

기계적 로봇팔을 위한 최적 경로 설계

김 태 산<sup>o</sup>, 배 준 경, 박 중 국

경희 대학교 전자 공학과

Optimum Path Planning for Mechanical Manipulators

Tae-san Kim<sup>o</sup>, Jun-kyung Bae, Chong-kug Park

Dept. of Electronic Engineering, Kyung Hee Univ.

Abstract

To assure a successful completion of an assigned task without interruption, the hand of mechanical manipulator often travels along a preplanned path. This paper presents a method of obtaining a time schedule of velocities and acceleration along the path, under the constraints. Because of the involvement of a linear performance index and a large number of nonlinear constraints, the "method of approximate programming (AMP)" is applied. To overcome the false solutions AMP is modified. To reduce the computing time, a "direct approximate programming algorithm (DAPA)" is developed.

I. 서론

멈춤없이 정해진 작업을 성공적으로 수행하기 위해서 로봇팔의 핸드의 경로는 흔히 미리 계획되어진다. 이 논문에서는 경로를 따르는 총 여행시간이 최소가 되도록 시간계획을 얻게된다. 물리적 한계때문에 많은수의 비선형 제약조건이 포함되므로 이런문제의 해결을 위해서 근사회 프로그래밍(MAP)이 도입된다. 제약조건이 경계치에서의 거짓해 문제의 극복을 위해서 MAP은 변경되어진다. 계산의 양을 줄이기 위하여 직접근사와 프로그래밍(DAPA)이 고찰되어진다.

II. 핸드(hand)의 위치와 방위

핸드의 위치와 방위는 아래와같은 4x4 행렬에 의해서 표현되어 질수 있다.[1]

$$H_i(t) = \begin{bmatrix} n(t)_i & s(t)_i & a(t)_i & p(t)_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_i & P_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서,  $p(t)_i$ 는 핸드의 위치벡터이고,  $n_i, s_i, a_i$ 는 각기 단위 수직, 단위 접근, 단위 미끄럼 벡터이다. 여기서,  $H_i$ 는 핸드행렬(Hand matrices)

로 정의한다.

III. 핸드에 의한 여행 경로

경로는 평평한 호로서 연결된 직선조각으로서 구성된다. 조각의 수를  $m$ 이라 했을때, 모든 두개의 인접조각들 사이에서  $m-1$ 개의 교차점이 발생하며, 이들은  $H_i$ 에 의해서 정의 되어진다. 또한,  $H_0, H_m$ 를 초기점, 최종점으로 정의한다. 조각의 중간부분에서  $v_i$ 와  $w_i$ 는 상수로서 할당되어지고 0이 아닌 일정한상수 가속도  $\dot{v}_i$ 와  $\dot{w}_i$ 는 단지 조각  $i$ 로 부터 조각  $i+1$ 로 천이 될때에만 작용한다. 그림 1에서  $T_i$ 는 핸드가 조각  $i$ 를 통해서 움직이는데 요구되는 시간의 양이고  $2T_i$ 는 핸드가 조각  $i$ 로 부터 조각  $i+1$ 까지 천이 하는데 요구되는 시간 양이다. 그러므로 기준시간이 초기점에서 설정되어 진다면 속도와 가속도는 다음과 같이 표시되어진다.

$$v_i = (p_i - p_{i+1}) / T_i$$

$$\dot{v}_i = (v_{i+1} - v_i) / 2T_i$$

$i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, m$

또한, 전체 여행시간동안에 윗두식중 하나만이 유효하며,  $\dot{v}_j$ 는 핸드가 천이 상태를 지나온후에 핸드에 요구된 위치와 속도를 갖도록 해준다.

방위를  $\Omega_i$ 부터  $\Omega_{i+1}$ 까지 변화하기 위해서 핸드는 핸드 좌표계와 기준을두는 고정된 단위벡터  $\rho_i$ 에 대해서  $\theta_i$ 라디안 만큼 회전 해야한다.

