COHERENT STATE 와 SQUEEZED STATE

윤 선현, 이 재형, 장 준성
서울대학교 자연과학대학 물리학과

초 록

불확정성관계에 있는 두 변량이 불확정성 원리를 만족하며 각 변량의 uncertainty 를 최소로 만든것 중의 하나인 Coherent state 와 두 변량의 uncertainty 의 곱은 coherent state 와 같은 채로 한 변량의 uncertainty 를 크게하여 다른 변량의 uncertainty 를 작게 만드는 squeezed state 에 대한 이론적 고찰을 했고, 이 squeezed state 는 양자역학적 noise 보다 적은 noise 를 갖는 파속을 만들때 사용됨을 알 수 있었다.

서 론

양자역학계에서는 불확정성의 원리에의해 측정의 본질적 한계가 존재한다. 이는 특정 실험에서 실험기구가 완전하여 이에의한 noise를 전부 없애도 측정계의 본질적 한계에 의한 noise가 존재함을 의미한다. 그러나 요즈음은 uncertainty relation을 만족하는 두 변량중 한 변량에 대한 uncertainty 를 줄이는 방법을 통해 noise을 줄이는데 성공하고 있다. 이 글에서는 최소 불확정성의 관계를 만족하는 Coherent State와 이로부터 최소 불확정성을 만족 시키면서 한 변량의 uncertainty 를 크게하여 다른 변량의 uncertainty를 줄이는 Squeezed State 발생 과 이들의 응용에 대해 알아보겠다.

본 론

1. Coherent State 와 Squeezed State

최소 불확정성 관계를 만족시키는 파속은 Coherent State와 Unitary equvalent함이 알려져 있다[1,2].그러므로 최소 불확정성 관계를 만족하는 Squeezed State는 Coherent State의 Unitary transformation에 의해 얻어질 수 있다. 그런데 Coherent State는 Distructive operator 의 eigenstate 이다.

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{1}$$

여기서 α 는 complex amplitude $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$ 로 쓸 수 있다. 이를 다시 number state ($n = a^\dagger a$)로 쓰면

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \tag{2}$$

와 같다. 그러면

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta \right) \tag{3}$$

가 되어 결국

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp\left(- |\alpha - \beta|^2 \right) \tag{4}$$

이 된다. 또 $|\alpha\rangle$ 에서 n 개의 광자가 발견될 확율은

$$|\langle n \mid \alpha \rangle| = \exp(-|\alpha|^2)\,|\alpha|^{2n} / n! \qquad (5)$$

이 되어 Poisson 확률 분포함수 임을 알 수 있다. 또

$$\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = |\alpha|^2 = \langle n\rangle \qquad (6)$$

이 된다. 이를 Displacement 연산자 $D(\alpha)$ 를 써서 나타내면

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle$$

$$D(\alpha) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp(\alpha a^+)\exp(-\alpha^* a) \qquad (7)$$

로 쓸 수 있다. 이 Displacement 연산자의 특성은

$$D^{-1}(\alpha)\,aD(\alpha) = a + \alpha,$$

$$D^{-1}(\alpha)\,a^+D(\alpha) = a^+ + \alpha^*. \qquad (8)$$

과 같다.이는 Coherent State 가 Vacuum-fluctuation noise를 포함한 Classical state 로 표현됨을 의미한다. 이 Coherent State 의 특성은

$$X = \frac{1}{2}(a + a^+), \quad Y = \frac{1}{2i}(a - a^+) \qquad (9)$$

로 나타내면

$$\langle(\Delta X)^2\rangle = \langle(\Delta Y)^2\rangle = 1/4 \qquad (10)$$

가 되어 $\langle(\Delta X)^2\rangle\langle(\Delta Y)^2\rangle = 1/16$ 이 된다. 따라서 이 state는 최소 불확정성 관계를 만족하는 state임을 알 수 있다[2,3]. 여기서 squeezing transfomation 을 하여

$$X \longrightarrow X_s = X\exp(-s)$$

$$Y \longrightarrow Y_s = Y\exp(s) \qquad (11)$$

를 하면

$$\langle(\Delta X)^2\rangle = \exp(-2s)/4$$

$$\langle(\Delta Y)^2\rangle = \exp(2s)/4 \qquad (12)$$

가 된다. 즉 s 가 증가하면 최소 불확정성 관계를 만족시키면서 Y 변량의 uncertainty 는 증가하고 X 변량의 uncertainty 가 줄어들어 X 변량의 noise 가 Coherent State 보다 줄어들게 됨을 알 수 있다. 보다 일반적인 형태로는 Unitary Squeezing Operator

$$U_z = \exp[\tfrac{1}{2}(z\,a\,a - z^* a^+ a^+)] \qquad (13)$$

를 사용한다. 여기서 $z = s*\exp(i\theta)$인데 최소 불확정성 관계는 Z가 실수 값을 갖을 때이고 그경우

$$|\Psi_{msp}\rangle = U_s\,|\alpha\rangle \tag{14}$$

로 나타낼 수 있다. 이러한 Unitary Transformation 은 실제 물리계에서는 하나의 mode 가 phase conjugate 된 다른 mode 와 섞여 새 mode b 를 생성시키는 경우에 찾아 볼 수 있다. 이 때

$$b = \mu a + \nu a^{+} \tag{15}$$

이고 , μ, ν 는 $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ 을 만족시키는 C number 이다. 여기서 처음 두 mode 간의 interaction Hamiltonian 은

$$H = \hbar\,[\,\chi^{*}(\epsilon)\,a\,a + \chi(\epsilon)\,a^{+}a^{+}\,] \tag{16}$$

