유연성을 갖는 매니퓰레이터 역학방정식의 간략화

°박 화 세, 배 준 경, 남 호 법, 박 종 국

(경희 대학교 전자공학과)

THE SIMPLICATION OF DYNAMICS FOR THE FLEXIBLE BODY

°Hwa-Sea Park, Jun-Kyung Bae, Ho-Pub Nam, Chong-Kuk Park

(Department of Electronic Eng.,Graduate School of Kyung Hee Univercity)

ABSTRACT

The equations of motion for linearly elastic bodies undergoing large displacement motion are derived. This produces a set of equations which are efficient to numerically integrate. The equations for the elastic bodies are formulated and simplified to provide as much efficiency as possible in their numerical solution. A futher efficiency is obtained through the use of floating reference frame. The equation are presented in two forms for numerical integration. 1) Explicit numerical integration 2) Implicit numerical integration. In this paper, there was used the numerical integration. The implicit numerical integration is extended to solved second order equation, futher reducing the numerical effort required. The formulation given is seen to be acculate and is expected to be efficient for many types of problems.

1. 서 론

큰 변위에 지배되는 역학적인 매카니즘의 시뮬레이션은 도함수와 비선형운동에 대한 해를 포함한다. 작은 변위 운동에 지배되는 경우, 선형역학적인 모델은 유한 요소(finite element)방법을 통하여 자동적으로 형성되며 모델 분석적인 방법에 따라 풀이되어 진다. 전형적인 강체 링크로 구성된 매카니즘은 대부분 비선형 방정식에 따라 형성되어 졌으며, 역학적인 탄성구조는 수천개의 자유도를 갖는 선형 모델에 의해 표현되 진다. [4,5] 매카니즘내의 모든 구성요소가강성이라고 가정하는 것이 항상 좋은 것은 아니며, 이들 구성요소들은 실제로 유연성 구조를가지며, 때때로 유연성과 매카니즘 전체의 동작사이의 상호관계가 중요하다. 이것은 빠른 속도의 매카니즘과 충돌을 포함한 문제에서 특히 실질적인 것이며, 다른 한편으로는 유한요소방법의 가장큰 문제중의 하나는 구조적인 부하를 결정하는 것이다. 그들을 고려하는 이유는 body의 역학과 매카니즘의 역학을 동시에 고려해야 한다는 점이며, 구조적인 역학의 가장큰 문제는 전체운동이 비선형이므로 풀이가 곤란하기 때문이다. 이러한 두분야의 결과들을 적절한 frame의 선택에 의해 운동방정식을 단순화 할 수 있으며, 여기서는 유연성 구조를 갖는 매카니즘의 운동방정식을 간략화 하는데 그 목적이 있는 것이다. 일반적으로 유연성을 갖는 body의 역학으로 부터 전체시스템을 분석하는 방법으로는 가정모드방법과 유한요소방법이 있으며 전자는 단순한 매카니즘에 사용되어지며, 후자는 큰 변위를 갖는 매카니즘에 사용된다. [6]

2. Single flexible body 에 대한 벡터의 정의와 운동 방정식.

이번 장에서는 선형 탄성 body에 대한 운동방정식과 방정식에 나타난 모든 가능한 항들에 대해 언급해 보겠으며, 기준좌표계와 변위형태, 무시될 수 있는 작은 항들에의해 방정식의 간략화와 flexible body 의 관성과 에너지특성들을 설명해 보겠다. 일반적으로 강체의 경우에서와 같이 기준좌표계는 body와 서로 결합되어 있으며 ,몇가지 방법에서 이러한 기준좌표계는 body에 의존하기 때문에 변위는 이러한 좌표계에서 측정되어진다. [1,4]

flexible body 에 대한 벡터의 정의는 다음과 같으며 그림 1에서와 같이 정의된다.

$$\vec{P} = \vec{R} + \vec{q} \qquad \text{----(2.1)}$$

$$\vec{q} = \vec{r} + \vec{u} \qquad \text{----(2.2)}$$

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{\psi_i}(\vec{r})\mu i(t) \qquad \text{----(2.3)}$$

여기서 $\psi i(r)$ 는 shape 함수, 변위 $\vec{u}$는 위치 ($\vec{r}$) 와 시간 (t)에 의존한다 .

