최소 통계적 감도를 갖는 상태 공간 디지틀 필터의 합성

문 용 선 박 종 안
조선대학교 전자공학과

Synthesis of State-Space Digital Filter with Minimum Statistical Sensitivity

Yong Sun Moon Chong An Park
Dept. of Electronic Eng., Cho Sun Univ.

ABSTRACT

In this paper, we describes that output error variance $\sigma^2\triangle y_c = E[\triangle y_c^2]$, due to the slight variation of the state-space coefficient [ABCD], which is the coefficient quantization error, is normalized on the variance $\sigma^2\triangle$ of$\triangle$[ABCD], for cases that infinite wordlength state-space digital filter is realized by the finite one.

That is, defining $S = E[\triangle y_c^2]/\sigma\triangle^2$ as the statistical sensitivity and extending pseudo controllability gramian, pseudo observability gramian, and 2nd order mode analysis method, to the state space digital filter, we synthesize the realization structure with minimum statistical sensitivity and prove the efficiency of the minimum structure synthesis by the simulation.

Ⅰ. 서 론

디지틀 필터의 합성에 있어서 입·출력 관계를 나타내는 전달 함수 표현의 경우 극·영점 등 주파수 특성의 해석은 정성적으로 가능하지만 양자화 오차, 계산 순서 등 디지틀 필터의 내부 구조에 의존해서 변화하는 해석 문제를 계통적으로 취급하는 것은 곤란하다. 이에 반하여 상태 공간에 의해서 표현된 디지틀 필터 즉 상태 공간 디지틀 필터 (State-Space Digital Filter : SSDF)는 내부 실현 구조를 규정할 뿐 아니라 동일한 전달함수를 갖는 실현 구조라 할지라도 등가변환에 의해서 다른 필터 구조를 표현할 수 있으므로 이러한 상태 공간 표현을 이용한 Roundoff 오차 최소 구조, 계수 양자화 오차 최소 구조 등의 합성에 관한 연구가 주목되고 있다.[1~3] 또한, 상태 공간 표현은 기초적인 표현 및 안정성 판별 문제 등에서 선형 시스템 이론에 대한 의존도가 높기 때문에 선형 시스템 이론으로 상태 공간 디지틀 필터의 해석이 가능하다. 그리고, 선형 시스템 이론에서 전달함수 표현과 상태 공간 표현을 결합하는 개념으로써 가제어성과 가관측성이 있으며 이러한 가제어성과 가관측성의 크기로 해서 시스템의 구조적 성질을 해석하는 방법이 Moore로 부터 제안되었다.[4~7]

본 논문에서는 무한어장 상태 공간 디지틀 필터를 유한어장 상태 공간 디지틀 필터로 실현할 때의 계수 양자화 오차인 상태 공간의 매개변수 A, B, C, 그리고 D의 미소변동이 실현 구조에 의존하므로 상태 공간 디지틀 필터의 계수 감도로서 통계적 계수 감도를 제안하고 선형 시스템 이론 즉 가제어성의 크기, 가관측성의 크기, 그리고 2차 모드의 해석 방법을 상태 공간 디지틀 필터에 확장해서 통계적 감도가 최소가 되는 실현 구조를 합성하였다.

Ⅱ. 통계적 감도 해석과 최소화

1. 통계적 감도 정의

유한어장 상태 공간 디지틀 필터에서 상태 공간 계수 행렬의 미소 변동에 기인한 특성 악화만을 고려한 상태 공간 디지틀 필터 SSDF[$\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}\widetilde{D}$]의 상태 방정식 및 출력 방정식은 식(1)로 표현되며 이를 블럭 선도로 나타내면 그림 (1)과 같다.

$$\widetilde{x}(k+1) = [A+\triangle A(k)]\,\widetilde{x}(k) + [B+\triangle B(k)]\,u(k) \cdots (1\text{-a})$$

$$\widetilde{y}(k) = [C+\triangle C(k)]\,\widetilde{x}(k) + [D+\triangle D(k)]\,u(k) \cdots (1\text{-b})$$

