

최표 변환을 이용한 확장 칼만 필터의 구조적 개선

○  
 윤 강섭\* 김 종화\* 황 창선\*\* 이 만형\*  
 부산대학교 기계공학과\* 전기공학과\*\*

Structural Improvement of Extended Kalman Filter  
 using Coordinate Transformation

Kang-Sup Yun\*, Jong-Hwa Kim\*, Chang-Sun Hwang\*\*, Man Hyung Lee\*  
 Dept. of Mechanical Eng.\* Dept. of Electrical Eng.\*\*  
 Pusan National University

Abstract

In recent, Kalman filter technique has been much used as one of technique for tracking of the moving target. But some problem are still remained to be resolved. For example, when Kalman filter technique is applied to nonlinear system, the technique is nonoptimal estimator. Therefore, extended Kalman filter is proposed to reduce modeling error for nonlinear system.

In this study, an extended Kalman filter in Cartesian coordinates is described for moving target, when the radar sensor measures range, azimuth and elevation angle in polar coordinates. And an approximate gain computation algorithm is proposed. In this approach, Kalman gains are computed for three uncoupled filter and multiplied by a Jacobian transformation determined from the measured target position and orientation.

1. 서론

최근 이동표적의 추적문제에서 많이 응용되는 기법은 칼만필터링기법이다. 그러나, 실제 적용에는 많은 문제점들이 남아있다. 그 문제점들중 선형시스템에서 보장되는 최적성을 비선형시스템에서도 유지하도록 제안된 것이 비선형 필터로서, 비선형시스템의 선형화에 근거를 두고 있으며, 선형화 방법중에서 섭동법을 주로 사용한다. 그 대표적인 방법이 확장칼만필터(Extended Kalman Filter)이다. 이러한 확장칼만필터는 상태변수를 추정할때마다 새로운 선형화가 필요하고, 또한 이동표적의 비선형성 해석을 위해서는 상태변수의 증가로 계산량의 증가를 초래한다.

극좌표성분의 측정시스템, 직교좌표계성분의 상태변수로 표현된 확장칼만필터 추적시스템의 경우 오차상호분산과 칼만게인의 상호연성된 요소로 인하여 상당한 계산량을 가지므로 실시간구현에 제약이 따른다. 그래서 관측선을 기준으로한 관측선

좌표계를 도입하여 필터를 구성함으로써 3 개의 비연성연식에 의해 칼만게인을 구한다음, 게인변환 관계식을 이용하여 직교좌표계에 대한 칼만게인으로 변환시켜 필터를 구성하여 필터의 성능 저하 없이 계산량을 줄임으로써 실시간구현가능성을 추구해보고자 한다.

2. 시스템의 모델링 및 필터의 구성

뉴톤의 운동법칙과 추계학적 가속도 모델에 근거를 두고 이동 표적에 대한 상태방정식과 측정방정식을 아래의 같이 구성할 수 있다.

$$X(k+1) = \phi(\Delta t, \alpha) X(k) + w(k) \quad (1)$$

$$m(k) = h(X(k)) + v(k) \quad (2)$$

여기서  $X(k)$ : 직교좌표계에 대한 상태변수

$$X(k) = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$$

$\phi$ : 상태 전이 행렬

$$\phi(\Delta t, \alpha) = \begin{bmatrix} I & \Delta t I & (\Delta t)^2 I/2 \\ \Omega & I & \Delta t I \\ \Omega & \Omega & \alpha I \end{bmatrix}$$

$\alpha$ :  $x, y, z$  축방향의 추계학적 가속도성분의

1차 마코프파라미터 (Markov Parameter)

$$\alpha = [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z]^T$$

$m(k)$ : 잡음이 부가된 레이더의 측정치

$$(거리, 방위각, 고각) \quad m(k) = [r, \theta, \phi]^T$$

$h(X)$ : 직교좌표계와 극좌표계사이의 변환벡터

$w(k), v(k)$ : 상태잡음 시이퀀스, 측정잡음 시이퀀스

$$E[w(i)] = 0, E[v(i)] = 0, E[w(i)w(j)] = Q(i) \delta_{ij}$$

$$E[v(i)v(j)] = R(i) \delta_{ij}, E[w(i)v(j)] = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

이다. 상태잡음 시이퀀스의 요소는 다른속의 성분과 상호 비상관되어 있다. 표적의 거리, 방위각, 고각에 대한 측정잡음은 상호 비상관되어 있고, 단지표적의 거리에만 의존한다고 가정한다. 측정잡음 상호 분산행렬을 다음과 같이 둘 수 있다.

$$R(k) = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\phi^2 \end{bmatrix}$$

여기서  $\sigma_r^2, \sigma_\theta^2, \sigma_\phi^2$ 는 거리, 방위각, 고각성분의 측정잡음 분산이다.

