

## 흙의 소성구성식 : 한계면(Bounding Surface) 이론

### 1. 서론

흙은 공학적 성질을 규명하기에 난이한 재료이다. 흙은 대체로 여러 고체입자들로부터 구성되어 있으며 그 입자들 사이의 공간들은 유체, 공기나 가스로 채워져 있다. 이러한 이유로 흙은 비균질성, 비등방성 그리고 응력상태에 의존하는 다양한 재료의 성질을 나타내게 된다. 즉 비선형 응력-변형 반응, 전단파괴에 따른 체적변화, 시간 함수적 성질 등의 특징들이 그것이다.

일반적으로 토질공학적 문제들을 해석하는데에 사용되었던 이론들을 분류해 보면 크게 두가지로 나눌 수 있다. 첫째로 선형탄성(linear elastic) 해석으로 매우 적은 변형을 가정할 경우 적용이 되었고 둘째로 강소성(rigid plastic) 해석 즉 파괴에 의한 매우 큰 변형을 가정할 경우 한계평형(limit equilibrium) 가정에 의한 안정 문제 해석에 적용이 되었다. 이러한 이상적 가정에 의한 이론들로부터 많은 토질공학적 문제들을 해결하는 데에는 도움이 되었지만 흙 구조물의 실제 발생응력 범위(working stress range)에서 정확한 거동해석 결과를 구하기에는 부적합한 것이 사실이었다.

지난 이삼십년 동안 다양한 흙의 성질을 정량적으로 실제와 근사하게 규명하기 위하여 많은 수치모델 구성식들이 개발되어왔다. 그러나 대부분의 구성식 이론들이 특정한 하중조건이나 토질조건들을 대상으로 개발되었기 때문에 한가지 구성식 모델로 다양한 흙의 성질을 골고루 만족시킨다는 것은 매우 어려운 일이다. 따라서 수치구성식 모델을 흙의 거동해석문제에 적용할 경우 그 이론의 특징과 장.단점을 이해하는것은 매우 중요한 일이라 하겠다. 본 논문에서는 Dafalias(1975)와 Dafalias와 Popov(1974, 1975)에 의하여 개발된 한계면(Bounding Surface) 소성이론에 관하여 언급하고자 한다.

## 2. 소성구성식의 기본개념

고전적 소성이론의 근본적 전제조건은 탄성반응과 소성반응을 구별하는 항복응력  $\sigma_y$  를 정의한다는 것이다. 그 소성반응은 이상적 소성(perfectly plastic) 모델이나 변형-경화(strain-hardening) 모델로 나타낼 수 있다. 첫번째의 경우 발생응력이 항복응력  $\sigma_y$  에 도달하게 되면 재료는 무제한의 소성변형을 경험하게 된다. 그러나 두번째의 경우에는 재료가 항복응력을 경험한 다음 소성변형을 계속 발생시키기 위해서는 그에 따른 응력의 증분량을 요구한다. 소성반응은 선형, 비선형 관계로 수식모델화 할 수 있으며 소성 수치 모델의 3가지 기본요건은 다음과 같다.

### 1) 항복기준(yield criterion)

항복기준은 소성흐름(plastic flow)이 발생하는 응력조건을 정의한다. 항복기준  $F$ 는 1차원 항복응력 개념을 3차원으로 일반화 한 형태이다.  $F$ 는 임의의 응력과 표계에서 폐합볼록면(closed convex surface)을 정의하며 응력, 변형률 그리고 소성내적변수(plastic internal variable)의 함수로 구성된다. 일반적으로  $F$ 는 탄성반응을 경험할 때에는  $F < 0$  그리고 소성반응은  $F = 0$ 일 때 경험하게 된다.