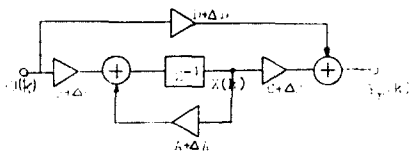

그림 1. 계수양자화 오차 해석을 위한 블럭선도

Fig.1 Block diagram for coefficient quantization error analysis

식(1)에서 계수 행렬의 미소 변동 요소를 식(2)와 같이 상호 상관이 없는 백색 잡음으로, 그리고 입력 신호 $u(k)$는 $E[u(k)]=0$, $E[u^2(k)]=1$인 정규 백색 신호로 가정할 때 정상 상태에서 출력 오차 분산은 식(3)과 같이 구해진다.

$$\begin{matrix} & n & 1 \\ n & \Delta A & \Delta B \\ 1 & \Delta C & \Delta D \end{matrix}_{ij}$$

0 ; $(\cdot)_{ij}$ = 정수
다른 미소 변동 요소와 상관이 없고 ……(3)
평균 0 ; 분산 σ^2인 백색오차 ;
$a_{ij} \neq$ 정수

$$E[\Delta y_c^2] = \lim_{k\to\infty} E[(\tilde{y}(k) - y(k))^2] \quad \cdots\cdots(4)$$

식(4)는 출력 오차 $\Delta y_c(k)$의 자기 상관 함수 $R\Delta y_c(m)$과 스펙트럼 밀도 $S\Delta y_c(w)$를 이용해서 식(5)와 같이 표현되므로 정상 출력 오차 분산 $E[\Delta y_c^2]$는 그의 스펙트럼 밀도를 주파수 영역에서 적분하는 것과 동일한 의미를 갖는다.

$$E[\Delta y_c^2] = R\Delta y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S\Delta y_c(w)\, dw \quad \cdots\cdots(5)$$

그러므로, 계수 행렬 [A B C D]의 미소 변동에 기인한 출력 오차의 통계적 정도를 나타내기 위해서 출력 오차의 분산 $E[\Delta y_c^2]$을 계수 행렬의 미소 변동의 분산 σ^2으로 정규화한 것 즉, 식(6)을 통계적 감도로 정의한다.

$$S = \frac{E[\Delta y_c^2]}{\sigma^2} \quad \cdots\cdots(6)$$

2. 상태 공간 디지틀 필터의 통계적 감도 해석

통계적 감도 S와 상태 공간 디지틀 필터의 계수 [A B C D]와 관계를 조사하기 위해서 상태 공간 계수의 미소 변동에 따른 정상 출력 오차 $E[\Delta y_c^2]$을 구하면 다음과 같이 유도된다.

식(16)으로 부터 출력 오차 $\Delta y_c(k) = \tilde{y}(k) - y(k)$는 식(7)과 같이 구해지며 식(7)을 블럭 선도로 나타내면 그림 2로 표현된다.

$$v(k+1) = Av(k) + \Delta A x(k) + \Delta B u(k)$$
$$\Delta y_c(k) = Cv(k) + \Delta Cv(k) + \Delta Du(k) \quad \cdots\cdots(7)$$
$v(k) = \tilde{x}(k) - x(k)$: 상태벡터의 오차벡터

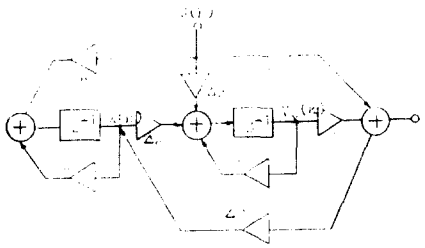

그림 2. 상태공간 계수의 미소변동에 따른 출력 오차

Fig.2 Output error analysis model based on the slight variation of the state-space coefficient.

입력 신호와 상태 공간 계수 행렬의 미소 변동에 대해서 식(2)의 통계적 가정을 이용한다면 식(7)로 부터 $E[\Delta y_c^2(k)]$는 식(8)과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} E[\Delta y_c^2(k)] &= E[\Delta y(k) \Delta y^t(k)] \\ &= CE[v(k)v^t(k)]C^t \\ &\quad + E[\Delta C(k)x(k)x^t(k)\Delta C^t(k)] \\ &\quad + E[\Delta d^2(k)u^2(k)] \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \{t_r[M(a_i)K]\} W_{ii} + \sigma^2 t_r \\ &\quad [M(b^t)W] + \sigma^2 t_r[M(c)k] \\ &\quad + \sigma^2 m(d) \quad \cdots\cdots(8) \end{aligned}$$