[  $n = a$  ]의 견지에서  $\theta_i$ 와  $\rho_i$ 는 다음과 같이 계산되어진다. [2]

$$\theta_i = \cos^{-1} \left[ \frac{(n_i)' \cdot n_{i+1} + (s_i)' \cdot s_{i+1} + (a_i)' \cdot a_{i+1} - 1}{2} \right]$$

$$\rho_i = \frac{1}{2 \sin \theta_i} \begin{bmatrix} (a_i)' \cdot s_{i+1} - (s_i)' \cdot a_{i+1} \\ (n_i)' \cdot a_{i+1} - (a_i)' \cdot n_{i+1} \\ (s_i)' \cdot n_{i+1} - (n_i)' \cdot s_{i+1} \end{bmatrix}$$

여기서 ( )'는 ( )의 전치행렬이다.

윗 위치에대한 논의를 그대로 적용시키면 각속도와각가속도  $w_i, \dot{w}_i$ 를 다음과 같이 표현할수

있다.  $w_k = 0, \theta_k = 0, k < 1, k > m$   
 $w_1 = (\theta_1 / T_1) \rho_1$   
 $\dot{w}_j = (w_{j+1} - w_j) / 2T_j$

IV. 부동식 제약조건 하의 최적경로 설계문제  
 물리적인 제약때문에 핸드속도, 가속도, 각속도 각각속도의 크기는 kv, ka, kw, k $\alpha$ 로 상한제약되어진다. 즉, 모든 t에 대해서

$$0 \leq \|v(t)\| \leq kv, t > 0 \quad \text{-----(1)}$$

$$0 \leq \|\dot{v}(t)\| \leq ka, t > 0 \quad \text{-----(2)}$$

$$0 \leq \|w(t)\| \leq kw, t > 0 \quad \text{-----(3)}$$

$$0 \leq \|\dot{w}(t)\| \leq k\alpha, t > 0 \quad \text{-----(4)}$$

만일 속도가 변하는 시간간격  $2T_j$ 가 너무길면 핸드가어행하는 경로는 미리계획된 경로로 부터 상당히 비껴가게 된다. 어행경로의오차를 위한 제약조건을 다음과 같이 선택한다.

$$0 \leq \tau_i \leq T_i / k, i=1,2,3,\dots,m \quad \text{---(5)}$$

$$0 \leq \tau_j \leq T_{2j} / k, j=1,2,3,\dots,m-1$$

k는 어행경로의 이탈허용을 허락하는 양상수 값이다. 그림 1에서 전체 어행경로를 위한 총 수행시간은 다음과같이 주어지는 것을 알수있다

$$ET = \tau_0 + \sum_{i=1}^m T_i + \tau_m \quad \text{-----(6)}$$

그러므로, 최적경로 설계문제는  $T_i$ 와  $\tau_j$ 에 대해서 위의 부동식조건, 식(1)~식(5)을가지고 평가지표 ET를 최소화 하는 문제로서 귀착된다. 이 문제를 풀기위하여 부동식 제약조건 식(1)~식(5)은  $S_i, \rho_i, \theta_i, T_i, \tau_i$ 의 함수로써 표현되어야 한다. 계산의 편의상 다음과 같은 정의를 사용하자.

$$S_i = [x_i, y_i, z_i]^T$$

$$D_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}$$

$$C_k = (x_1 - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2}) + (y_1 - y_{i-1})(y_{i-1} - y_{i-2}) + (z_1 - z_{i-1})(z_{i-1} - z_{i-2})$$

$$R_i = (\rho_{x_i}^2 \rho_{y_i}^2 + \rho_{y_i}^2 \rho_{z_i}^2 + \rho_{z_i}^2 \rho_{x_i}^2) \theta_i \theta_{i-1}$$

윗식들을 이용하여 제약조건은 다음과같이 표현된다.