### 2) 소성 흐름 법칙(flow rule)

소성 흐름 법칙은 응력  $\sigma_{ij}$  의 증분과 소성변형률  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  의 증분을 관계식으로 나타내며 이에따라 소성 변형률 증분벡터의 방향을 결정짓는다. 고전적 소성이론에서는 연합소성흐름법칙(associated flow rule)을 전제로 항복면(yield surface)과 소성 포텐셜(plastic potential)면을 동일하게 사용하고 있다. 즉 재료가 소성 상태에 도달할 경우 소성변형률의 미증분(differential increment)은 항복기준면(yield surface)의 단위연직벡터에 비례한다고 가정한다. 즉

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{----- (1)}$$

여기에서  $\lambda$ 는 비례인자로 스칼라 양이며 변수 위의 점은 미증분을 의미한다. 대부분의 흙의 소성구성식들이 연합소성흐름법칙을 수용하고 있지만 항복면과 소성포텐셜이 일치한다는 가정을 무시한 비연합 소성흐름법칙(non-associated flow

rule)도 일부의 이론에서는 적용이 되어있다 (Zienkiewicz et al., 1975).

### 3) 경화법칙 (Hardening Rule)

경화법칙은 응력과 변형의 과거상태가 항복면의 형상, 크기 그리고 위치에 미치는 영향을 정의하도록 구성되어야 하며 두가지로 구분이 된다. 첫째로 등방성 경화 (isotropic hardening)는 항복면이 초기상태의 위치와 형상을 계속 유지하는 반면에 크기의 증가만을 허용한다. 둘째의 이동성 경화 (Kinematic hardening)에서는 항복면이 응력좌표계에서 그 위치를 옮길 수 있으나 그 형상과 크기는 바뀌지 않는다.

### 3. 한계면 (Bounding Surface) 소성구성식의 구조

일반적으로 탄,소성이론 구성식에서 재료의 거동상태는 발생응력과 과거의 응력변화 상태를 설명하는 소성 내적변수 (plastic internal variable)로 정의된다. 포화상태의 흙의 전응력은 유효응력과 공극수압의 합으로 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} P \quad \text{----- (2)}$$

여기에서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta, P는 공극수압 이다.

또한 전체 변형증분을 탄성변형과 소성변형의 부분으로 나누면 그 미증분의 관계 식은 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad \text{----- (3)}$$

여기에서 변수위의 점은 미증분을 나타내며 e와 p는 각각 탄성과 소성 상태를 의미한다.

탄성 변형 미증분 구성식은 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = C_{ijkl} \dot{\sigma}'_{kl}, \quad \dot{\sigma}'_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e \quad \text{----- (4)}$$

$$E_{ijkl} C_{klpq} = (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) / 2.$$

소성변형 관계는 소성변형의 방향과 소성계수를 포함하여 하중함수 L의 식으로 다음과 같이 나타내 진다.

$$L = \frac{1}{K_p} L_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} \quad \text{----- (5)}$$

여기에서  $L$ 은 하중합수,  $L_{ij}$ 는 소성하중의 방향, 그리고  $K_p$ 는 소성계수를 의미한다.  $L > 0$ ,  $L < 0$ , 그리고  $L = 0$ 는 소성하중 재하, 역재하, 중립 재하상태를 각각 나타낸다. 그리고  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 를 하나의  $q_n$  변수로 포함하고  $q_n$ 과  $\dot{\sigma}_{ij}^*$ 와 선형관계를 가정하면서 다음과 같은 구성식이 성립된다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \langle L \rangle R_{ij} \quad \text{----- (6)}$$

$$q_n = \langle L \rangle r_n \quad \text{----- (7)}$$

여기에서  $\langle \rangle$ 는 McCauley 괄호이며  $R_{ij}$ 와  $r_n$ 은 응력상태를 나타내는 함수이다.  $R_{ij}$ 는 통상적으로 소성포텐셜의 변화도( $\partial 0 / \partial \alpha_{ij}$ )를 의미한다. 고전 소성이론에서는  $L_{ij}$ 는 항복면(yield surface) ( $F=0$ )의 변화도( $L_{ij} = \partial F / \partial \alpha_{ij}$ )로 정의하며  $K_p$ 는 항구성 조건(consistency condition) ( $\dot{F}=0$ )의 조건으로 부터 구해진다.