### 좌표 변환을 이용한 확장 칼만 필터의 구조적 개선

상태방정식과 측정방정식에 대하여 확장된 칼만 필터를 구성하면 다음과 같다.

$$\hat{X}(k+1/k) = \phi \hat{X}(k/k) \quad (3)$$

$$\hat{X}(k/k) = X(k/k-1) + K(k)[m(k) - h\hat{X}(k/k-1)] \quad (4)$$

$$K(k) = P(k/k-1)H^T[HP(k/k-1)H^T + R(k)]^{-1} \quad (5)$$

$$P(k/k-1) = \phi P(k-1/k-1)\phi^T + Q(k) \quad (6)$$

$$P(k/k) = P(k/k-1) - K(k)H P(k/k-1) \\ = [I - K(k)H]P(k/k-1) \quad (7)$$

$\hat{X}(k/k)$ 와  $\hat{X}(k/k-1)$ 는  $X(k)$ 의 필터된 추정값과 예견된 추정값,  $Q(k)$ 와  $R(k)$ 는  $w(k)$ 와  $v(k)$ 의 상오분산,  $K(k)$ 는 칼만게인,  $P(k/k)$ 와  $P(k/k-1)$ 는 필터된 추정값과 예견된 추정값의 오차상오분산,  $H$ 는 벡터  $h(X)$ 의  $X(k/k-1)$ 에 대한 Jacobian 행렬,

$$H = \frac{\partial(h(X))}{\partial X} \Big|_{X=\hat{X}(k/k-1)} \quad (8)$$

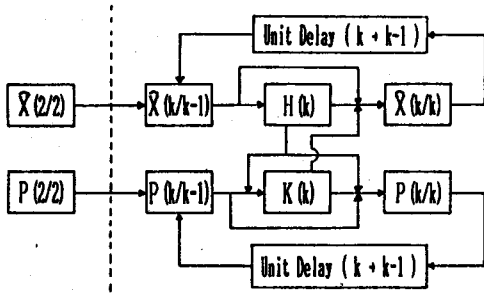


그림.1 확장 칼만 필터의 흐름 선도(1)

직교좌표계에서 표적의 위치좌표( $x, y, z$ )를 극좌표계에서의 위치좌표( $r, \theta, \phi$ )로 바꾸는 변환행렬을  $G(X)$ 라 하면

$$G(X) = \begin{bmatrix} x/r & y/r & z/r \\ -y/\sqrt{x^2+y^2} & x/\sqrt{x^2+y^2} & 0 \\ -xz/r^2\sqrt{x^2+y^2} & -yz/r^2\sqrt{x^2+y^2} & \sqrt{x^2+y^2}/r^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

이고,  $G(X)$ 는  $H$ 의 일부 요소가 된다.

$$H = [G(X) \quad \Omega \quad \Omega] \quad (10)$$

역으로 극좌표계를 직교좌표계로 바꾸는 변환행렬  $F(X) = G(X)^{-1}$ 이다. (11)

식(5), (6), (7)의 필터식을 다음과 같은 형태의 식으로 바꿀 수 있다.

$$P(k/k-1) = \phi P(k-1/k-1)\phi^T + Q(k) \quad (12)$$

$$P(k/k) = P(k/k-1) - P(k/k-1)H^T[HP(k/k-1)H^T + R(k)]^{-1} \\ \cdot HP(k/k-1) \quad (13)$$

$$K(k) = P(k/k)H^T R^{-1}(k) \quad (14)$$

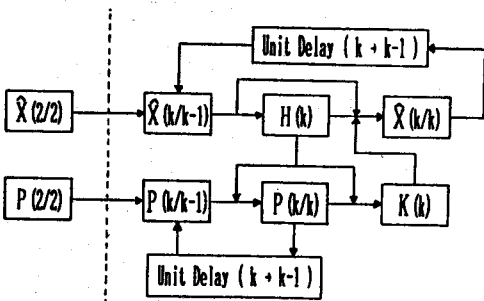


그림.2 확장 칼만 필터의 흐름 선도(2)