미분과 속도방정식은

$$^{(f)}d\vec{P} = {}^{(f)}d\vec{R} + {}^{(f)}d\vec{q} \qquad \text{----(2.4)}$$

$$^{(f)}d\vec{q} = d\vec{\tau} \times \vec{q} + {}^{(b)}d\vec{q} \qquad \text{----(2.5)}$$

여기서:

$$^{(b)}d\vec{q} = {}^{(b)}d\vec{r} + {}^{(b)}d\vec{u} \qquad \text{----(2.6)}$$

$^{(f)}d\vec{P}$는 관성 좌표계에서 측정된 벡터 P

$^{(b)}d\vec{q}$는 body 좌표계에서 측정된 벡터 q

$\vec{r}$ 가 body 좌표계에서 불변하기 때문에 $^{(b)}d\vec{r}$는 0이고, 따라서

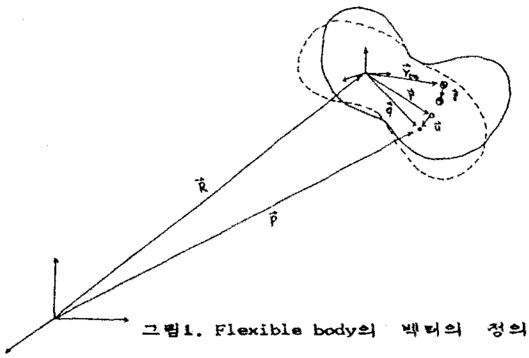

그림1. Flexible body의 벡터의 정의

$$ {}^{(b)}d\vec{q} = {}^{(b)}d\vec{u} \qquad \text{----(2.7)} $$

방정식(2.3) 을 방정식(2.7) 에 대입하여 미분하면

$$ {}^{(b)}d\vec{u} = \vec{\psi}i(\vec{r}\,)\,{}^{(b)}d\mu i(t) + {}^{(b)}d\psi j(r)\mu j(t) \qquad \text{----(2.8)} $$

여기서 $\vec{\psi}i(r)$ 은 고정된 body좌표계에서 불변이기 때문에 방정식 (2.8)은 다음과 같이 된다.

$$ {}^{(b)}d\vec{u} = \vec{\psi}_i d\mu_i \qquad \text{----(2.9)} $$

따라서 $\vec{P}$ 의 변화는 다음 과 같으며 ,

$$ {}^{(b)}d\vec{q} = {}^{(b)}d\vec{R} + d\vec{\Omega}\times\vec{q} + \vec{\psi}_i\,{}^{(b)}d\mu i \qquad \text{----(2.10)} $$

이러한 방정식 에 부합되는 속도 방정식 은 다음과 같다.

$$ \dot{\vec{P}} = \dot{\vec{R}} \times \vec{\Omega} \times \vec{q} + \vec{\psi}i\,\mathring{\mu}i \qquad \text{----(2.11)} $$

flexible body 의 선형모멘트는

$$ \vec{P} = \int \dot{\vec{P}}dm \qquad \text{----(2.12)} $$

방정식 (2.11) 은 방정식 (2.12) 에 대입하여 각각의 항을 적분하면 다음과 같으며

$$ \vec{P} = M\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega}\times M(\vec{r}_{cm} + \vec{S}j\mu j) + MSi\mathring{\mu}i \qquad \text{----(2.13)} $$

여기서 $MSi = \int \vec{\psi}idm$

만약에 기준좌표계의 body좌표계가 질량중심에 위치한다면 선형모멘트는 다음과 같이 단순화 된다. ($\vec{r}_{cm} = 0$,$Si = 0$)

따라서 선형모멘트는

$$ \vec{P} = M\dot{\vec{R}} \qquad \text{----(2.14)} $$

flexible body 의 각 운동량은

$$ \vec{H} = \int \vec{q}\times\dot{\vec{p}}dm \qquad \text{----(2.15)} $$

$$ = \int \vec{q}\times(\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega}\times\vec{q} + \vec{\psi}i\,\dot{\mu}i\,)dm $$

각각의 항들을 적분하면 각운동량은 다음과 같다.

$$ \vec{H} = (\vec{r}_{cm} + \vec{S}i\mu i\,)\times M\dot{\vec{R}} + \overleftrightarrow{J}\cdot\vec{\Omega} + (\vec{\alpha}_e + \mu m\vec{G}me)\mathring{\mu}_g \qquad \text{----(2.16)} $$

여기서

Si는 좌표계원점 에서의 질량 중심의 각 운동량

$\vec{r}_{cm} + \vec{S}i\mu i$ 는 좌표계의 원점에 따른 body 의 각 운동량

$\overleftrightarrow{J}$ 는 관성장력이며, body 의변위에 의존한다.