식 (3), (4), (5), (6), (7)로 부터

$$L = \frac{L_{kl} E_{klmn}}{K_p + E_{abcd} L_{ab} R_{cd}} \dot{\epsilon}_{mn} \quad \text{----- (8)}$$

$$\dot{\sigma}_{kl} = E_{kkij} [ \dot{\epsilon}_{ij} - \langle L \rangle R_{ij} ] \quad \text{----- (9)}$$

비배수 조건이나 유체와 고체의 비압축성 상태를 만족시키기 위해서는  $\dot{\epsilon}_{kk} = 0$ 을 만족시켜야 한다. 따라서 식 (3), (4), (6)으로 부터 다음식이 구해진다.

$$\dot{\epsilon}_{kk} = \dot{\epsilon}_{kk}^e + \dot{\epsilon}_{kk}^p = [ C_{kkij} + (1/K_p) L_{ij} R_{kk} ] \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad \text{----- (10)}$$

여기에서  $L \leq 0$ 인 경우는  $\dot{\epsilon}_{kk}^p = 0$ .

또한 식 (2), (5), (8), (10)에 의하여 다음과 같은 식이 유도된다.

$$L = \frac{C_{aabb} L_{ij} - L_{qq} C_{kkij}}{K_p C_{rrss} + R_{mn} L_{nn}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{L_{kl} E_{klmn}}{K_p + E_{abcd} L_{ab} R_{cd}} \dot{\epsilon}_{mn} \quad \text{----- (11)}$$

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{1}{C_{aabb}} [ R_{kk} \langle L \rangle + C_{kkij} \dot{S}_{ij} ] + 1/3 \dot{\sigma}_{mm} \\ &= 1/3 E_{kkij} [ R_{ij} \langle L \rangle - \dot{\epsilon}_{ij} ] + 1/3 \dot{\sigma}_{mm} \quad \text{----- (12)} \end{aligned}$$

윗 식에서  $S_{ij}$ 와  $e_{ij}$ 는 차등 응력, 차등 변형률을 의미한다.

한계면(Bounding Surface) 구성식의 주목할만한 특징은 소성 구성식의 핵심변수인  $L_{ij}$ 와  $K_p$ 를 정의하는데에 독특한 점이 있다는 것이다. 즉 한계면 안에서의 응력조건

에서 소성변형이 발생할 수 있고 소성계수를 여러가지 형태로 변환할 수 있는 기능이 있다는 점이다. 과거의 하중 경험상태는  $q_n$ 을 통하여 표현되며 임의의 응력좌표계에서 한계면을 정의한다 (그림 1). 따라서 한계면은 수식으로 다음과 같이 표현된다.

$$F(\bar{\sigma}'_{ij}, q_n) = 0 \quad \text{----- (13)}$$

위의 식에서 가로줄은 한계면 ( $F=0$ ) 상에서의 응력상태를 의미한다. 실제 발생응력  $\sigma'_{ij}$ 는 항상 한계면 내부에나 위에 존재하게 되어 있는데 정의된 투영법칙 (mapping rule)에 의하여 ( $F=0$ )면 상에서의 유일한 투영응력  $\bar{\sigma}'_{ij}$ 와 일대일 대응이 된다. 투영원점은 항상 한계면 내에 위치하게 되어있는데 투영원점과 발생응력  $\sigma'_{ij}$ 를 연결한 직선과 ( $F=0$ )면과의 교차지점응력을  $\bar{\sigma}'_{ij}$ 로 정의한다 (그림 1). 즉

$$\bar{\sigma}'_{ij} = \beta(\sigma'_{kl}, q_n) \sigma'_{ij} \quad \text{----- (14)}$$

여기에서  $\beta$ 는  $F(\beta \sigma'_{ij}, q_n) = 0$ 의 관계식으로 부터 구해진다.