### 3. 비연성 필터의 개인 변환 기법

필터 수행시 나타나는 연성된 요소들을 제거할 수 있는 새로운 직교좌표계( $x_0, y_0, z_0$ ; 관측선좌표계)를 도입해보자. 관측선좌표계는 표적을 따라 움직이는 좌표계로서,  $x_0$ 축은 레이다 시스템의 위치와 표적을 연결하는 관측선과 일치하도록 두고,  $y_0$ 축은  $x-y$  평면상에 위치하도록 둔다.

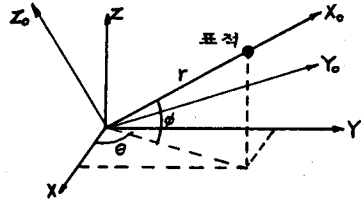


그림.3 관측선 좌표계

관측선좌표계와 극좌표계사이의 변환행렬은 식(9), (11)으로부터 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$G_0(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & -1/r \end{bmatrix} \quad F_0(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad (15) \quad (16)$$

관측선좌표계에 대한 필터식을 다음과 같다.

$$P_0(k/k-1) = \phi P_0(k-1/k-1)\phi^T + Q(k) \quad (17)$$

$$P_0(k/k) = P_0(k/k-1) - P_0(k/k-1)H_0^T [H_0^T P_0(k/k-1)H_0 \\ + R(k)]^{-1} H_0 P_0(k/k-1) \quad (18)$$

$$K_0(k) = P_0(k/k)H_0^T R^{-1}(k) \quad (19)$$

$$\text{여기서 } H_0 = [G_0(X) \quad \Omega \quad \Omega] \quad (20)$$

필터된 추정값의 상오분산 행렬의 요소중 시스템 오퍼레이션에 기여도가 낮은 요소를 제거하여 다음과 같이 가정한다.

$$P_0(k/k) = \begin{bmatrix} P_{xx} & 0 & 0 & P_{xz} & 0 & 0 & P_{x\theta} & 0 & 0 \\ 0 & P_{yy} & 0 & 0 & P_{yz} & 0 & 0 & P_{y\theta} & 0 \\ 0 & 0 & P_{zz} & 0 & 0 & P_{z\theta} & 0 & 0 & P_{z\phi} \\ P_{xz} & 0 & 0 & P_{xz} & 0 & 0 & P_{xz} & 0 & 0 \\ 0 & P_{yz} & 0 & 0 & P_{yz} & 0 & 0 & P_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & P_{zz} & 0 & 0 & P_{zz} & 0 & 0 & P_{zz} \\ P_{x\theta} & 0 & 0 & P_{x\theta} & 0 & 0 & P_{x\theta} & 0 & 0 \\ 0 & P_{y\theta} & 0 & 0 & P_{y\theta} & 0 & 0 & P_{y\theta} & 0 \\ P_{z\theta} & 0 & 0 & P_{z\theta} & 0 & 0 & P_{z\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{z\phi} & 0 & 0 & P_{z\phi} & 0 & 0 & P_{z\phi} \end{bmatrix} \quad (21)$$

식(17)에서  $F_0(k/k-1)$ 의 형태도  $P_0(k/k)$ 와 같은 형태가 된다. 필터된 추정값의 오차상오분산행렬의 요소와 칼만게인사이의 관계식을 다음과 같은 3개의 비연성된 형태도 나타낼 수 있다.

$$K_0(k) = \begin{bmatrix} P_{xx}/\sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & P_{yy}/r\sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & P_{zz}/r\sigma_\phi^2 \\ P_{xz}/\sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & P_{yz}/r\sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & P_{z\theta}/r\sigma_\phi^2 \\ P_{x\theta}/\sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & P_{y\theta}/r\sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & P_{z\phi}/r\sigma_\phi^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

직교좌표계에 비해서 작은 계산량으로 관측선 좌표계의 칼만게인을 구하였으나, 실제 필터수행 좌표계는 기준직교좌표계이므로 관측선좌표계의 칼만게인  $K_o(k)$  을 기준좌표계의 칼만게인  $K(k)$  로 변환하는 관계식에 대해서 알아보자. 우선 직교좌표계와 극좌표계에서의 추정값의 오차상호분산사이의 관계를 조사해보자. 직교좌표계의 극좌표계의 위치성분의 관계식은 다음과 같다.

