

전송선의 전하 분포 및 등전위선 산출

정 백호, 박 경희, 김 세영, 송 재현, 김 수중  
 경북대학교 전자공학과

Charge Distributions and Equipotential lines  
 in Multiconductor Transmission lines

Baek Ho Jung, Kyeong Hee Park, Che Young Kim, Jae Won Song, Soo Joong Kim  
 Dept. of Electronics, Kyungpook National University

Abstract

A numerical scheme is considered for computing charge distributions and drawing equipotential lines for multiconductor transmission lines with arbitrary cross sections. Two-dimensional integral equation superposed by the charges is numerically calculated by the method of moments. Here in Galerkin's method special pulses cut into halves chosen for expansion and testing functions facilitate the numerical computations in solving the integral equation. Numerical examples are given for some system of which the shell conductor is grounded as the reference zero of potential.

I. 서론

전송선의 해석에 있어서 전송선 소자인 용량과 인덕턴스 등은 그 특성을 이해하는데 매우 중요한 파라미터들이다. 그러나 몇가지 특정한 형태의 전송선에 대한 엄밀해는 주어지나 단면의 기하학적 구조가 변형된 경우는 계산이 어렵다.

본 논문에서는 이의 해결을 위해 임의 단면을 가진 전송선이라도 모멘트 방법을 적용해 각 도체의 전하 분포를 얻어 파라미터들을 계산하는 방법을 제안하였다. 그리고 이 전하 분포의 결과를 이용하여 그 단면의 등전위선을 그리는 새로운 방법을 보였다. 전하 분포의 계산에는 point matching 방법과, 전개 함수와 시험(testing) 함수로서 중앙점에서 나뉘어진

두 개의 반펄스를 갖는 특수한 펄스 함수를 사용한 Galerkin 방법에 의하여 각각의 결과를 비교 검토하였다.

본 방법의 적용은 모든 구조에 가능하나 차폐되어 있지 않으면 기준이 되는 영 전위의 도체 설정에 임의성이 따르므로 외부도체가 접지된 경우를 택하였다[1].

II. 이론

전송방향으로 균일하고 임의 단면을 가진 그림 1과 같은 여러개의 완전도체로 구성된 전송선에서 도체 표면에 분포된 전하는 경계조건이 고려된

$$\frac{1}{2\pi\epsilon} \oint_C \sigma(\mathbf{r}') \ln \frac{k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dc' = V_i \quad (1)$$

에 의해 구해진다. 여기서  $\sigma(\mathbf{r}')$ 은 도체 표면 전하밀도이며  $k$ 는 영전위를 위한 결정되어야 할 상수다. 그리고 적분은 모든 도체의 단면 표면  $C$ 를 따라 이루어진다.  $V_i$ 는  $i$ 번째 도체의 전위이며  $i = 0, 1, 2, \dots, N_c$ 이고,  $N_c$ 는 접지된 도체를 제외한 도체의 갯수다.

모든 도체의 단면을 따라  $N$ 개의 부분으로 나눈 후

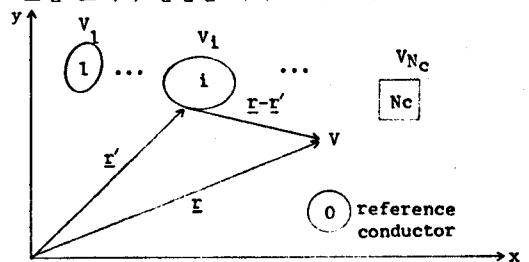


그림 1. 임의 단면의 전송선

전계 함수  $\{fn(\underline{r}), n = 1, 2, \dots, N\}$  을 이용해 식 (1)의 전하 밀도  $\sigma(\underline{r}')$ 을

$$\sigma(\underline{r}') = \sum_{n=1}^N \sigma_n fn(\underline{r}') \quad (2)$$

과 같이 표현할 수 있다.

식 (2)를 식 (1)에 대입하고 시험 함수  $\{W_m, m = 1, 2, \dots, N\}$ 으로 시험하면, 그 결과는 다음과 같은 행렬식으로 주어진다.

$$[lmn] [\sigma_n] = [\phi_m] \quad (3)$$

여기서

$$l_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_C dc W_m(\underline{r}) \int_C dc' fn(\underline{r}') \ln \frac{k}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (4-1)$$

$$\phi_m = \int_C dc W_m(\underline{r}) V_i \quad (4-2)$$

이다. 적절한 전계함수와 시험함수를 사용하여 식 (3)의 역행렬로부터 미정계수  $\sigma_n$ 을 구한다. 그리고 전체 전하의 합은 영임을 이용하여 행렬식 (3)에서 미지수  $k$ 를 소거할 수 있다.