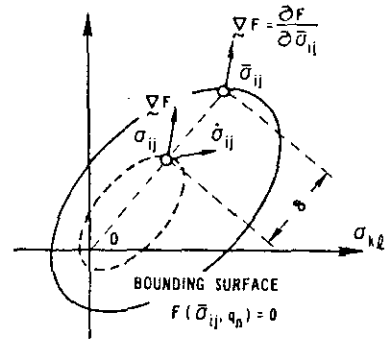


그림 1 한계면(Bounding Surface)의 개략도

발생응력  $\sigma'_{ij}$ 에서의 소성하중 (plastic loading)의 방향  $L_{ij}$ 를 투영응력지점  $\bar{\sigma}'_{ij}$ 에서의  $F$ 의 변화도로 정의한다. 즉

$$L_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}'_{ij}} \quad \text{----- (15)}$$

소성변형을 일으키는 어떠한 응력증분  $\dot{\sigma}'_{ij}$ 의 경우 그에 대응하는 투영응력증분  $\dot{\bar{\sigma}}'_{ij}$ 는  $q_n$ 의 구성식으로 표시되며 ( $F=0$ )면의 경화진행에 따라 발생되도록 되어있다. 따라서 한계면의 이론은 다음의 3가지 구성식으로 대표할 수 있다.

- 1) 하중함수  $L$  (식 5)은  $L_{ij}$ 의 항 (식 15)와 두 응력증분  $\dot{\sigma}'_{ij}$ ,  $\dot{\bar{\sigma}}'_{ij}$  그리고 두 소성계수  $K_p$ ,  $\bar{K}_p$ 의 항으로 정의될 수 있다 ( $K_p$ 는  $\sigma'_{ij}$ 의 소성계수이며  $\bar{K}_p$ 는 대응하는 한계면 지점  $\bar{\sigma}'_{ij}$ 에서의 소성계수를 의미한다). 즉

$$L = \frac{1}{K_p} \frac{\partial F}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\sigma}'_{ij} = \frac{1}{\bar{K}_p} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}'_{ij}} \dot{\bar{\sigma}}'_{ij} \quad \text{----- (16)}$$

2) 한계면 상에서의 소성계수  $\bar{K}_p$ 는 항구성조건 (consistency condition) ( $\dot{F}=0$ )로부터 구해진다. 식 (7)과 (13) 그리고 식(16)의 두번째 식으로부터 다음식을 구한다.

$$\bar{K}_p = - \frac{\partial F}{\partial q_n} r_n \quad \text{----- (17)}$$

3) 응력상태에 좌우되는  $K_p$  와  $\bar{K}_p$  의 관계를 두 응력지점과의 거리  $\delta$ 의 함수  $\hat{K}_p$ 로 표현할 수 있다. 즉

$$K_p = \hat{K}_p(\bar{K}_p, \delta, \sigma'_{ij}, q_n) \quad \text{----- (18)}$$

여기에서  $\delta > 0$  (실제 응력지점이 한계면 내에 존재)인 경우  $K_p > \bar{K}_p$  그리고  $\delta = 0$  (실제 응력지점이 한계면 위에 존재)인 경우  $K_p = \bar{K}_p$ 가 된다. 식(18)은 한계면 이론의 개념을 구체화하고 있다. 또한 식(18)은 한계면 안에 존재하는 응력상태에서 소성변형을 경험할 수 있도록  $\delta$  (실제 응력지점과 투영응력지점까지의 거리)에 의하여 그 변형률이 결정되도록 한다. 실제 응력지점이 한계면에 가까울 수록  $K_p$ 는  $\bar{K}_p$ 에 가까워지며 그 값이 감소하는 반면 소성변형률은 커지게 된다. 발생응력  $\sigma'_{ij}$ 는 소성변형을 경험하면서 궁극적으로 한계면에 도달하게 된다 (식 16). 하중이 계속 가해지면 발생 응력위치는 ( $F=0$ ) 위에 머물게 되고 하중을 제거할 경우 ( $F=0$ )면으로부터 이탈되어 한계면 내부로 향하게 된다.

