

급수전개된 basis를 갖는 모멘트방법에 의한
파수영역의 역산란 방법

최 현철^{*0}, 김 세운^{**}, 나 정웅^{*}

* 한국 과학 기술원 전기 및 전자공학과, ** 한국과학기술원 물리전자 연구부

A Spectral Inverse Scattering Technique
by Using Moment Method with Series-Expanded Basis

Hyun-Chul Choi, Se-Yun Kim, Jung-Woong Ra

* Dept. of E.E. KAIST, ** Center of Appl. Phys and E.E., KAIST

Abstract

A spectral inverse technique, which was developed by applying the pulse basis moment method procedure on the direct scattering problem in the reverse sequence for the reconstruction of complex permittivity profiles inside inhomogeneous dielectric objects, is modified to be applicable to the moment method with series-expanded basis.

By performing numerical simulations for various type of dielectric objects, it is demonstrated that this inverse technique provides close reconstruction of permittivity profiles. Furthermore, compared to the previous scheme of the pulse basis, the presented method is shown to reduce the computation cost, relative error of reconstructed permittivity profiles by averaging in each cell, and the ill-posedness inherent to this inverse scattering problem.

I. 서 론

최근 컴퓨터의 급속한 발달에 힘입어 전자파 산란문제를 수치해석적인 방법으로 푸는 여러가지 기법들이 개발되어 왔다. [1] 특히 Richmond [2]는 비균일한 유전체에 의한 전자파 산란문제를 모멘트방법으로 풀었는데, 이를 역으로 적용함으로써 유전체의 비유전율분포를 재구성하는 역산란방법이 발표되었다. [3] 이 방법으로 재구성된 유전율 분포는 입사파장에 비해 매우 작은 크기까지 분별될 수 있는 반면, 산란파에 약간의 잡음이 더해져도 재구성된 유전율분포 값이 원래의 유전율분포와는 엄청난 차이를 보였다. [4]

이러한 어려움을 피하는 방안으로 모멘트 방법을 파수(spectral)영역에서 적용하면, 역산란 계산식이 간단한 지수함수 형태로 표현될 뿐만 아니라 역산란 변수들이 서로 분리되며, 이들 각각이 역산란 계산과정에 미치는 영향을 잘 살펴 볼 수 있었다. [5] 그러나 공간영역이나 파수영역에서의 역산란 계산식을 유도시 펄스 basis를 사용한 모멘트 방법을 적용하기 위해 유전체를 사용과장에 비해 훨씬 작은

소영역으로 나누므로, 소영역의 갯수 N 이 많아지게 된다. 그런데 N 이 증가함에 따라 역산란 계산 용량이 엄청나게 늘어나는 문제점이 있을 뿐만 아니라, 역산란 계산시 역변환 시켜야 할 파수영역의 산란행렬 역시 ill-posed 특성 [4]을 갖게 되어 잡음의 영향을 크게 받는 단점이 있음을 발견하였다.

본 연구에서는 소영역 N 의 갯수도 줄이면서 역산란 계산시 ill-posed 특성이 나타나지 않도록 하기 위하여, 파수영역에서 모멘트 방법을 적용시 유전체를 파장정도의 크기를 갖는 소영역으로 나누는 대신 소영역내의 전자파를 급수전개된 basis를 위하여 [6] 새로운 역산란 계산식을 유도하였다. 또한 제시한 역산란 방법의 유용성과 장단점을 살펴보기 위하여, 편이상 y 방향으로 막대모양으로 생긴 간단한 유전체모형에 대해 수치계산을 행하였다

II. 급수전개된 basis를 갖는 파수 영역의 역산란 계산방법

그림 1과 같이 z 방향으로 분극된 평면파 $u^i(x, y)$ 가 단면 S 를 갖는 유전체 기둥에 입사하여 발생하는 전체 전계는 z 방향 성분만을 갖는 $u(x, y)$ 로 다음과 같은 적분 방정식을 만족하여야 한다. [2]

$$u(x, y) = u^i(x, y) - \frac{jk_0^2}{4} \iint_S dx' dy' p(x', y') H_0^{(2)}\{k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\}. \quad (1)$$

여기서 k_0 는 유전체 외부 영역에서의 파수(wavenumber)를 의미하고, $H_0^{(2)}$ 는 제 2종 Hankel함수를 나타내며, p 는 유전체 내부 영역 S 내에 유기되는 등가 전류로 다음과 같이 정의된다.

$$p(x, y) = (\epsilon(x, y) - 1) u(x, y). \quad (2)$$

식 (2)에서 $\epsilon(x, y)$ 는 S 내의 비유전율 분포를 의미한다. 본 논문에서는 시간 의존 함수를 $e^{-j\omega t}$ 로 취하였는데, 실제 전자파의 표현식에서는 생략하였다.