$\vec{\alpha}_\varepsilon$ 와 $\vec{G}me$ 는 상수이다.

Flexible body 의 운동에너지는

$$ T = 1/2\int \dot{\vec{P}}\cdot\dot{\vec{P}}dm \qquad \text{----(2.17)} $$

방정식 (2.11) 을 대입하여 각각의 항들을 계산하면

$$ T = 1/2\,M\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}}\cdot\vec{\Omega}\times M(\vec{r}_{cm} + \vec{S}_j\mu_k) + M\dot{\vec{R}}\cdot\vec{S}j\mathring{\mu}j $$
$$ + 1/2\vec{\Omega}\cdot\overleftrightarrow{J}\cdot\vec{\Omega} + \vec{\Omega}\cdot(\vec{\alpha}_c + \mu m\vec{G}m)\mathring{\mu}_c $$
$$ + 1/2\mathring{\mu}_k M_{kp}\mathring{\mu}_p \qquad \text{----(2.18)} $$

여기서 $Mkp = \int \psi k\cdot\psi pdm$, 변위좌표계에 따른 질량 행렬.

강체의 경우 ,body 내부의 에너지는 변화하지 않는다는 가정아래 운동방정식을 형성되지만 , flexible body 의 경우에서는 body내부의 에너지는 strain에너지로서 저장하고 ,그것은 운동에너지로 변환시킴으로써 시스템을 움직인다. 위에서 계산된 방정식은 좌표계의 위치 와 방향에독립적이므로 , $\frac{\partial T}{\partial R}$, $\frac{\partial T}{\partial \pi}$, $\frac{\partial U}{\partial R}$, $\frac{\partial U}{\partial \pi}$ 는 0 이다.

따라서 기본방정식 은

$$ \delta\dot{\vec{R}}\cdot\{\vec{P} - \vec{f}\,\} $$
$$ + \delta\vec{\pi}\cdot\{\vec{H} - \vec{t}\,\} $$
$$ + \delta\mu k\{\frac{{}^{(b)}d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\mathring{\mu}_k} - \frac{\partial T}{\partial\mu_k} + \frac{\partial U}{\partial\mu_k} - \sigma_k\} = 0 \qquad \text{----(2.19)} $$

여기서

$$ \vec{P} = M\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega}\times M(\vec{r}_{cm} + \vec{S}i\mu i) + M\vec{S}j\mathring{\mu}j $$
$$ \vec{H} = \overleftrightarrow{J}\cdot\vec{\Omega} + (\vec{r}_{cm} + \vec{S}i\mu i)\times M\dot{\vec{R}} + (\vec{\alpha}_\varepsilon + \mu m\vec{G}m\varepsilon) $$
$$ \frac{\partial T}{\partial\mathring{\mu}_k} = Mkp\mathring{\mu}p + M\dot{\vec{R}}\cdot\vec{S}k + \vec{\Omega}\cdot(\vec{\alpha}k + \mu m\vec{G}mk) $$

또한 변위에 따른 운동에너지는 다음과 같으며,

$$ \delta\{T\} = \delta\{1/2M\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}}\cdot\vec{\Omega}\times M(\vec{r}_{cm} + \vec{S}i\mu i) $$
$$ + M\dot{\vec{R}}\cdot\vec{S}j\mathring{\mu}j + 1/2\vec{\Omega}\cdot\overleftrightarrow{J}\cdot\vec{\Omega} \qquad \text{----(2.20)} $$
$$ + (\vec{\alpha}_\varepsilon + \mu m\vec{G}me)\mathring{\mu}_c + 1/2\,\mathring{\mu}kMkp\mathring{\mu}p\} $$

각각의 변위를 포함한 항은 2,4,5 번째항이므로 $\frac{\partial T}{\partial\mu_i}$ 는 다음과 같다. [1]

$$ \delta\{T\} = M\dot{\vec{R}}\cdot\vec{\Omega}\times\vec{S}i + \vec{\Omega}\cdot Gio\mathring{\mu}o \qquad \text{----(2.21)} $$
$$ + 1/2\vec{\Omega}\cdot(\overleftrightarrow{J}1i + 2\overleftrightarrow{J}2ip\mu p)\cdot\vec{\Omega} $$