$L_{ij}$  와  $L$ 을 정의함으로써 임의의 응력지점  $\sigma'_{ij}$ 에서 투영원점을 기준하여 한계면과 유사한 또다른 한 면을 그림1에서 점선으로 표시한 바와 같이 정의할 수 있게 된다. 이 면은 탄성경계면과 흡사하지만 항복면 (yield surface)과는 다르다. 왜냐하면 응력경로가 그 면 안으로 움직일 때 처음에는 탄성변형을 경험하지만 이 면을 다시 만나기 전에 소성변형을 경험하기 때문이다.

또 한가지 주목할 만한 사실은 고전적 항복면(yield surface) 구성식과의 관계인데  $\delta > 0$  일때에 식(18)로부터  $K_p = \bar{K}_p = \infty$ 가 될수 있으며 또한 ( $\delta=0$ )인 경우

$K_p = \hat{K}_p = \bar{K}_p$ 가 될 수 있다. 후자의 경우 한계면(bounding surface)은 통상적 개념의 항복면(yield surface)과 동일한 기능을 가지게 된다. 이 사실을 역으로 생각해 보면 더욱 중요한 결론을 유추할 수 있다. 즉 기존의 항복면을 한계면으로 정의하고 위에서 언급한 식 (16), (17), (18)을 수용한 다음 그에 맞는 합당한 투영법칙(mapping rule)을 적용시키면 과거의 항복면 소성구성식으로 부터 새로운 한계면 소성구성식으로 변환이 가능하다 하겠다.

#### 4. 흙의 한계면(Bounding Surface) 구성식

사실상 앞에서 언급된 이론은 비배수 조건에서의 유효응력 개념을 제외하고는 다른 재료에도 적용이 가능하다. 본 절에서는 이제까지의 일반적인 내용으로부터 등방성 흙을 대상으로 개발된 한계면 구성식 구조에 관하여 언급하고자 한다. 소성 변형에 의하여 등방성 탄성반응이 간섭을 받지 않는 것으로 가정하면 탄성계수들은 다음과 같이 표시된다.

$$G_{ijkl} = \frac{2G-3K}{18KG} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{4G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \text{----- (19)}$$

$$E_{ijkl} = (K-2/3G) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \text{----- (20)}$$

여기에서 K는 체적계수 (bulk modulus), G는 전단계수 (shear modulus)를 의미하며  $q_n$ 의 값에 비종속적인 반면 등방성 응력 합성변수에 의하여 좌우된다. 식 (4)는 이제 다음과 같이 서술될 수 있다.

$$\dot{\sigma}'_{kk} = 3K \dot{\epsilon}'_{ij} \quad \dot{S}_{ij} = 2G \dot{e}'_{ij} \quad \text{----- (21)}$$

응력좌표계 내의 응력상태는 첫째 유효 응력합성변수 I 와 둘째 차등 응력 합성변수 제곱근 J 로 정의한다.

$$I' = \text{tr } \sigma'_{ij} = \sigma'_{ii}, \quad \sqrt{J} = [ \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} ]^{1/2} \quad \text{----- (22)}$$

또한 본 구성식에서는 한계면이 I'축을 따라 등방성 경화 (isotropic hardening)와 이동성 경화 (Kinematic hardening)를 경험하는 것으로 가정하였고 하나의 스칼라양  $q_n$ 에 의하여 경화법칙이 정의된다.

$$\dot{e} = - (1+e_0) \dot{e}_{kk} = - (1+e_0) \dot{e}_{kk}^e - (1+e_0) \dot{e}_{kk}^p = \dot{e}^e + \dot{e}^p \quad \text{----- (23)}$$

여기에서  $e$ 는 현재의 총공극비,  $e_0$ 는 초기상태의 공극비이다.

윗 식으로 부터  $\dot{e}^p$ 를  $q_n$ 으로 선정하였다. 이리하여 식 (13)은 다음과 같이 표현된다.

$$F(\bar{I}', \sqrt{\bar{J}}, e^p) = 0 \quad \text{----- (24)}$$

윗 식에서 가로금은 앞에서와 마찬가지로 ( $F=0$ )면에서의 응력 합성변수를 의미한다.