식(8)에서 $M(\cdot)$는 식(9)로 정의된 함수이며, K와 W는 각 제어성 Gramian (상태 벡터의 공분산 행렬 : $E[x(k)x^t(k)]$) 과 가관측성 Gramian (오차 분산 행렬 $E[v(k)v^t(k)]$) 이다.

$$M(v) = \mathrm{diag}\,(m(v_1) \cdots m(v_n)) \quad \cdots\cdots(9)$$
$$m(v_i) = \begin{cases} 1 ; v_i \neq \text{정수} \\ 0 ; v_i \neq \text{정수} \end{cases}$$

따라서, 식(8)의 출력 오차 분산 $\sigma^2\Delta y_c = E[\Delta y^2(k)]$로 부터 상태 공간 계수의 미소 변동하지 않는 요소를 고려한 통계적 감도는 식(10)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} S &= \frac{E[\Delta y_c^2]}{\sigma^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{t_r[M(a_i)k]\} W_{ii} + t_r[M(b^t)W] \\ &\quad + t_r[M(c)k] + m(d) \quad \cdots\cdots(10) \end{aligned}$$

식(10)을 이용해서 통계적 감도 최소의 상태 공간 디지틀 필터의 합성은 복잡하기 때문에 문제를 단순화하기 위해서 식(11)과 같이 상태 공간 계수 행렬의 모든 요소

가 미소 변동하는 것으로 가정하면 통계적 감도 S는 식 (25)와 같다.

$$M(a_i) = M(b_j^i) = M(C_i) = 1_n \quad m(d) = 1 \cdots (11)$$

$$S = t_r(k)\,t_r(w) + t_r(w) + t_r(k) + 1$$

$$= \{ t_r(k) + 1 \}\{ t_r(w) + 1 \} \cdots (12)$$

식 (12)로 부터 상태 공간 디지틀 필터의 실현 구조는 가제어성과 가관측성 Gramian과 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다.

3. 통계적 감도 최소화

정칙 행렬 T를 이용해서 등가 변환된 상태 공간 디지틀 필터 SSDF[$T^{-1}AT$, $T^{-1}B$, CT, D]의 가제어성 Gramian, 가관측성 Gramian은 $K' = T^{-1}KT^{-t}$, $W' = T^tWT$로 표현되므로 SSDF[$T^{-1}AT$, $T^{-1}B$, CT, D]의 통계적 감도는 식 (13)이 된다.

$$S' = \{ t_r(T^{-1}KT^{-t}) + 1 \}\{ t_r(T^tWT) + 1 \} \cdots (13)$$

식 (13)은 등가 변환 행렬 T를 분해하면 식 (14)와 같이 표현할 수 있으며 식 (14)에서 R과 u는 $n \times n$ 직교 행렬, D는 정정한 대각 행렬, T_o는 $T_oT_o^t = K$의 조건을 만족하는 정칙 행렬이다.

$$T = T_o R D U \cdots (14)$$

식 (14)의 등가 변환 행렬의 분해를 이용하면 S'는 식 (15)로 표현된다.

$$S' = \{ t_r(D^{-2}) + 1 \}\{ t_r[D^2 R^t (T_o^t W T_o) + 1 \}$$

$$= \{ \sum_{i=1}^{n} d_i^{-2} + 1 \}\{ \sum_{j=1}^{n} d_j^2 P_j^2 + 1 \} \cdots (15)$$

$$DiagP^2 = R^t (T_o^t W T_o) R$$

식 (15)로 표현된 통계적 감도 S'를 최소가 되게 하는 등가 변환 행렬 T는 등가 변환 행렬의 분해 성분 즉 u, D, 그리고 R은 다음과 같이 유도된다.

i) 직교 행렬 u

식 (15)에 직교 행렬 u의 요소는 없기 때문에 임의의 직교 행렬이면 된다.

ii) 대각 행렬 D

Cauchy-Schwarz의 부등식을 식 (15)에 적용하면 식(16)이 얻어진다.