$x = r \cos\theta \cos\phi$ ,  $y = r \sin\theta \cos\phi$ ,  $z = r \sin\theta$   
 $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta r, \Delta\theta, \Delta\phi$  를 각 방향성분에 대한 추정값의 오차로 정의하고, 그 관계식을 구하면,

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\phi & -r \sin\theta \cos\phi & -r \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \cos\phi & r \cos\theta \cos\phi & -r \sin\theta \sin\phi \\ \sin\theta & 0 & r \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \\ \Delta\phi \end{bmatrix}$$

여기서  $\Delta_{cp} = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]^T$ ,  $\Delta_{pp} = [\Delta r, \Delta\theta, \Delta\phi]^T$  라 가정하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta_{cp} = F(X) \Delta_{pp} \quad (23)$$

같은 방법으로 속도 성분과 가속도 성분에 대한 오차를 다음과 같이 정의하자.

$$\Delta_{cv} = [\Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}, \Delta \dot{z}]^T, \quad \Delta_{pv} = [\Delta \dot{r}, \Delta \dot{\theta}, \Delta \dot{\phi}]^T$$

$$\Delta_{ca} = [\Delta \ddot{x}, \Delta \ddot{y}, \Delta \ddot{z}]^T, \quad \Delta_{pa} = [\Delta \ddot{r}, \Delta \ddot{\theta}, \Delta \ddot{\phi}]^T$$

그로면, 이들의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \Delta_{cp} \\ \Delta_{cv} \\ \Delta_{ca} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(X) & 0 & 0 \\ 0 & F(X) & 0 \\ 0 & 0 & F(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{pp} \\ \Delta_{pv} \\ \Delta_{pa} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$P_p(k/k)$  와  $P_c(k/k)$  를 직교좌표계와 극좌표계에 대한 오차 상호분산으로 다음과같이 정의한다.

$$P_p(k/k) = E \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_{pp} \\ \Delta_{pv} \\ \Delta_{pa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{pp}^T & \Delta_{pv}^T & \Delta_{pa}^T \end{bmatrix} \right\} \quad (25)$$

$$P_c(k/k) = E \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_{cp} \\ \Delta_{cv} \\ \Delta_{ca} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{cp}^T & \Delta_{cv}^T & \Delta_{ca}^T \end{bmatrix} \right\} \quad (26)$$

그러면, 두 오차상호분산의 관계는 다음과 같다.

$$P_c(k/k) = \begin{bmatrix} F(X) & 0 & 0 \\ 0 & F(X) & 0 \\ 0 & 0 & F(X) \end{bmatrix} P_p(k) \begin{bmatrix} F^T(X) & 0 & 0 \\ 0 & F^T(X) & 0 \\ 0 & 0 & F^T(X) \end{bmatrix} \quad (27)$$

한편 극좌표계에서의 거리 단위를 가지는 오차백터를 다음과 같이 정의하자.

$$\Delta = [\Delta r, \Delta\theta, \Delta\phi, \Delta \dot{r}, \Delta \dot{\theta}, \Delta \dot{\phi}, \Delta \ddot{r}, \Delta \ddot{\theta}, \Delta \ddot{\phi}]^T \quad (28)$$

그런데 이 성분들은 관측선좌표계의 오차 성분과 같아지므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P(k/k) = E[\Delta \Delta^T] \quad (29)$$

그리고, 관측선 좌표계의 오차성분과 기준 좌표계에 대한 극좌표계의 오차 성분사이의 관계를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta = \begin{bmatrix} F_o(X) & 0 & 0 \\ 0 & F_o(X) & 0 \\ 0 & 0 & F_o(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{pp} \\ \Delta_{pv} \\ \Delta_{pa} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_{pp} \\ \Delta_{pv} \\ \Delta_{pa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o(X) & 0 & 0 \\ 0 & G_o(X) & 0 \\ 0 & 0 & G_o(X) \end{bmatrix} \Delta \quad (31)$$