식 (15), (16), (21), (24)로 부터 연합 소성흐름법칙 (associated flow rule) 즉  $L_{ij} = R_{ij}$  를 적용하면 다음과 같은 구성식을 얻는다.

$$L_{ij} = R_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \bar{I}'} \delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{J}}} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{\bar{J}}} S_{ij} \quad \text{----- (25)}$$

$$L = \frac{1}{K_p} \left[ \frac{\partial F}{\partial \bar{I}'} \dot{\bar{I}}' + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{\bar{J}}} \dot{\sqrt{\bar{J}}} \right] = \frac{1}{\bar{K}_p} \left[ \frac{\partial F}{\partial \bar{I}'} \dot{\bar{I}}' + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{\bar{J}}} \dot{\sqrt{\bar{J}}} \right] \quad \text{----- (26)}$$

앞에서와 마찬가지로  $(\bar{S}_{ij}/\sqrt{\bar{J}}) = (S_{ij}/\sqrt{J})$ 는  $\bar{\sigma}_{ij}$ 와  $\sigma_{ij}$ 의 관계를 정의하는 투영법칙으로 부터 성립이 된다. 위의 식 (26)과 식 (6), (25)로 부터 소성 변형률 증분을 구하게 된다. 비연합 소성흐름법칙(non-associated flow rule)을 적용할 경우는  $R_{ij}$ 를 다른 방법으로 정의하면 가능하다.

이제 식 (7)과 (23)에 의하여 다음과 같은 구성식이 성립된다.

$$\dot{e}^p = r \langle L \rangle = -(1+e_0) \dot{e}_{kk}^p = -(1+e_0) R_{kk} \langle L \rangle \quad \text{----- (27)}$$

식 (25)로 부터  $R_{ij}$ 를 구하게 되면 식 (17)은 다음과 같이 변환된다.

$$\bar{K}_p = 3(1+e_0) \frac{\partial F}{\partial e^p} \frac{\partial F}{\partial \bar{I}'} \quad \text{----- (28)}$$

식 (28)을 관찰해 보면  $\partial F/\partial e^p > 0$ 인 경우 한계면 소성계수  $\bar{K}_p$ 는  $\partial F/\partial \bar{I}'$ 의 값에 따라 0보다 크거나, 작거나 혹은 0과 같은 값을 갖게 된다. 이로부터 흙의 물리적 반응성질과 관련 시켜보면  $\bar{K}_p > 0$  경우는 한계면이 팽창하게 되어 흙은 압축변형을 경험하게 되며  $\bar{K}_p < 0$  경우는 한계면이 수축함에 따라 흙은 체적팽창 (dilation)을 경험하게 된다. 또한  $\bar{K}_p = 0$ 인 경우는 한계면의 크기에 변화가 없으면서 흙은 무제한의 전단 소성흐름을 경험하게 된다.

( $F=0$ )면 상에서의  $\bar{K}_p$ 의 값은 식(18)에 표시된 바와 같이 실제 응력 상태에서의



소성계수  $K_p$ 의 값에 반영이 되는데 구체적으로 다음 식으로 표시될 수 있다.

$$\bar{K}_p = K_p + H(\bar{I}', \sqrt{J}, e^p) \frac{\delta}{\delta_0 - \delta} \quad \text{----- (29)}$$

여기에서 H는 한계면 형상경화함수 (Shape hardening function),  $\delta$ 는 응력좌표계에서의 실제응력지점과 투영응력지점까지의 거리,  $\delta_0$ 는  $\delta_0 - \delta \geq 0$ 이 되도록 정의된 임의의 기준 응력거리(투영원점에서 부터 한계면 까지의 거리)를 나타낸다. H를 정확하게 정의하기 위해서는 일반적으로 삼축실험을 통하여 구한 흙의 응력-변형 반응결과를 여러차례의 보정작업을 거쳐 결정된 구성식 매개변수들의 값들이 필요하다. 식(29)를 관찰해 보면 H가 무한대로 접근할 때  $K_p$  값이 무한에 접근하고 ( $\delta=0$ )인 경우는 한계면(Bounding Surface)과 항복면(yield surface)은 동일한 기능을 갖게 된다. 또한  $\bar{K}_p$ 와  $K_p$ 의 값을 조절함에 따라 흙의 변형-경화 혹은 연화 반응을 표현할 수 있는 융통성이 가능한 것을 보여준다.

