서 설명된 복소수 값을 연결세기로 갖는 신경회로망의 학습규칙이 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

4. 결 론

신경회로망의 학습규칙과 기존의 SDF 필터 설계 방식의 유사성을 이용하여 새로운 패턴에 적응이 가능하고 신경세포간 연결갯수를 줄인 SDF 필터 설계 방법이 제시되었다. 또한 복소수 값을 갖는 연결세기를 도입하고 이들의 학습규칙을 제시하였다. 이러한 복소수값의 연결 세기는 특히 홀로그램을 이용하는 광학적인 방법의 신경회로망 구현에 크게 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

< 참 고 문 헌 >

1. D. Casasent, "Unified Synthetic Discriminant Function Computational Formulation," Appl. Opt., p 1620, 1984.

2. D. E. Rumelhart, Parallel Distributed Processing, p53, MIT Press, 1986.

3. T. Kohonen, Self-Organization and Associative Memory, p49, Springer-Verlag, 1984.

4. D. E. Rumelhart, Parallel Distributed Processing, p457, MIT Press, 1986.

5. D. Psaltis and N. Farhat, "Optical Image Processing Based on an Associative-Memory Model for Neural Nets with Thresholding and feedback," Opt. Lett. p98, 1985.