$$S' = \{ \sum_{i=1}^{n} (d_i^{-2} + \frac{1}{n}) \}\{ \sum_{j=1}^{n} (d_j^2 P_j^2 + \frac{1}{n}) \}$$

$$\geq \{ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(d_i^{-2} + \frac{1}{n})(d_i^2 P_i^2 + \frac{1}{n})} \}^2 \cdots (16)$$

단, 등호는

$$d_i^{-2} + \frac{1}{n} = \alpha (d_i^2 P_i^2 + \frac{1}{n}) \quad \forall \alpha = \text{정수} \cdots (17)$$

일 때 성립하며 특히 식 (16)을 변형하면 식 (18)의 부등식이 된다.

$$S' = \{ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(d_i^{-2} + \frac{1}{n})(d_i^2 P_i^2 + \frac{1}{n})} \}^2$$

$$\geq (\sum_{i=1}^{n} P_i + 1)^2 \cdots (18)$$

단, 등호는 $d_i = P_i^{-\frac{1}{2}}$ 일 때 성립한다. 그러므로 S'가 최소값을 갖기 위해서는 대각 행렬 D는 식 (19)가 되지 않으면 안된다.

$$D = Diag (P_1^{-\frac{1}{2}}\ P_2^{-\frac{1}{2}} \cdots P_n^{-\frac{1}{2}}) \cdots (19)$$

iii) 직교 행렬 R

통계적 감도가 최소가 되기 위해서는 식 (18) 의 $(\sum_{i=1}^{n} P_i + 1)^2$이 최소가 되어야 한다. P_i는 대칭 정정 행렬 $R^t (T_o^t W T_o) R$의 대각 요소 P_i^2의 제곱근이며, $\sum_{i=1}^{n} P_i$가 최소가 될 때 $(\sum_{i=1}^{n} P_i + 1)^2$은 최소가 된다. 또한 대칭 정정 행렬 $T_o^t W T_o$의 고유치를 ρ_i^2이라 할 때 식 (20)이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \geq \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdots (20)$$

단, 등호는

$$R^t (T_o^t W T_o) R = diag (\rho_1^2, \rho_2^2 \cdots \rho_n^2) \cdots (21)$$

일 때만 성립한다.

그러므로, $S' \geq (\sum_{i=1}^{n} \rho_i + 1)^2 \cdots (22)$

그리고, 식(23)으로 부터 $T_o^t W T_o$의 고유치는 $K'W'$의 고유치의 제곱근 즉, 2차 모드와 동일하므로 $K'W'$의 고유치를 θ_i라할 때 식(22)는 식(23)으로 표현된다.

$$T_o^{-1} K T_o^{-t} T_o^t W T_o = T_o^t W T_o \cdots (23)$$

$$S' \geq (\sum_{i=1}^{n} \rho_i + 1)^2 = (\sum_{i=1}^{n} \theta_i + 1)^2 \cdots (24)$$

지금까지의 상태 공간 디지틀 필터의 통계적 감도를 최소가 되기 위한 유도 과정을 요약하면 다음과 같다.

(1) 통계적 감도의 최소치 Smin은 식 (25)와 같다.

$$Smin = (\sum_{i=1}^{n} \theta_i + 1)^2 \cdots (25)$$

(2) 상태 공간 디지틀 필터의 실현 구조 SSDF[ABCD]가 주어질 때 통계적 감도 최소 상태 공간 디지틀 필터 SSDF[$T^{-1}AT$, $T^{-1}B$, CT, D]를 실현하기 위한 등가 변환 행렬 T는 식 (26)과 같이 구해진다.

$$T = T_o R D U \cdots (26)$$

T_o : $T_o^t T_o = K$

R : $R^t (T_o^t W T_o) R = Diag (\theta_1^2, \theta_2^2 \cdots \theta_n^2)$

D : $Diag (\theta_1^{-\frac{1}{2}}, \theta_2^{-\frac{1}{2}} \cdots \theta_n^{-\frac{1}{2}})$

U : 임의의 직교 행렬

Ⅲ. 시 뮬 레 이 션

설계 명세 조건, 즉 통과 대역 차단 주파수 $W_p = 0.2\pi$ [rad/sec], 저지 대역 차단 주파수 $W_S = 0.3\pi$ [rad / sec], 통과 대역 허용 오차 $\delta_1 = -0.1$ dB, 그리고 저지 대역 허용 오차 $\delta_2 = -26.71$ dB를 갖는 타원형 [Elliptic] 디지틀 필터로 근사할 때 전달 함수 및 주파수 응답 곡선은 식 (27)과 그림 3과 같다.