변위에 따른 strain 에너지는

$$ \delta U = \delta(1/2\;\mu i\;Kij\,\mu j) $$
$$ = 1/2\;\delta\mu i\;Kij\;\mu j + 1/2\;\mu i\;Kij\;\delta\mu ij $$
$$ = Kij\;\mu j\delta\mu i \qquad \text{----(2.22)} $$

μk 에 따라 편미분 하면

$$ \frac{\partial U}{\partial\mu_k} = Kij\;\mu j \qquad \text{----(2.23)} $$

변위속도에 따르는 부분을 시간에 따라 미분하면

$$ \frac{{}^{(b)}d}{dt}[Mkp\mathring{\mu}p + M\dot{\vec{R}}\cdot\vec{S}k + \vec{\Omega}\cdot(\vec{\alpha}k + \mu m\vec{G}mk)] $$
$$ = Mkp\ddot{\mu}p + M\ddot{\vec{R}}\cdot\vec{S}k + \dot{\vec{\Omega}}\cdot(\vec{\alpha}k + \mu m\vec{G}m\varepsilon) + M\dot{\vec{R}}\cdot\vec{\Omega}\times\vec{S}k $$
$$ + \vec{\Omega}\cdot\vec{G}mk\mathring{\mu}m \qquad \text{----(2.24)} $$

결국 이러한 방정식은 변위속도에 일치함을 알수있다.

따라서 전체 운동방정식은

$$ \delta\dot{\vec{R}}\cdot\{\vec{P} - \vec{f}\,\} \qquad \text{----(2.25)} $$
$$ + \delta\vec{\pi}\cdot\{\vec{H} - \vec{t}\,\} $$
$$ + \delta\mu k\{\,Mkp\ddot{\mu}p + Kkj\mu j + M\ddot{\vec{R}}\cdot\vec{S}k + \dot{\vec{\Omega}}\cdot(\vec{\alpha}k + \mu m\vec{G}mk) $$
$$ + 2\vec{\Omega}\cdot\vec{G}mk\mathring{\mu}m - 1/2\vec{\Omega}\cdot(\overleftrightarrow{J}1k + 2\overleftrightarrow{J}2kp\mathring{\mu}p\cdot\vec{\Omega}\,)\} $$

어기서

$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times M(\vec{r}_{cm} + \vec{S}_i\mu_i) + M\vec{S}_j\mathring{\mu}_j$

$\vec{H} = \vec{J}\cdot\vec{\Omega} + (\vec{r}_{cm} + \vec{S}_i\mu_i) \times M\dot{\vec{R}} + (\vec{\alpha}_c + \mu\, m\vec{G}_{m\varepsilon})\mathring{\mu}_c$

Flexible body 의 경우에는 strain에너지특성이 필요하며 이러한 특성은 2차변위함수이다.

선형 탄성구조에 대한 strain에너지는

$$U = 1/2\int \vec{\varepsilon}(\vec{u}) : \vec{E} : \vec{\varepsilon}(\vec{u}) \qquad \text{----(2.26)}$$

어기서 E 는 탄성상수이며, 식(2.3) 을 대입하어 계산하면, Strain에너지는

$$U = 1/2\int \vec{\varepsilon}(\vec{\psi}i)\mu i : \vec{E} : \vec{\varepsilon}(\vec{\psi}j)\mu j dv$$
$$= 1/2\ \mu i\ Kij\ \mu j \qquad \text{----(2.27)}$$

어기서 Kij stiffness 행렬이며

$$Kij = \int \vec{\varepsilon}(\vec{\psi}i)\mu i : \vec{E} : \vec{\varepsilon}(\vec{\psi}j)\ jdv$$

운동 에너지 의 속도변수

$$\delta(T) = \delta\dot{\vec{R}}\cdot[M\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega}\times M(\vec{r}_{cm} + M\vec{S}i\mu i) + \vec{S}j\mathring{\mu}j$$
$$+ \delta\vec{\Omega}\cdot[\vec{J}\cdot\vec{\Omega} + (\vec{r}_{cm} + \vec{S}i\mu i)\times M\dot{\vec{R}} + (\vec{\alpha}_\varepsilon + \mu m\vec{G}_{m\varepsilon})\mathring{\mu}]$$
$$+ \delta\mathring{\mu}_k[Mkp\mathring{\mu}p + M\dot{\vec{R}}\cdot\vec{S}k + \vec{\Omega}\cdot(\vec{\alpha}k + \mu m\vec{G}_{m\varepsilon})] \qquad \text{----(2.28)}$$