식(1)  $\rightarrow \|v_i\| = \|(s_i - s_{i-1}) / T_i\| = D_i / T_i$   
 $D_i \leq kv T_i$

식(2)  $\rightarrow \|\dot{v}_j\| = \|(s_{2j} - s_j) / T_{2j} - (s_j - s_{j-1}) / T_j\| / 2T_j$   
 정의된 식들을 이용하면

$$\sqrt{\frac{T_i^2 D_{i+1}^2 + T_i^2 D_i^2 - 2T_i T_{i+1} C_{i+1}}{2k^2 T_i T_{i+1}}} \leq 2ka T_i T_{i+1}, i=1,2,\dots,m-1$$

(i=0)  $D_1 \leq 2ka T_0 T_1$   
 (i=m)  $D_m \leq 2ka T_m T_m$

식(3)  $\rightarrow \|w_i\| = \|\rho_i \theta_i\| / T_i, \|\theta_i\| \leq k\alpha T_i$

식(4)  $\rightarrow$  정의된 식을 이용하여  
 $\sqrt{\frac{T_i^2 \theta_{2j}^2 + T_i^2 \theta_j^2 - 2T_i T_{2j} R_{2j}}{2k^2 T_i T_{2j}}} \leq 2k\alpha T_i T_{2j}, i=1,2,\dots,m-1$   
 (i=0)  $\|\theta_1\| \leq 2k\alpha T_0 T_1$   
 (i=m)  $\|\theta_m\| \leq 2k\alpha T_m T_m$

조각의 갯수가 m일때 최소화되어질 ET는  $T_i$ 와  $\tau_j$ 의 선형결합이고, k, ka, kv, kw, k $\alpha$ ,  $D_1$

,  $C_i, R_i, \theta_i$ 는 계산되거나 주어진 값이다. 만일 모든부동식 제약조건들이 모두 선형이라면 최적화문제는 통상적인 Linear Programing 기법으로 해결되어질 수 있다. 그러나 제약조건 식(5)은 비선형이다. 그러므로 이는 비선형프로그래밍이다. 선형평가지표와 많은 수의 제약조건을 포함하는 관점에서 보면 주기적으로 Update되어지는 선형근집화 방법이 선오적이고, 이것이 MAP의 적용을이끈다.

V. 근사와 프로그래밍(MAP)과 거짓해

MAP는 선형 프로그래밍의 반복적인 사용에 기초를두고있다. 이방법은 많은양의 비선형 프로그래밍 문제를 다루는데 성공적인것으로써 알려졌다. [6]

MAP는 다음과 같은 추가적인 제약조건을 규정화하는 것외의해서 선형 프로그래밍 방법에 적용할수있다.

$$|t_i - t_{i-1}| \leq d_i$$

여기서,  $t_i$ 는 i번째성분,  $t_{i-1}$ 는 유용한 해,  $d_i$ 는 다음해의 제약을 위한 상수로서 정의한다. MAP를 경로 설계문제에 적용하기 위해서는 평가함수를 ET 놓고 t를  $[T_1, T_2, \dots, T_m, \tau_0, \dots, \tau_m]$ 으로 놓는다.

선형 프로그래밍 과정에 적용 시키기 위해서는 식(5)는 선형부동식으로 나뉘어져야만 한다. 이를 위해서 다음과 같은 변수를 도입하자.

$$t_i(+) = \begin{cases} t_i - t_{i-1}^k, & t_i - t_{i-1} > 0 \\ 0, & \text{그외} \end{cases}$$

$$t_i(-) = \begin{cases} 0, & t_i - t_{i-1} \geq 0 \\ -[t_i - t_{i-1}^k], & \text{그외} \end{cases}$$

그래서  $t_i(+) > 0, t_i(-) > 0$  이고, 식(5)는  
 $0 < t_i(+) < d_i$   
 $0 < t_i(-) < d_i \quad \text{-----(7)}$