$$H(z) = \frac{0.05634\ (\ 1 + z^{-1})\ (1-1.0166\,z^{-1} + z^{-2}\ )}{(1-0.6830z^{-1})\ (\ 1-1.4461z^{-1} + 0.7957\,z^{-2}\ )} \cdots (27)$$

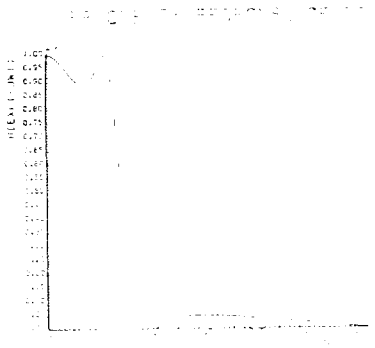

그림 3 . 타원형 디지틀 필터 주파수 특성곡선

Fig.3 Frequency characteristic curve of the elliptic digital filter

식 (27)을 표준형 (Canonical Form)으로 실현하는 경우 상태 공간 디지틀 필터의 계수 행렬은 식 (28)로 표현된다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(K) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad \cdots\cdots (28)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5434 & -1.7833 & 2.1290 & 1 \\ 0.08695 & -0.10141 & 0.11901 & 0.05634 \end{bmatrix}$$

식 (28)의 실현 구조로 부터 통계적 감도 최소 실현 구조로 등가 변환시키기 위해서 식 (26)을 만족하는 등가변환 행렬 $T = T_0RDU$를 구하면 표 1과 같다.

표 1과 같이 구해진 등가 변환 행렬 T를 이용해서 통계적 감도 최소 상태 공간 계수를 구하면 표 2와 같다.

표 1. 등가 변환 행렬 $T = T_0RDu\ (u = I)$

Table 1. Equivalent transformation matrix $T = T_0RDu\ (u = I)$

T	1.83527	6.42450	5.98437
	3.84666	5.88437	1.25925
	5.45073	3.00215	−1.49519
T_0	4.65352	2.52622	0.24100
	5.28346	0.0000018	−0.42453
	4.65352	−2.52622	0.24100
R	0.67729	0.71785	0.16107
	−0.63656	0.462045	0.61749
	0.36884	0.52007	0.769907
D	1.12413	0	0
	0	1.46601	0
	0	0	2.39808

표 2. 최소 통계적 감도를 위한 상태 공간 계수

Table 2. State-Space Coefficient for minimum Statistical Sensitivity

$T^{-1}AT$	0.83023	-0.39035	- 0.03053
	0.39013	0.68720	- 0.36503
	−0.03066	0.36525	0.61166
$T^{-1}B$	0.41811		
	−0.31922		
	0.21447		
CT	0.41823	0.31923	0.21473
D	0.05634		

표준형 상태 공간 디지틀 필터와 같이 합성된 통계적 감도 최소 상태 공간 디지틀 필터의 가제어성 Gramian과 가관측성 Gramian을 구하여 식 (11)로 정의된 통계적 감도를 구하면 표 3과 같다.

표 3. 실현 구조의 통계적 감도

Table 3. Statistical Sensitivity of realization Structure.

구분 / 실현구조	K			W			S
표 준 형	28.09	24.48	15.33	0.06	-0.13	0.10	
	24.48	28.09	24.48	-0.139	0.31	-0.23	134.412
	15.33	24.48	28.09	0.10	-0.23	0.19	
통계적감도 최 소 형	0.79	0	0	0.79	0	0	
	0	0.46	0	0	0.46	0	5.72
	0	0	0.17	0	0	0.17	

그리고, 그림 4처럼 입력 $u(k)$로써 평균0, 분산1인 정규 난수를 발생하여 상태 공간 계수의 양자화에 기인한 출력 오차 분산 $E[\Delta y_c^2(k)]$를 구하면 표4와 같다.