식 (19), (20), (25) 그리고 식 (8)과 (9)의 역관계를 이용하여 다음의 식을 얻는다.

$$L = \frac{3K(\partial F/\partial \bar{I}') \dot{\epsilon}_{kk} + (G/\sqrt{J})(\partial F/\partial \sqrt{J}) S_{pq} \dot{\epsilon}_{pq}}{K_p + 9K(\partial F/\partial \bar{I}')^2 + G(\partial F/\partial \sqrt{J})^2} \quad \text{----- (30)}$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = 2G \dot{\epsilon}_{ij} + (K-2/3G) \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - \langle L \rangle \left[ 3K \frac{\partial F}{\partial \bar{I}'} \delta_{ij} + \frac{G}{\sqrt{J}} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J}} S_{ij} \right] \quad \text{---- (31)}$$

유사한 방법으로 비배수 조건인 경우 식 (11)과 (12)는 다음과 같이 변환된다.

$$L = \frac{(\partial F/\partial \sqrt{J}) \dot{\sqrt{J}}}{K_p + 9K(\partial F/\partial \bar{I}')^2} = \frac{(G/\sqrt{J})(\partial F/\partial \sqrt{J}) S_{rs} e_{rs}}{K_p + 9K(\partial F/\partial \bar{I}')^2 + G(\partial F/\partial \sqrt{J})^2} \quad \text{----- (32)}$$

$$\dot{p} = 3K \frac{\partial F}{\partial \bar{I}'} \langle L \rangle + 1/3 \dot{I} \quad \text{----- (33)}$$

또한 식(10)으로 부터 비배수 조건시의 응력경로를 설명하는 다음과 같은 미분방정식을 얻는다.

$$\dot{\sqrt{J}}/\dot{I}' = - \left[ \frac{\partial F/\partial \bar{I}'}{\partial F/\partial \sqrt{J}} + \frac{K_p}{9K(\partial F/\partial \bar{I}')(\partial F/\partial \sqrt{J})} \right] \quad \text{----- (34)}$$

7가지의 함수  $\sigma'_{ij}$  와  $e^p$ 로 구성되어 표현되는 재료의 상태는 식 (14)를 통하여 투영응력  $\bar{\sigma}'_{ij}$ 를 구한 다음 위의 구성식들의 절차를 거쳐 응력증분에 해당하는 흙의 소성변형 혹은 흙의 변형에 의한 응력증분을 구할 수 있게 된다.

## 5. 구성식 매개변수

한계면(Bounding Surface) 수치 구성식은 19개의 매개변수로 이루어져 있다. 즉 흙의 초기상태를 표현하는 매개변수가 2개, 탄성계수와 일반적 소성이론식에서 사용하는 토질정수를 포함하여 5개, 그리고 12개의 모델 매개변수들로 구성되어 있다.