전송선을 구성하는 도체의 모든 단면을  $N$ 개의 조각으로 나누고, 각 조각의 중앙에서만 식 (1)을 만족하는 point matching 방법을 적용하면 식 (4)는

$$l_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Delta C_n} dc' \ln \frac{k}{|\underline{r}^m - \underline{r}'|} \quad (5-1)$$

$$\phi_m = V_i \quad (5-2)$$

가 된다.

식 (5-1)의 근사적분을 위해 그림 2와 같은 좌표계에서

$$R_{mn} = \underline{r}^m - \underline{r}^n \quad (6)$$

$$\underline{r} - \underline{r}' = R_{mn} - \frac{\Delta C_n}{2} \underline{u}$$

이며,  $\underline{u}$ 는  $C$ 를 따른 단위벡터이다. 식 (6)을 식 (5)에 대입하고  $R_{mn} \gg \Delta C_n/2$  이라고 가정하면

$$l_{mn} = \begin{cases} \Delta C_n (K - \ln R_{mn}), & m \neq n \\ \Delta C_n (K - \ln \frac{\Delta C_n}{2e}), & m = n \end{cases} \quad (7)$$

을 얻는다. 여기서  $K = \ln k$  이며  $e$  는 자연로그의 밑

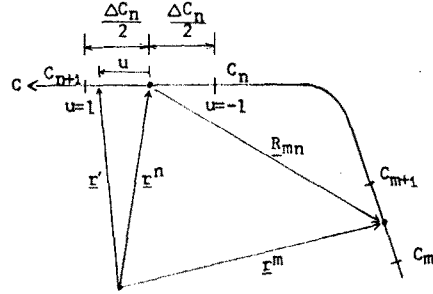


그림 2. 전송선 단면의 부분

수이다. 그리고  $R_{mn} = \{(\underline{x}^n - \underline{x}^m)^2 + (\underline{y}^n - \underline{y}^m)^2\}^{1/2}$  이다.

결과해의 타당성을 조사하기 위하여 Galerkin의 방법으로도 전하 분포를 산출하고자 한다. 여기에서 전계 및 시험 함수로서  $\Delta C_n$  내에서는 크기가 1 이고 그외 구간은 0인 펄스함수를 사용한다. 그림 3과 같이  $\Delta C_n$ 의 중앙점에서 나뉘어진 두개의 반 펄스를 가정하여 식 (4)를 계산하면, 그 결과는

$$l_{mn} = \begin{cases} \frac{\Delta C_n \Delta C_m}{4} [K - \ln(R_{11}R_{12}R_{21}R_{22})] \\ \frac{\Delta C_n \Delta C_m}{4} [K - 2 \ln \frac{(\Delta C_n)^2}{8e}] \end{cases} \quad (8-1)$$

$$\phi_m = \Delta C_m V_i \quad (8-2)$$

가 된다. 여기서  $R_{11}, R_{12}, R_{21}$ , 그리고  $R_{22}$ 는 그림 3과 같이 각 반펄스의 중심간 거리이다.

이와 같이 계산된 전하밀도로부터 용량행렬과 인덕턴스 행렬의 요소를 계산할 수 있다[2].

등전위선은 식 (3)에서 구한 전하밀도에 의한 전위

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N \int_{\Delta C_n} Q_n(\underline{r}') \ln \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dc' \quad (9)$$

로부터 계산될 수 있다.

각 조각의 전하 밀도를 선형적으로 가정하여 그림 4와 같이  $n$ 번째 조각의 두 중앙점에서 각각의 전하 밀도를 다음과 같이 얻는다.

$$Q_{n1} = \frac{1}{4} (\sigma_{n+1} + 3\sigma_n) \quad (10-1)$$

$$Q_{n2} = \frac{1}{4} (3\sigma_{n+1} + \sigma_n) \quad (10-2)$$

$\underline{r}$ 에서의 전위는 반으로 나뉘어진 두 조각 전하에 의한 평균으로 근사화 시켜 식 (10)을 식 (9)에 대입하면

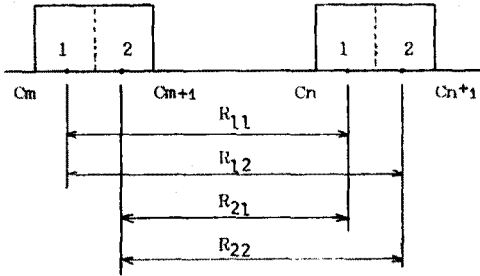


그림 3. 반평스의 중심간 거리

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N \left[ Q_{n1} \ln \frac{1}{R_{n1}} + Q_{n2} \ln \frac{1}{R_{n2}} \right] \Delta C_n \quad (11-1)$$