식(25), (26), (29), (31) 에 의해서

$$P_p(k/k) = \begin{bmatrix} G_o(X) & 0 & 0 \\ 0 & G_o(X) & 0 \\ 0 & 0 & G_o(X) \end{bmatrix} P_o(k/k) \begin{bmatrix} G_o^T(X) & 0 & 0 \\ 0 & G_o^T(X) & 0 \\ 0 & 0 & G_o^T(X) \end{bmatrix} \quad (32)$$

식(32)를 식(27)에 대입하면,

$$P_c(k/k) = \begin{bmatrix} F(X) & 0 & 0 \\ 0 & F(X) & 0 \\ 0 & 0 & F(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_o(X) & 0 & 0 \\ 0 & G_o(X) & 0 \\ 0 & 0 & G_o(X) \end{bmatrix} P_o(k/k) \begin{bmatrix} G_o^T(X) & 0 & 0 \\ 0 & G_o^T(X) & 0 \\ 0 & 0 & G_o^T(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^T(X) & 0 & 0 \\ 0 & F^T(X) & 0 \\ 0 & 0 & F^T(X) \end{bmatrix} \quad (33)$$

이다. 식(14)의  $P(k/k)$ 는 식(25)의  $P_c(k/k)$  이므로

$$K(k) = P(k/k) \begin{bmatrix} G^T(X) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1}(k) = \begin{bmatrix} F(X) & 0 & 0 \\ 0 & F(X) & 0 \\ 0 & 0 & F(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_o(X) & 0 & 0 \\ 0 & G_o(X) & 0 \\ 0 & 0 & G_o(X) \end{bmatrix} P_o(k/k) \begin{bmatrix} G_o^T(X) & 0 & 0 \\ 0 & G_o^T(X) & 0 \\ 0 & 0 & G_o^T(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^T(X) & 0 & 0 \\ 0 & F^T(X) & 0 \\ 0 & 0 & F^T(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G^T(X) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1}(k) = \begin{bmatrix} F(X) & 0 & 0 \\ 0 & F(X) & 0 \\ 0 & 0 & F(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_o(X) & 0 & 0 \\ 0 & G_o(X) & 0 \\ 0 & 0 & G_o(X) \end{bmatrix} P_o(k/k) \begin{bmatrix} G_o^T(X) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1}(k) \quad (34)$$

그러므로 게인 변환 관계식은 다음과 같다.

$$K(k) = \begin{bmatrix} F(X) & 0 & 0 \\ 0 & F(X) & 0 \\ 0 & 0 & F(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_o(X) & 0 & 0 \\ 0 & G_o(X) & 0 \\ 0 & 0 & G_o(X) \end{bmatrix} K_o(k) \quad (35)$$

게인변환관계식을 이용하여 기준좌표계의 칼만게인을 구하여 기준좌표계에 대한 필터를 완성한다.

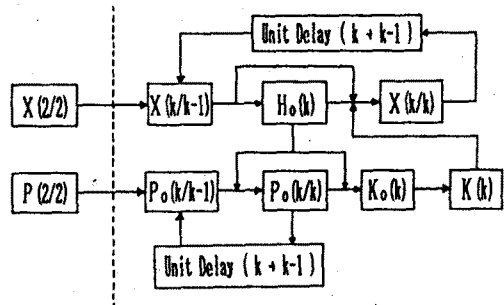


그림.4 게인 변환 필터의 흐름 선도

4. 시뮬레이션

확장 칼만 필터와 개인 변환 필터에 동일한 조건을 부여하여 시뮬레이션을 행하였다.

1) 측정시스템(레이다)

표적의 측정가능성; 100%, 샘플링 시간; 40 Hz  
관측오차의 표준편차  $\sigma_r = 15$  m (거리의 약 10%)

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\phi} = 0.003 \text{ rad}$$

2) 필터된 추정값의 초기치 선정 방법

$$\hat{X}(2/2) = m(2), \quad \hat{\dot{X}}(2/2) = 0$$

$$\hat{\ddot{X}}(2/2) = [m(2) - m(1)] / \Delta t$$

3) Marcov Parameter  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 1.0$

4) 표적의 운동상태

(1) 원운동; 고도 150 m, 반경 1500 m, 속도 200 m/s

(2) 직선운동(책략이 포함된 경우)

초기상태; 고도 100 m, 속도: 150 m/s

책략이후(3 sec); 속도 300 m/s, 상승각 60°

5. 결론

이동 표적의 추적 문제에서 표적의 상태변수는 직교좌표계의 성분들, 측정시스템은 극좌표성분을 가지는 경우에 관측선좌표계를 도입하고, 시스템 오퍼레이션에 기여도가 낮은 오차상호분산행렬 요소를 제거하여 관측선좌표계에 대한 칼만게인을 구하고, 이를 직교좌표계의 칼만게인으로 변환하는 개인변환기법을 사용하여 필터를 구성하였다.