어기서 $\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{R}}} = \vec{P}$, $\frac{\partial T}{\partial \vec{\Omega}} = \vec{H}$

이들을 각각의 항에 대입하어 운동 방정식을 쓰면,

$$\delta\vec{R}\cdot\left\{\frac{^{(N)}d}{dt}(\vec{P}) - \frac{\partial T}{\partial \vec{R}} + \frac{\partial U}{\partial R} - f\right\} \qquad \text{----(2.29)}$$
$$+ \delta\vec{\theta}\cdot\left\{\frac{^{(N)}d}{dt}(\vec{H}) - \frac{\partial T}{\partial \vec{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{\theta}} - t\right\}$$
$$+ \delta\mu_k\left\{\frac{^{(N)}d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathring{\mu}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mu_k} - \sigma_k\right\} = 0$$

3. 좌표계에 따른 간략화

앞에서 설명한 flexible body 에 대한 운동의 방정식은 매우 복잡하게 되어 있으며 그들은 기준좌표계와 변위좌표계의 선택에 따라 나타나는 간략화를 비교 하기위한 일반적인 경우에 대해 설명 하였다. 일반적으로 강체, flexible body 에 대한 운동방정식을 기준좌표계의 적절한 선택에 의해 더욱더 간략화 되어진다.

일반적으로 간략화에 따른 기준좌표계는 여러가지 형태의 기준좌표계가 존재 하지만 여기서는 floating기준좌표계에 대해 설명해 보겠다.

이러한 floating기준좌표계에서는 예비적인 수학적 작없이 요구되지만 운동방정식이 반복적으로 풀이되기 때문에 더욱더 간략화할 수 있는 장점이 있다. 이러한 기준좌표계에서는 좌표계의 속도, 가속도, 위치가 결합되어되어지며, 이러한 경우의 선형모멘트는 다음과 같으며,

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \qquad \text{----(3.1)}$$

각 모멘트는

$$\vec{H} = \vec{J}\cdot\vec{\Omega} + (\vec{\alpha}_\varepsilon + \eta_m\vec{G}_{m\varepsilon})\mathring{\eta}_\varepsilon \qquad \text{----(3.2)}$$

좌표계의 방정식은

$$\delta\eta k(Mkp\mathring{\eta}p + Kkj\eta j + \dot{\vec{\Omega}}\cdot(\vec{\alpha}k + \eta m\vec{G}mk) + 2\vec{\Omega}\cdot\vec{G}mk\mathring{\eta}m$$
$$- 1/2\vec{\Omega}\cdot(\vec{J}1k + 2\vec{J}2kp\eta p)\cdot\vec{\Omega} - \sigma k) = 0 \qquad \text{----(3.3)}$$

식(2.17)로 부터 순간적으로 질량중심에 기준좌표계를 놓으면

$$T = 1/2M\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{R}} + 1/2\,\vec{\Omega}\cdot\vec{J}\cdot\vec{\Omega} + \vec{\Omega}\cdot(\vec{\alpha}_\varepsilon + \eta m\vec{G}_{m\varepsilon})\mathring{\eta}_\varepsilon$$
$$+ 1/2\,\mathring{\eta}kMkp\mathring{\eta}p \qquad \text{----(3.4)}$$

어기서 기준좌표계의 재정의에 의해 항들이 소거 되며, 변위는 강체의 경우 직교하게 되며, 이것과 상호 결합된 기준좌표계를 Buckan's좌표계라 부른다. [1,2] 또한 non-holomomic 제약조건에따라 $\eta_m\vec{G}_{m\varepsilon}\mathring{\eta}_\varepsilon = 0$ 이다.

이러한 제약조건은 $\eta_m = 0$ 또는 $\mathring{\eta}_\varepsilon = 0$가 될 수 없는 경우에는 아무런 의미가 없으며 실질적으로 운동방정식을 단순화 할 수 없다.