이 된다. 여기서

$$R_{n1} = \{(X-X_{n1})^2 + (Y-Y_{n1})^2\}^{1/2}$$

$$R_{n2} = \{(X-X_{n2})^2 + (Y-Y_{n2})^2\}^{1/2} \quad (11-2)$$

이며  $X_{n1}$ ,  $X_{n2}$ ,  $Y_{n1}$  및  $Y_{n2}$ 는 두 조각의 각 중앙점의 좌표이다. 그러므로 식 (10)과 식 (11)로부터 임의 위치의 전위를 구할 수 있다.

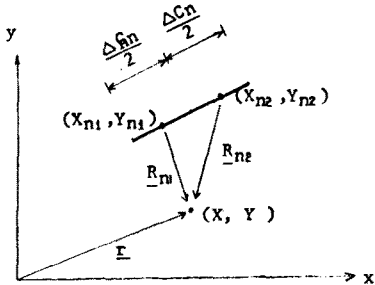


그림 4. 전위 계산을 위한 좌표계

III. 적용 예

수치해석의 예로서 그림 5와 같은 동축원통 케이블과 차폐된 평행 2선에 이 방법을 적용하였다. 그림 5 (a)의 동축 케이블에서 두 도체의 반경비는  $b/a=2$ 이며, 외부 도체는 접지되고 내부 도체의 전위가 1V일때 두 도체의 중심간 거리  $d$ 에 대한 외부도체에 분포된 음전하의 밀도를 그림 6에 나타내었다. 표 1은  $d=0$ 인 경우, 전하 밀도로부터 계산된 용량이다. 그리고 그림 7은  $d$ 가 0과  $0.3(b-a)$ 일때 계산된 용량이 참값에 비교되어 그 상대 오차의 수렴을 보인다.

동축 케이블이 그림 5 (b)와 같이 외부도체가 둘러싸는 일정하면서 타원으로 변형될 경우, 용량을 계산하여 표 2에 실었다. 위의 예에서 도체당 조각의 수  $N$ 은 각각 30으로 하였다.

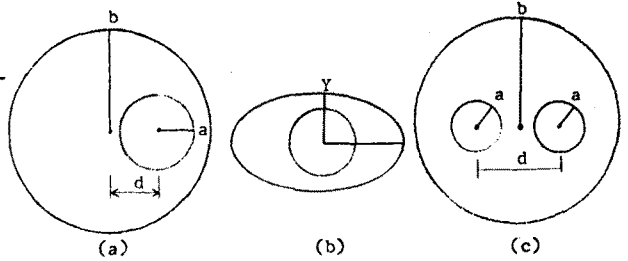


그림 5. 수치해석에 적용되는 전송선

다음의 예로 그림 5의 (c)와 같은 구조에서  $a=1$ ,  $b=8$ , 그리고  $d=7$ 로 택하여 외부 도체가 접지되고 두 내부도체의 전위가 1V일때 각 도체에 분포된 전하밀도를 그림 8에 나타내었다. 이 구조의 단면 등전위선은 그림 9에 보였다.

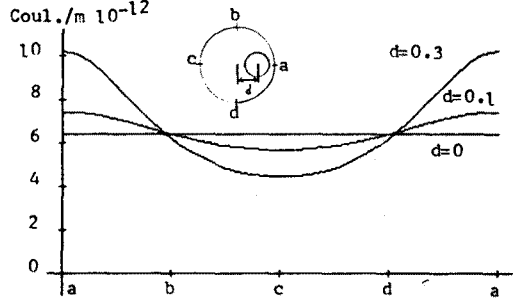
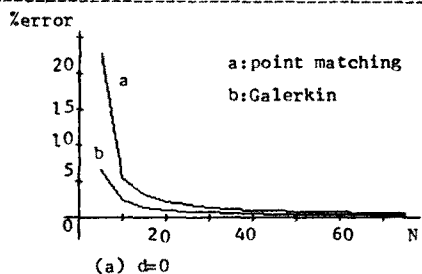
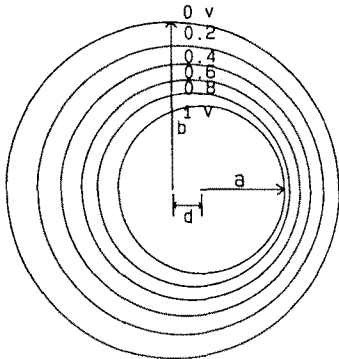
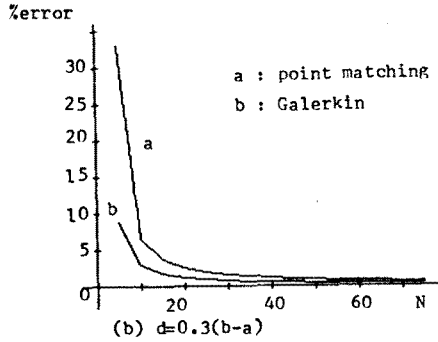