이다. 여기서 degenerate parametric amplifier 인 경우 $\chi(\epsilon) = \chi^{(2)}\epsilon$, degenerate four wave mixing 인 경우 $\chi(\epsilon) = \chi^{(3)}\epsilon^2$가 되는데 ϵ 은 pump field 의 크기이고 χ 는 비선형 susceptibility 이다[4,5,6]. 따라서 초기 state는 시간이 지남에 따라

$$|\Psi\rangle_{out} = U(L)\;|\Psi\rangle_{in}$$

$$U\,(L) = \exp\,[\,(iL/2v)*(\chi^{*}a\,a + \chi\,a^{+}\,a^{+})] \tag{17}$$

이 된다. 여기서 L 은 interaction 길이이고 v는 비선형 매질내에서의 빛의 속도이다. 이경우 squeezed parameter 는 Z= iL χ / 2v 가 되는데 |z| 를 크게하기 위해서는 χ 를 키우거나 L 을 키워야 한다. 이를 위해서는 optical fibre 를 쓰거나 cavity 를 만들어 effective beam path 를 크게해야 한다[7,8,9]. 이렇게 만들어진 squeezed state 의 특성은 $|\beta\rangle_g$ 가

$$b\,|\,\beta\rangle_g = \beta\,|\,\beta\rangle_g \tag{18}$$

를 만족하는 새로 생긴 mode 라면

$$\langle\alpha|\beta\rangle_g = \exp\,[\,-\tfrac{1}{2}|\alpha|^2 - \tfrac{1}{2}|\beta|^2 - (\nu/2\mu)\alpha^{*2} + (\nu^{*}/2\mu)\beta^2 + (1/\mu)\alpha^{*}\beta + i\theta_0\,] \tag{19}$$

가 된다 (θ_0 는 실수). 여기서

$$-\nu/2\mu = C_1 + i\,C_2$$

$$\mu^{*}\beta - \nu\beta^{*} = \hat{\beta}_1 + i\,\hat{\beta}_2$$

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$$

로 쓰면 (C_1 , C_2 , $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, α_1 , α_2 , 는 실수)

$$|\langle\alpha|\beta\rangle_g|^2 = |\mu|^{-1}\,\exp\,[\,-(\,1 - 2C_1)\,(\alpha_1 - \hat{\beta}_1)^2 - (\,1 + 2C_1)(\alpha_2 - \hat{\beta}_2)^2 + 4C_2((\alpha_1 - \hat{\beta}_1)(\alpha_2 - \hat{\beta}_2)\,)] \tag{20}$$

가 되어 평균이 $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ 인 Gaussian joint 확률 밀도함수가 됨을 알 수 있다. $\mu = 1$ 인 경우 $C_1 = C_2 = 0$ 이 되어 이 밀도 함수는 coherent state 의 확률 밀도함수와 같다.또 $|\beta\rangle_g$ 에서 n 개의 광자가 발견될 확률은

$$
|\langle n|\beta\rangle_g|^2 = (n!\mu)^{-1} (|\nu/2\mu|)^n \, |H_n[\beta(2\mu\nu)^{-1/2}]|^2
$$

$$
* \, |\exp(-\tfrac{1}{2}|\beta|^2 + (\nu^*/2\mu)\beta^2)|^2 \qquad (21)
$$

이 된다. $\mu = 1$ 이고 $\nu = 0$ 인 경우 Poisson 분포함수가 되나 μ 를 변화 시킴에 따라 Poisson 분포함수보다 반치폭이 더 작은 분포함수를 얻을 수 있다. 이 경우 $n = a^{+}a$ 의 연산자에 의한 $\langle(\Delta n)\rangle$의 최소값은 $\langle n\rangle \gtrsim \nu^2 \gg 1$ 인 경우

$$
\langle (\Delta n) \rangle \simeq \langle n \rangle^{2/3}
$$

를 얻는다[10].

결 론

Gravitational wave 를 검출하거나[11] Optical Ring Gyroscope 에 의한 일반 상대성 이론의 검증 또 효과적인 Optical communication 과 Optical computing 을 위해서는 정밀도가 높은 실험장치가 요구된다. 정밀도의 한계는 Vacuum fluction에 의한 본질적 noise 때문에 제한되었으나 앞에서 살펴본 Squeezed State 에 의해 noise을 훨씬 줄일 수 있고 이를 이용한 실험들이 진행될것이 예상된다.

참고 문헌

[1] D.Stoler, Phys. Rev, D1,3217 (1970)
[2] D.Stoler, Phys. Rev,D4,1925 (1971)
[3] R.Loudon and P.L.Knight, J. mod. Opt., 34,709(1987)
[4] H.P.Yune, Phys. Rev, A13,2226 (1976)
[5] D.F. Walls,Nature, V306, 141 (1983)
[6] C.M.savage and D.F.Walls, J. Opt. Soc.Am. B,4,1514 (1987)
[7] G.J.Milburn rt al, J. Opt. Soc. Am. B,4,1476 (1987)
[8] L.A.Wu,M.Xiao, and H.J.Kimble, J.Opt.Soc.Am.B,4,1465 (1987)
[9] H.W. Maeda,P.Kumar,J.H. Shapiro, J.Opt.Soc.Am.B,4,1501 (1987)
[10] R.S. Bandurant, J.H.Shapiro , Phys. Rev. D, 30, 2548 (1984)
[11] C.M. Caves, Phys. Rev. D, 23, 1693 (1981)