첫째로 초기상태 매개변수들을 흙의 초기 공극비  $e_0$ 와 최대 과압밀 유효응력  $P'_p$ 로 이루어 진다. 둘째의 매개변수들은 탄성전단계수  $G$  (혹은 포아슨비  $\nu$ )와 등방성 압밀 기울기  $\lambda, k$  그리고 압축과 인장 응력 상태의 극한 한계면 (critical state line)의 기울기  $M_c$  와  $M_e$ 로 구성된다. 셋째로는 한계면 모델 매개변수들로 한계면 형상 매개변수  $R_c, R_e, A_c, A_e, T$  등이 있고 투영원점 매개변수  $C$ , 탄성 영역 경계면 상수  $S$ , 경화 매개변수  $h_c, h_e, m_c, m_e$  그리고 과도응력 (transitional stress)  $P_l$  등으로 이루어져 있다. 위에서 첨자로 표시된  $c$ 와  $e$ 는 각각 압축과 인장 응력상태를 의미한다. 이상의 매개변수들의 물리적 의미와 삼축 실험결과로부터 보정작업을 통하여 매개변수의 적당한 값을 결정하는 절차에 관하여는 본 논문에서 다루지지 않았으나 관련문헌 (Dafalias et al., 1980)과 (Sohn, 1988) 등에 상세히 기술되어 있다.

## 6. 결론

한계면(Bounding Surface) 소성구성식의 특징은 발생응력상태가 한계면내에 위치할 때 탄성변형과 소성변형을 동시에 발생 가능케 하고 소성계수를 정의하여 융통성 있는 방법으로 소성변형을 계산하게 한다. 소성계수의 값은 응력합성변수 좌표계에서 실제 응력지점과 한계면 투영응력지점까지의 거리에 의하여 조절되도록 고안 되어 있으며 이점은 과거의 항복면 소성구성식으로부터 발전된 핵심적 개념이다. 또한 한계면

모델은 흙의 과거응력상태, 배수 및 비배수 조건을 고려하여 비교적 실제의 응력-변형 반응을 정확하게 묘사하도록 구성이 되어 있으며 특히 진동문제 해석에 있어서는 타 구성식 모델과 달리 탁월한 기능을 가지고 있다.

한편 한계면 모델의 단점으로는 구성식이 다소 많은 매개변수를 필요로 한다는 점을 들 수 있다. 일반 토목기술자가 실문제 해석에 적용하려면 이론의 깊은 이해와 실험결과로부터의 매개변수 보정작업에서 상당한 숙련도가 요구되기 때문에 실질적으로 어려운 점이 없지 않다. 이러한 면에서 앞으로의 연구방향은 우수한 기능을 수용한 흙의 구성식 모델을 현실문제에 용이하게 적용할 수 있도록 매개변수의 간략화와 일관성있는 매개변수 보정절차를 수립하는 데에 개발역점을 두어야 할 것이다.

## 7. 참고문헌

1. Dafalias, Y.F., "On Cyclic and Anisotropic Plasticity: i) A General Model Including Material Behavior under Stress Reversals, ii) Anisotropic Hardening for Initially Orthotropic Materials", thesis presented to the University of California at Berkeley, Ca, in 1975, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
2. Dafalias, Y.F., and Popov, E.P., "A Model of Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loadings", Proceedings of the 7th U.S. National Congress of Applied Mechanics, Boulder, USA, 1974, p. 149(Abstract and Acta Mechanica, Vol.21, 1975, pp.173-192.
3. Dafalias, Y.F., and Popov, E.P., "Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity", Journal of Applied Mechanics, Vol.98, No.4., 1976, pp.645-650.
4. Dafalias, Y.F., and Herrmann, L.R., "A Bounding Surface Soil Plasticity Model", International Symposium on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, U.K., Vol.1, 1980, pp.335-345.

5. Dafalias, Y.F., Herrmann, L.R., DeNatale, J.S., "Description of Natural Clay Behavior by a Simple Bounding Surface Plasticity Formulation," Proceedings of the Workshop on Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geotechnical Engineering, pp.711-744.
6. Sohn, Joonik, "Crack Propagation in Earth Embankment Subjected to Fault Movement," dissertation presented to the University of California at Davis in 1988, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
7. Zienkiewicz, O.C., Humpheson, C. and Lewis, R.W., "Associated and Non-associated Viscoplasticity and Plasticity in Soil Mechanics," Geotechnique, V.25, No.4, 1975, pp.671-689.
8. 손준익, "소성구성식을 이용한 흙의 변형-연화(Strain-Softening) 모델 해석," 대한토목학회 학술발표회 논문집, 1988.10월.