따라서 3개의 특별한 Lagrange Multiplier 가 필요하며, 대부분의 항들이 소거되어 진다. 이러한 제약조건과 상호 결합되어진 기준좌표계를 Tisserant 좌표계라 한다.[1,3] $\vec{S}i$와 $\vec{\alpha}_\varepsilon$가 이러한 변위좌표계에 대해 정의될때 직교화되며 소거되게되며, 질량행렬은 diagonal하게된다.

따라서 운동에너지는

$$T = 1/2\ M\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{R}} \qquad \text{----(3.5)}$$
$$+ 1/2\,\vec{\Omega}\cdot\vec{J}\cdot\vec{\Omega} + \vec{\Omega}\cdot\eta_\varepsilon\vec{G}_{m\varepsilon}\mathring{\eta}_\varepsilon + 1/2M_{(k)}\mathring{\eta}k\mathring{\eta}k$$

만약에 변위좌표계의stiffness 행렬을 diagonal 하게 선택 하게되면 방정식은 훨씬더 간략화 되어진다. Free mode 에서도 또한 마찬가지이다.

strain에너지는

$$U = 1/2\ K_{(k)}\eta_k\eta_k \qquad \text{----(3.6)}$$

예제 1. Floating frame 에서의 두개의 질량문제

이 경우는 좌표축이 순간적으로 질량중심에 위치하게 되는 것이다. 실질적인 경우 이러한 좌표축은 변위가 없을때 , $\vec{r}_{cm} = 0$, 변화되지않은 질량중심에 위치 하게된다.(그림2)

이러한경우, 모든 위치벡터 $\vec{r}$로부터 $\vec{r}_{cm}$을 대입하므로써 쉽게 얻을 수 있다.

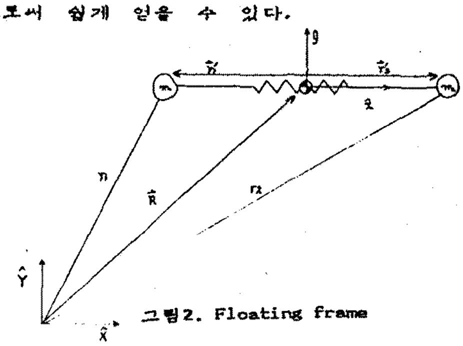

그림2. Floating frame

$\vec{r}1 = 0,\ \vec{r}2 = r\hat{x}$

$\vec{r}_{cm} = rm2\ /(\ m1 + m2\ )\ X\ \hat{x}$

어기서 위치 벡터는

$\vec{r}1' = \vec{r}1 - \vec{r}_{cm} = (0 - rm\ /(m1+m2))\ \hat{x}$

$= (-rm2)/(m1+m2))\ \hat{x}$

$\vec{r}2' = \vec{r}2 - \vec{r}_{cm} = (r\ \ -(rm2)/(m1+m2))\ \hat{x}$

$= (rm1)/(m1+m2)\ \hat{x}$

만약에 새로운 $\vec{r}_{cm}$가 0이면 변형되지 않은 위치벡터 $\vec{r}$는 새로운 좌표계에 따라 정의되어지며, 변위좌표계가 그들의 질량 중심에서 왜란을

없애기 위해 재정의 된다. 이러한 좌표계에서의 shape 함수는

$$\vec{\psi}(\vec{r}) = \begin{Bmatrix} 0 : \vec{r} = \vec{r1} \\ x : \vec{r} = \vec{r2} \end{Bmatrix}$$

질량중심에서의 쇄란의 량은 $\vec{S} = (m2/M)\hat{x}$ 이다. 여기서 새로운 Shape 함수 Φ_1 는 $\vec{\Phi} = \vec{\psi} - \vec{S}$ 로 단순화된다

$$\vec{\phi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{i} \end{Bmatrix} - \frac{1}{M}\begin{Bmatrix} m_2\hat{x} \\ m_2\hat{x} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{M}\begin{Bmatrix} -m_2\hat{i} \\ m_1\hat{i} \end{Bmatrix}$$

여기서 새로운 $\vec{S}$ 는

$$\vec{S} = \int \vec{\phi}\, dm = \sum_{i=1}^{2} \vec{\phi}_i mi$$

$$= (-m2m2/M) + (m1m2/M)\hat{x} = 0$$

변위에 따른 $\vec{\alpha}_1$ 를 보면

$$\vec{\alpha}_1 = \int \vec{r} \times \vec{\phi}_1'\, dm$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (r1\ \hat{x} \times \phi_1 \hat{x}\ )\ m1\ = 0$$