$t_i = t_{i-1}^k + [t_i(+)-t_i(-)]$  이된다  
 경로 설계문제를 위하여 다음과 같이 정의하면  
 $T_i(+)=t_i(+), T_i(-)=t_i(-), i=1,2,\dots,m$

$\tau_j(+)=t_{m+j+1}(+), \tau_j(-)=t_{m+j+1}(-), j=0,\dots,m-1$   
 $k+1$  번째 반복을 위하여 식(7)은

$$T_i = T_i^k + [T_i(+)-T_i(-)]$$

$$\tau_j = \tau_j^k + [\tau_j(+)-\tau_j(-)]$$

$i=1,2,\dots,m, j=0,1,2,\dots,m$  이 된다.

식(6)의 ET는 아래식에 의해서 대체된다.  
 $ET = [T_0(+)-T_0(-)] + \sum_{i=1}^m [T_i(+)-T_i(-)] + [\tau_m(+)-\tau_m(-)]$

식(1)~식(5)은  $T_i(+), T_i(-), \tau_i(+), \tau_i(-)$ 를 변수로 다음과같이 근사화할수 있다.

식(5)  $\rightarrow$   
 $[T_i(+)-T_i(-)] - [T_i(+)-T_i(-)]/k \leq T_i^k/k - \tau_j^k$   
 $[\tau_j(+)-\tau_j(-)] - [T_{2j+1}(+)-T_i(-)] < \tau_j^k/k - \tau_j^k, j=0,1,\dots,m-1, i=1,\dots,m$

식(2) →

$$\begin{aligned}
 & [(T_{2i}^k)^2 D_{2i}^k + (T_{2i+1}^k)^2 D_{2i+1}^k - 2T_{2i}^k T_{2i+1}^k C_{2i}^k - 4(ka \tau_{2i}^k T_{2i}^k T_{2i+1}^k)] \\
 & + [2T_{2i}^k D_{2i}^k - 2T_{2i+1}^k C_{2i+1}^k - 8ka^2 \tau_{2i}^k T_{2i}^k T_{2i+1}^k] [T_{2i}^k(+) - T_{2i}^k(-)] \\
 & + [2T_{2i+1}^k D_{2i+1}^k - 2T_{2i}^k C_{2i+1}^k - 8ka^2 \tau_{2i+1}^k T_{2i+1}^k T_{2i}^k] [T_{2i+1}^k(+) - T_{2i+1}^k(-)] \\
 & - [8ka^2 \tau_{2i}^k T_{2i}^k T_{2i+1}^k] [T_{2i}^k(+) - T_{2i}^k(-)] \leq 0 \\
 & - 2kaT_{2i}^k [\tau_{2i}^k(+) - \tau_{2i}^k(-)] - 2kaT_{2i+1}^k [T_{2i+1}^k(+) - T_{2i+1}^k(-)] \\
 & \leq -D_{2i} + 2ka \tau_{2i}^k T_{2i}^k \\
 & - 2kaT_{2i+1}^k [\tau_{2i+1}^k(+) - \tau_{2i+1}^k(-)] - 2kaT_{2i+1}^k [T_{2i+1}^k(+) - T_{2i+1}^k(-)] \\
 & \leq -D_{2i+1} + 2ka \tau_{2i+1}^k T_{2i+1}^k
 \end{aligned}$$

식(3) ~ 식(5) 도 위와 같은 방식으로 변환 될수있다.