식 (1)의 양변을 변수 y 에 대하여 푸리에(Fourier) 변환을 취하면, 식 (1)을 다음과 같은 복소 β -평면상의 파수 영역에서의 적분 방정식으로 변환할 수 있다. [5]

$$U(x, \beta) = U^i(x, \beta) + F(x, \beta) I(\beta), \quad (3)$$

$$F(x, \beta) = -\frac{jk_0^2}{2} \frac{\exp(-j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} x)}{\sqrt{k_0^2 - \beta^2}}, \quad (4)$$

$$I(\beta) = \iint_{\Omega} dx' dy' p(x', y) \exp(+j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} x' + j\beta y'). \quad (5)$$

여기서 $U(x, \beta)$ 는 전계 $u(x, y)$ 를 y 에 대해 푸리에 변환하여 얻은 각스펙트럼(angular spectrum)을 나타낸다.

basis를 펄스함수로 취한 경우 각 소영역의 한변의 길이를 $2d$ 로 사용 파장에 비해 매우 작게 취하였으므로 소영역 내에서 유전율 분포와 전장을 상수값으로 근사가 가능하다. 따라서 소영역의 갯수 N 의 값이 크기 때문에 역산란 계산을 할 경우 계산시간이 엄청나게 늘어난다. 만약 단면 S 를 그림 2와 같이 각 소영역의 한변이 $2ad$ 를 갖도록 분할하면, 전체 소영역의 갯수 M 은 N/a^2 로 감소한다. 이 경우 단면 S 내의 m 번째 소영역 S_m 내의 비유전율 $\epsilon(x, y)$ 를 소영역의 중심점에서의 비유전율 값 ϵ_m 으로 근사화시킨다. 그러나 소영역 S_m 의 크기가 크기 때문에 S_m 내의 전계 u 를 하나의 basis로 나타내기는 곤란하다. 따라서 여러가지 급수전계 가운데 한 예로서 $u(x, y)$ 를 다음과 같은 푸리에 급수로 표현하자.

$$u(x, y) = \sum_{p=-P}^P \sum_{q=-Q}^Q u_{mpq} \exp\{jp(\frac{x-x_m}{L}) + jq(\frac{y-y_m}{L})\}. \quad (6)$$

여기서 L 은 임의의 상수이다. 식 (6)을 식 (5)에 대입하여 정리하면 $I(\beta)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I(\beta) = \sum_{m=1}^M G_m(\beta) (\epsilon_m - 1) \left\{ \sum_{p=-P}^P \sum_{q=-Q}^Q u_{mpq} B_{pq}(\beta) \right\}. \quad (7)$$

$$G_m(\beta) = \exp(j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} x_m + j\beta y_m), \quad (8.a)$$

$$B_{pq}(\beta) = \frac{2\sin\{(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} + \frac{p}{L})ad\}}{\sqrt{k_0^2 - \beta^2} + \frac{p}{L}} \cdot \frac{2\sin\{(\beta + \frac{q}{L})ad\}}{\beta + \frac{q}{L}}. \quad (8.b)$$

식 (7)과 (8)을 식 (3)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 복소 β -평면에서의 선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{m=1}^M G_m(\beta) \left\{ \sum_{p=-P}^P \sum_{q=-Q}^Q (\epsilon_m - 1) u_{mpq} B_{pq}(\beta) \right\} = \frac{U(x, \beta) - U^i(x, \beta)}{F(x, \beta)} \quad (9)$$

식 (9)를 이용하여 M 개의 비유전율 값인 ϵ_m 을 계산하는 과정은 다음과 같은 새단계로 구성되어 있다.