개인변환필터와 확장칼만필터에 동일한조건을 주었을때 거의 같은 초기과도현상, 칼만게인, 예측 추정성능을 나타내고, 책략이 인가된 경우에도 두

필터는 거의 동일한 추정성능을 나타내고 있다.

두 필터에서 칼만게인의 계산량은 확장칼만필터에서는 약 860번, 개인변환필터는 약 230번 정도의 곱셈을 행하므로 칼만게인의 계산량을 약 70% 줄일 수 있다. 그리고 전체 필터의 수행시 계산량은 약 55%를 줄일 수 있었다.

따라서 추적시스템에서 개인변환기법을 사용한 필터로 구성될 경우 마이크로 프로세서로도 구현이 가능할 것으로 사료된다.

6. 참고 문헌

1. Singer, R.A., Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets, IEEE, AES-6, NO.4, Jul 1970
2. McAulay, R.J., Denlinger, E., A decision-directed adaptive tracker, IEEE, AES-9, Mar 1973
3. Medich, J.S., Stochastic optimal linear estimation and control New York: McGraw-Hill, 1969.
4. Ramachandra, K.V., Srinivasan, V.S., Steady state results for the x,y,z, Kalman tracking filter IEEE, AES-13, NO.4, Jul 1977
5. H. Goldstein, Classical Mechanics, Cambridge Mass.: Addison-Wesley, 1950
6. A. Gelb, Applied Optimal Estimation, MIT Press, Cambridge, 1979
7. 이 만형, "기동목표물의 수학적 모델링과 칼만 필터를 이용한 실시간 추적 기법의 개발", 산학 협동 재단 최종 연구 보고서, 1986.7

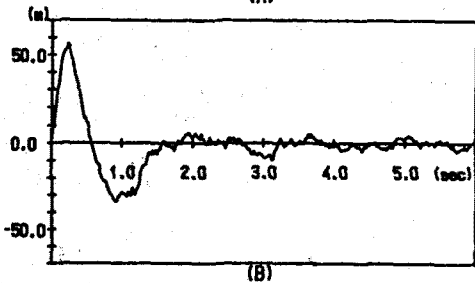
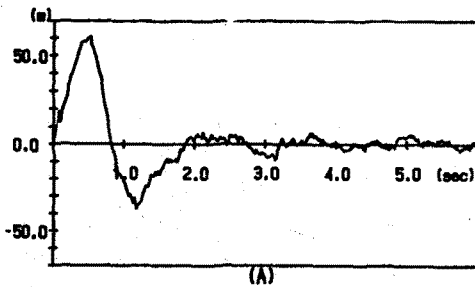


그림.5 원운동의 경우 X 축의 위치 추정 오차  
A) 확장 칼만 필터 B) 개인 변환 필터

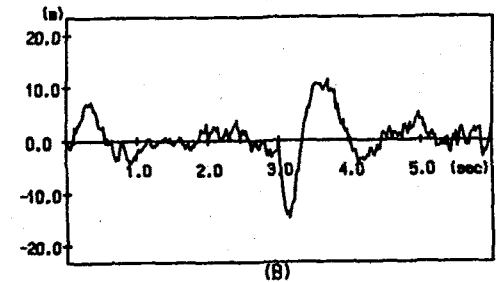
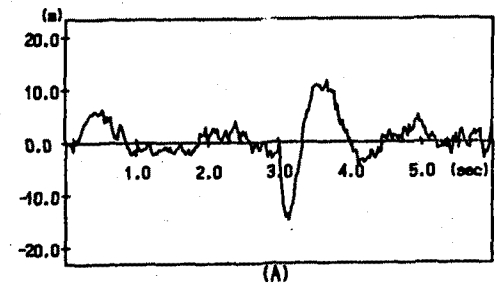


그림.6 직선운동의 경우 Z 축의 위치 추정 오차  
A) 확장 칼만 필터 B) 개인 변환 필터