MAP 는 초기적으로 다르게 선택된 이용가능한 점들을 대해서 일정횟수의 반복후에 유용한 해에서 멈추게된다. 그러나 이들 유용한 해들은 최적점이 아닌 단지 제약상의 경계부근의 점들이다. 결과적으로 계산된해는 거짓해가된다. 그림 2가 거짓해를 야기시키는 기하학적인 이해를 위하여 이용되었다. 그림에서 유용한 해의부분은비선형 제약조건의 윗부분이 된다.  $(T_i^k, \tau_i^k)$  가 k 번째 반복의 유용한 해라고하면 k+1 번째 반복을 위하여 근사화된 선형제약을  $\bar{f}_k$  로써 정의하고 거리한계조건  $d_k$ 를 사각형  $B_k$ 로 나타내자. 유용한 해  $(T_i^k, \tau_i^k)$  은 구석에 존재한다. k+2 번째 반복을 위해서 원래의 거리한계조건  $d_i^{k+2}$  은 사각형  $B_{k+2}$  가된다. 점 Q에서의 해는 쓸모없는 것이다.  $d_i^{k+2}$  을 감소시키는 것의이해서 k+2 번째 유용한해  $(T_i^{k+2}, \tau_i^{k+2})$  가 얻어진다 결과적으로  $(T_i^{k+1}, \tau_i^{k+1})$  과  $(T_i^{k+2}, \tau_i^{k+2})$  사이의 거리는 작게되고 반복하는 제약조건의 경계로 더카이 움직여갈 것이다. 만일 두개의 연속되는 유용한 해 사이의 거리가 충분히 작다면 ET의 변화는 무시할수 있고 결국 MAP는 계산과정은 끝나게 되지만해는 거짓이된다.

VI. 근사화 프로그래밍(MAP)의 변형

앞절에서와 같이 거짓해는 반복된 유용한 해가 제약조건 집합의 구부러진 경계부분으로 가까이갈 때 발생하게된다. 이러한 문제를 극복하기위한 논리적인 방법은 각반복의 유용한 해를 비선형 제약조건의 경계치 부분으로부터 멀어지도록 옮겨놓는 것이다. 식(6)으로부터 선형평가지표 ET 는  $\tau_i^k$  에대해서 독립적이므로 k 번째 반복의 유용한해  $\tau_i^k, T_i^k$  를 위하여 아래식으로부터  $\tau_i^{k'}$  를 형성하면  $\tau_i^{k'} = \min(T_i^k/k, T_{2i+1}^k/k), i=1,2,\dots,m$   $(T_i^k, \tau_i^k)$  는 유용한 영역에 존재하고, k 번째 반복의 유용한 해인  $(T_i^k, \tau_i^k)$  를 ET 의 값을 변화시키지 않고 대신한다. 그러므로, 반복된 유용한 해는 경계의 곡선부분으로, 부터 직선부분으로 움직여온다. 거짓 최적해로의 도달문제는

극복되어진다. 어떤 반복으로부터의 유용한 해는 다음반복을 위한 초기적으로 선택된 시작점으로 간주 될수있다. 추가해서  $\tau_i^{k'} = T_i^k/k, \tau_m^{k'} = T_m^k/k$  에의해서 대체하자.

VII. 직접 근사화 프로그래밍 알고리즘

많은 반복적인 계산과정이 MAP 안에서발생하는 거짓해를 보정하기 위하여있고 어분의 선형화 프로그래밍 과정이 요구된다. 계산시간을 줄이기 위하여 직접 근사화 프로그래밍 알고리즘(Direct Approximation Programming Algorithm, DAPA)에서는 MAP 안의 제약조건  $d_i$ 가 생략되어지고 거짓해가 만들어 지는것이 허락되어진다. 이러한 거짓해는 해사이의 방향을 따르는 연속되는 반복으로부터 두해사이의 거리를 축소하는 것에 의해서 유용한 해로 만들어진다. 또한  $d_i$ 에대한 제약조건이 생략되기 때문에  $T_i$  와  $\tau_i$  가  $T_i(+), T_i(-), \tau_i(+), \tau_i(-)$ 로부터 변형될 필요가있다. 여기서,  $\lambda$  를 유용해조정요소로서 정의하자.