그림 6. 외부도체의 음전하 밀도

표 1. 동축 케이블의 용량 ( $d=0$ )  
exact value  $C=80.259$ [pF/m]

N	point matching		Galerkin's	
	computed	%error	computed	%error
5	98.557	22.80	85.592	6.64
10	84.640	5.46	82.211	2.43
15	82.800	3.17	81.464	1.50
20	82.071	2.26	81.136	1.09
25	81.673	1.76	80.950	0.86
30	81.421	1.45	80.830	0.71
35	81.246	1.23	80.746	0.61
40	81.118	1.07	80.684	0.53
45	81.019	0.95	80.636	0.47
50	80.941	0.85	80.598	0.42
55	80.878	0.77	80.566	0.38
60	80.825	0.71	80.540	0.35
65	80.781	0.65	80.519	0.32
70	80.743	0.60	80.500	0.30
75	80.710	0.56	80.484	0.28





(c)  $d=0.3(b-a)$ 일때의 등전위선

그림 7. 동축 케이블 용량의 상대 오차와 등전위선

표 2. 그림 5 (b) 구조의 용량

N	Y=1.9 (10%)		Y=1.7 (30%)	
	Point	Galerkin	Point	Galerkin
5	99.097	86.103	103.423	90.104
10	85.348	82.902	90.986	88.390
15	83.539	82.188	89.428	87.953
20	82.817	81.870	88.770	87.713
25	82.422	81.687	88.388	87.559
30	82.170	81.569	88.135	87.451
35	81.994	81.485	87.955	87.371
40	81.865	81.423	87.819	87.310
45	81.766	81.375	87.713	87.261
50	81.687	81.336	87.628	87.222
55	81.622	81.305	87.558	87.189
60	81.569	81.279	87.499	87.162
65	81.524	81.257	87.450	87.138
70	81.486	81.238	87.407	87.118
75	81.453	81.222	87.370	87.106

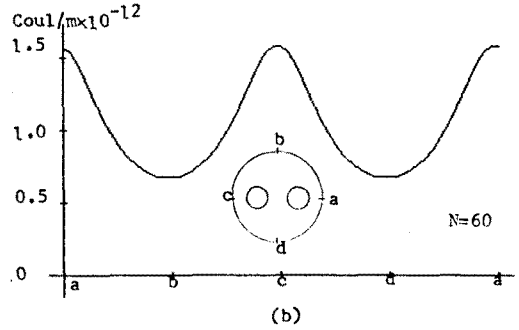


그림 8. 그림 5 (c) 구조의 전하밀도  
(a) 내부도체 (b) 외부도체(negative)

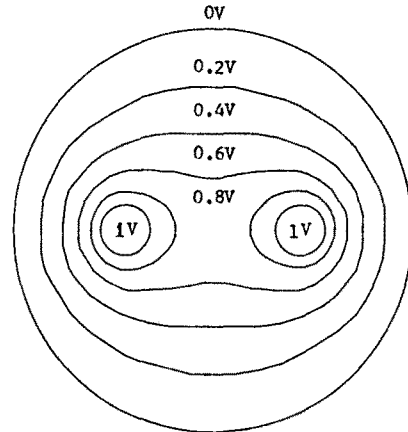


그림 9. 그림 5 (c)의 등전위선

IV. 결론

본 논문의 해석 방법을 적용하여 얻어진 결과들은 엄밀해에 근소한 오차로 잘 일치하고 있다. 그리고 설드 된 경우뿐만 아니라 어떠한 구조에 대해서도 기준이 되는 명전위 도체가 주어진다면 이 방법들을 적용하여 전하밀도와 용량 행렬 및 인덕턴스 행렬을 계산할 수 있고 단면의 등전위선을 그릴 수 있다.

참고 문헌

[1] P.P.Silvester and R.L.Ferrari, Finite elements for electrical engineers. Cambridge: Cambridge university press, 1983

[2] C. Wei, R.F. Harrington, J.R. Mautz, and T.K. Sarkar, "Multiconductor transmission lines in multilayered dielectric media," IEEE Trans., Microwave Theory Tech., vol. MTT-32, pp.439-450, Apr. 1984