고차모멘트($\vec{G}1p$) 는 단지 하나의 mode를 가지기 때문에 0 이다. 이러한 경우에 관성장력 (inertia tensor) 을 계산해 보면

$$\underline{J0} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & J0xy & \\ & & J0zz \end{bmatrix}$$

여기서 $J0yy = \int r x^2\, dm$

$$= \sum_{i=1}^{2} r x i^2 mi$$

$$= [[-rm2/M]^2 m1 + [rm1/M]^2 m2]$$

$$= r^2/M^2(m1+m2)\ m1m2$$

$$= m1m2/M \times r^2$$

관성장력 J1은

$$\underline{J1} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & J1yy & \\ & & J1yy \end{bmatrix}$$

여기서 $J1yy = J1zz$

$$= 2\int (r x'\ \phi\ xi) dm$$

$$= 2m1m2/M \times r$$

관성장력 J2는

$$\underline{J2} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & J2yy & \\ & & J2zz \end{bmatrix}$$

$$J2yy = J2zz$$

$$= \int (\phi x)^2 dm = m1m2/M$$

여기서 M = m1m2/M 라 놓으면

$$\underline{J} = \underline{J0} + \underline{J1}U + U\underline{J2}U$$

따라서 새로운 등가적인 stiffness 행렬은

$$\underline{\phi} = \frac{1}{M}\begin{bmatrix} -m2 \\ m1 \end{bmatrix}$$

또한 새로운 질량 행렬은

$$\underline{\phi}^T \underline{M}\, \underline{\phi} = M$$

그러므로 전체운동 방정식은

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}$$

$$\vec{H} = \vec{J}\cdot\vec{\Omega}$$

$$\dot{\vec{H}} = \vec{\tau}$$

$$M\ddot{\eta} + K\eta - 1/2\vec{\Omega}\cdot(\vec{J1} + 2\vec{J2}\eta)\cdot\vec{\Omega} = \sigma$$

여기서 $m = m1m2/M$, $\phi_1 = 1/M(-m2/m1)$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & M(r^2 + 2r\eta + \eta^2 & \\ & & M(r^2 + 2r\eta + \eta^2\ ) \end{bmatrix}$$

4. 결 론

본 논문에서는 선형 탄성체에 대한 운동 방정식에 대해 설명하였으며, 또한 그들의 풀이 과정에서 적절한 기준좌표계의 선택에 의해 더욱더 간략화 될 수 있다는 것을 보였다.

각각의 body는 이러한 기준좌표계에 따라 묘사되며, 이러한 좌표계에서 변위는 전체운동이 비선형일지라도 선형성을 유지한다.

좌표계의 회전에 따른 운동방정식은 각좌표계 대신 각속도에 따라 구성되어 졌으며, 이들은 방정식들은 implicit형태를 가지며, 풀이과정에서 요구되는 수학적인 노력을 훨씬더 줄일 수 있다. 또한 변위 좌표계에 대한 free-mode 의 선택에 의해 body의 많은 수의 항들을 간략화 되어 졌다. 앞으로의 연구 과제는 각각의 항들의 상대적인 분포를 이용하여 간략화 하는 방법에 대해 연구해 보는 것이다.

참고 문헌

[1] DeVeubeke, B. R.,"The dymamics of flexible body",Journal of Eng.Sci,Vol 14,PP 895-913, 1976

[2] Kane, T. R., Wang, C. F.,"On the Derivation of Equation of Motion" J.Soc.Indust. Apple. Math.,Vol 13,No. 2,June 1965

[3] Canavin, J. R., Likin, P. W.,"Floating Reference Frames for Flexible Spacecraft,"Vol. 14, No.12, December 1977.

[4] Gear, C. W.,"The Automatic Intregration of Stiff Ordinary Differential Equations," comunation of the ACM, Vol.14,No.3,March 1971

[5] Naganathan, G., Wilhert, K. D.,"New Finite Elements for Quasi-Static Deformations and Stresses in Mechanism," ASME 80-WA/DSC-35, New York,1980

[6] Sunada, W., Dubowsky, S.,"The Application of Finite Element Methods to The Daynamic Analysis Spatial and Co-Planar Linkage System," Journal of Mechanical Design,ASME 80-DET-87, New York,1980