VIII.  $\tau$  에대해서 리셋를 갖는 DAPA

DAPA 에서 반복된 해가 제약조건의 경계치로 향하게될때 연속되는 두해사이의 방향이 경계에 대해서 거의 tangent 가 된다. 만일 이웃하고 있는 경계의곡률이 작다면 반복된해는 결과적으로 MAP 에서와 같이 제약조건의 경계치로 접근해서 거짓해를 만들게된다. 이문제를 해결하기위하여 무차별 직선의 사용을 도입한다.

IX. 모의 실험

MAP, DAPA, 리셋트  $\tau$  DAPA에의한 FORTRAN 프로그램이 최적 경로설계문제를 해결하기 위하여 쓰여졌다. 여행경로는 5개의 직선조각으로 구성되어졌고 각경로는 핸드행렬(Hand matrices)  $H_i$  에의해서 규정되어진다. H 인의  $\Omega_i$  은  $\rho_i$  와  $\theta_i$  의 변수로 변환되어진다. 입력 데이터는 다음과같다  $k=6, kv=40\text{cm/sec}, ka=20\text{cm/sec}, kw=45/\text{sec}, k_x=15/\text{sec}$  유효성 조정인자는 DAPA에서  $\lambda=1/2$  로하고 리셋트 가해진 DAPA에서는  $\lambda=2/3$  으로한다.

i =	1	2	3	4	5	6	단위
x =	0	30	30	40	40	-15	cm
y =	-40	-40	-20	5	65	30	cm
z =	30	30	20	4	4	15	cm
$\rho_1^i =$	-	1	0	0	0	0.5547	cm
$\rho_2^i =$	-	0	1	1	1	0.8321	cm
$\rho_3^i =$	-	0	0	0	0	0	cm
$\theta_2^i =$	-	90	30	40	0	54.038	degrees

모의실험에 사용되는 flow-chart는 다음과 같다

기계적 로봇팔을 위한 최적 경로 설계

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$T_1$	0	P.O	5.041	4.352	3.890	3.641	4.676	4.415	3.845	3.562	3.617	3.577	3.517	
	1	P.O	5.041	4.352	3.890	3.641	2.693	2.786	3.273	3.562	3.506	3.577	3.687	
	2	P.O	5.011	4.210	3.509	3.124	2.886	2.886	2.886	2.886	2.886	3.891	2.831	2.888
	3	P.O	5.031	4.326	3.780	3.463	3.337	3.337	3.337	3.337	3.337	3.222	3.222	3.221
	4	P.O	5.031	4.326	3.780	3.463	3.337	3.337	3.337	3.337	3.337	3.222	3.222	3.321
$T_2$	0	1.0	0.748 1.260	0.767 1.088	0.807 0.710	0.835 0.658	0.560	0.658	0.783	0.745 0.827	0.827	0.857	0.887	0.858
	1	1.0	1.260	1.088	0.790	0.608	0.671	0.746	0.823	0.827	0.876	0.887	0.847	
	2	1.0	1.226 1.223	1.010 1.033	0.823 0.874	0.791	0.671	0.701	0.701	0.701	0.708	0.708	0.708	0.707
	3	1.0	1.233	1.033	0.874	0.791	0.721	0.721	0.721	0.721	0.708	0.708	0.708	0.707
	4	1.0	1.258	1.076	0.845	0.866	0.835	0.835	0.835	0.830	0.830	0.830	0.830	0.830
5	1.0	0.576 1.258	0.573 1.076	0.550 0.865	0.558 0.865	0.551	0.551	0.551	0.521	0.520 0.830	0.524	0.524 0.830	0.524	
ET		26.498	22.831	20.253	18.702	-	-	-	19.084	-	17.990	17.990	17.990	
		유용해	유용해	유용해	유용해	비유용해	비유용해	비유용해	비유용해	유용해	비유용해	유용해	최적해	