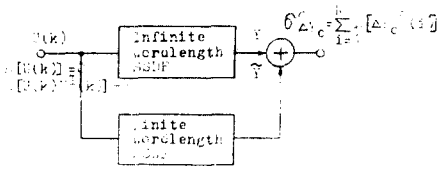

그림 4. 계수 양자화에 기인한 출력 오차 분산 시뮬레이션 블럭선도

Fig 4. Block diagram for the output error variance simulation due to the coefficient quantization.

표 4. 상태공간계수 양자화에 기인한 출력 오차 분산

Table 4. Output error variance due to state-space coefficient quantization.

실현구조 / 양자화 비트	표 준 형	통계적감도 최소형
4	0.44×10^{-1}	0.20×10^{-1}
6	0.39×10^{-2}	0.16×10^{-2}
8	0.12×10^{-3}	0.12×10^{-3}
10	0.44×10^{-5}	0.33×10^{-5}
12	0.38×10^{-6}	0.55×10^{-6}
14	0.12×10^{-6}	0.10×10^{-7}
16	0.24×10^{-7}	0.15×10^{-8}

또한, 상태 공간 계수를 4-8 Bit까지 양자화했을 때 표준형 및 통계적 감도 최소 실현 구조의 주파수 응답 특성 곡선은 그림 5와 같다.

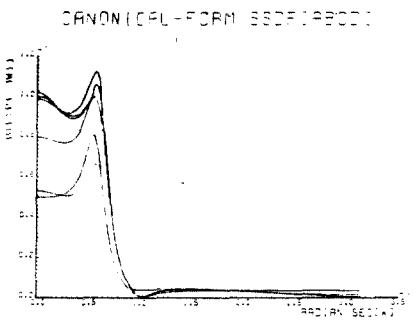

그림 5. 실현 구조의 주파수 응답 곡선

Fig.5. Frequency response curve of the realization structure.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 상태 공간 계수[ABCD]의 미소 변동에 기인한 출력 오차의 분산 $\sigma^2\Delta y_c = E[\Delta y_c^2]$을 Δ[ABCD]의 분산 σ_Δ^2으로 정규화한 것 즉 $S = E[\Delta y_c^2]/\sigma_\Delta^2$을 통계적 감도로 정의하고 시스템 구조의 성질을 나타내는 가제어성 Gramian, 가관측성 Gramian, 그리고 2차 모드 해석 방법을 상태 공간 디지털 필터에 확장해서 최소 통계적 감도를 갖는 실현 구조를 합성하였으며 시뮬레이션을 통해서 통계적 감도 최소 구조 합성의 유효성을 확인하였다.

참 고 문 헌

1. S.Y. Hwang "Roundoff Noise in State-space Digital Filter: A general Analysis" IEEE Trans Vol. Assp-24 No.3 p.256 June 1976.
2. W.L. Mills, C.T.Mullis, and R.A. Roberts "Digital Filter Realization without Overflow Oscillation" IEEE Trans Vol. Assp-26. No.4 p.334 Aug.1978.
3. 川又, 樋口, "Synthesis of State-Space Digital Filter without limit cycle" 일본통신학회 Vol.63-A No.12 p.870 1980.
4. B.C. Moore "Principal Component Analysis in Linear System: Controllability, Observability and Model Reduction" IEEE Trans Vol.As-26 No.1 pp.17-32. Jan. 1981.
5. A Tettweis "Wave Digital Filter Theory and Practice" Proc IEEE Vol.74 No.2 pp.270 ~ 278 Feb. 1986.

6. W.S. Lu and Antoniou "Synthesis of 2-D State -Space Digital Filter Structure with Minimum Roundoff Noise" IEEE Trans Vol. CAS-33 No.10 pp.965-973 Oct. 1986.
7. M. Kawamata and T.Higuchi" 상태 공간 디지틀 필터의 유한어장 실현 문제" 계측과 제어 Vol.22 No.12 pp.991 ~ 1004 Dec. 1983.
8. A.V. Oppenheim and R.W. Shafer Digital Signal Processing Practice Hall 1975.
9. R.A. Robert and C.T. Mullis Digital Signal Processing Addison Wesley 1987.
10. 木村 디지틀 신호 처리와 제어 昭晃堂 1982.
11. 樋口 "디지틀 신호 처리와 선형시스템 이론" 계측과 제어 Vol.24 No.7 pp.653 ~ 654. 1985.