최적 경로 설계

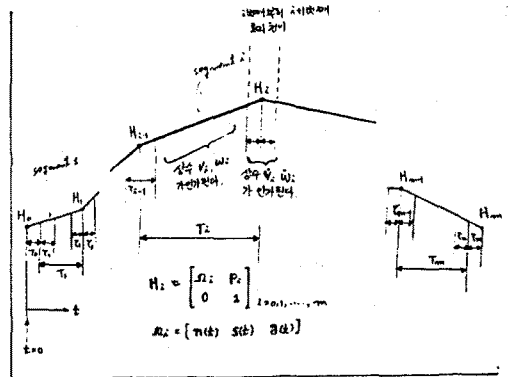
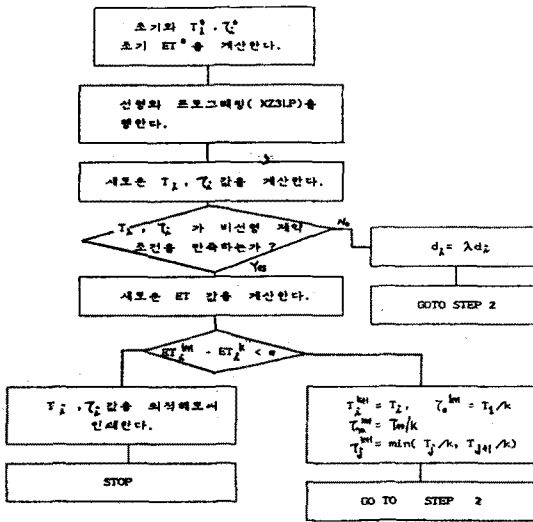


그림 1 어댑터의 직선조각

프로그램의 수행은 평가지표값 ET의 양상이 이전유용한 평가지표값의 1% 미만일때 프로그램은 종료하게된다.

X. 결론

MAP가 최적경로상계 문제를 해결하기 위하여 변형되었다. 이 문제에서 속도 가속도상의 제약조건은 집합을 구성한다.

최적유용해는 제약조건집합의 경계상부근에 제한되어지고 이것을 이용하여 DAPA 프로그램이 도입되었다. 이 예에 대해서 DAPA는 계산시간에 양상을 가져올을 알수있다.

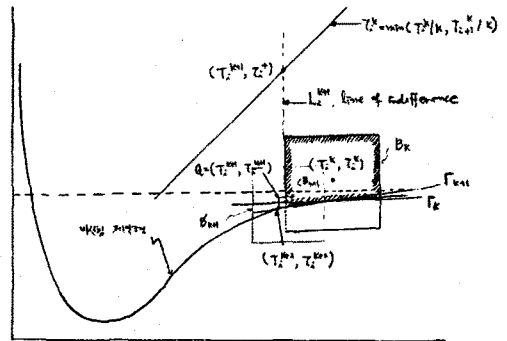


그림 2 거짓대의 도해적 이해

Reference

1. Paul, R., "Manipulator Cartesian Path Control," IEEE Trans. SMC-9, No 11, Nov. 1979, pp. 702-711
2. J.Y.S. Luh, "An anatomy of industrial robot arm controls," IEEE Trans. AC., vol. AC-28, pp. 133-153
3. J.Y.S. Luh, M.W. Walker, "Resolved acceleration control of mechanical manipulators," IEEE Trans AC., vol. AC-25, pp 468-478

4. J.Y.S. Luh, C.S. Lin, "Optimum path planning for mechanical manipulators," ASME Trans J. Dynam. Syst. Meas. Contr., vol 103, 151, June, 1981

5. Taylor, R.H., "Planning and Execution of straight-line manipulator trajectories," Research Report RC 6657 (# 28633), IBM Thomas J. Watson Research Center, July, 1977
6. IMSL int., "IMSL Library, Manual," IMSL vol. 4 ZXOLP ~ ZXALP, 1984