첫째, 산란 전계를 측정하여 얻은 자료로부터 유전체 내부에 유기되는 등가전류를 구한다. 입사와 $u^i(x, y)$ 와 유전체로부터 산란된 전체 전계 $u(x, y)$ 를 $x = x_0$ 선 상에서 측정하고, 이들을 변수 y 에 대하여 푸리에 변환시키면 $x = x_0$ 선 상에서의 각각의 스펙트럼인 $U(x_0, \beta)$ 와 $U^i(x_0, \beta)$ 를 알 수 있다. 그러므로 식 (9)의 행렬역변환으로부터 등가 유기 전류 p_{mpq} 를 계산할 수 있다.

둘째, 앞 단계에서 구한 등가 유기 전류로부터 유전체 내부의 전계를 구한다. 앞 단계에서 구한 p_{mpq} 인 $(\epsilon_m - 1)u_{mpq}$ 를 식 (9)에 대입하면, 식 (9)의 좌변항은 변수 β 에 대한 함수 값으로 주어진다. 따라서 식(9)를 변수 β 에 대하여 역 푸리에 변환을 취하면 임의의 점 (x, y) 에서의 전계 $u(x, y)$ 를 구할 수 있다.

$$u(x, y) = u^i(x, y) + F^{-1}\{F(x, \beta) \sum_{m=1}^M G_m(\beta) \sum_{p=-P}^P \sum_{q=-Q}^Q p_{mpq} B_{pq}(\beta)\}. \quad (10)$$

여기서 $u^i(x, y)$ 는 입사파로 어느 위치에서나 아는 양이며, 연산자 F^{-1} 은 역푸리에 변환을 나타낸다. 특히 식 (10)에서 측정점 (x, y) 를 각 소영역 내에서 계산하면, u_{mpq} 를 계산할 수 있다.

셋째 단계는 앞의 두 단계에서 구한 $(\epsilon_m - 1)u_{mpq}$ 와 u_{mpq} 로부터 각 소영역 내의 비유전율 값인 M 개의 ϵ_m 을 구한다. 그런데 m 번째 소영역 S_m 내에서의 비유전율 ϵ_m 은 하나의 값이므로, 다음과 같이 평균을 취하여 구할 수 있다.

$$\epsilon_m = \frac{\sum_{p=-P}^P \sum_{q=-Q}^Q \left\{ \frac{(\epsilon_m - 1)u_{mpq}}{u_{mpq}} + 1 \right\}}{(2P+1)(2Q+1)} \quad (11)$$

III. 계산결과 및 검토

본 수치계산에 사용한 기본 모형은 다음과 같이 취하였다. 그림 3과 같이 z 방향으로 분극된 평면파가 x 축 방향으로 유전체에 입사할 경우, 유전체 기층의 중심인 원점에서 0.3λ 떨어진 $x = x_0$ 선 상에서 β 를 중심으로 $\Delta\beta = \pm 0.41k_0$ 씩 24개의 β_j 를 취하여 이 스펙트럼에서 산란

전계스펙트럼 $U(x_0, \beta_j)$ 와 $U'(x_0, \beta_j)$ 을 수치계산으로 계산하여 역산란 입력자료로 사용하였다. 유전체 단면은 x 축 방향으로 0.1λ , y 축 방향으로 0.6λ 인 직사각형 cell 4개가 y 축 방향을 따라 막대모양으로 위치하고 있고, 각 소영역내의 비유전율 분포는 표 1과 같다고 하였다. 여기서 측정위치에 따른 영향을 줄이기 위해 $x_0=0.3\lambda$ 로 산란체에 가깝게 취하였으며, $\Delta\beta=0.41k_0$ 로 취한 이유는 산란체 크기가 2.4λ 이므로 측정위치 x_0 에서 산란정보를 모두 포함할 수 있도록 취한 것이다. 또한 소영역의 y 축 방향의 크기가 0.6λ 이므로 급수전개된 basis의 기본변화 성분이 소영역내에서 한 파장을 넘지 않도록 상수 L 의 값을 0.5λ 로 취하였다.

Q 는 1과 2를 취하여 즉, 전개함수의 갯수는 3과 5가 되며 전체 행렬의 변수갯수가 각각 12와 20인 경우에 대해 수치계산을 행한 결과, 재구성된 비유전율 분포는 그림 4에 보인 바와 같다. 그림 4.a에서 보인 바와 같이 $Q=1$ 또는 $Q=2$ 의 급수전개된 basis를 취한 역산란 결과가 펄스 basis를 취한 경우와 거의 같은 정확도로 재구성됨을 보인다. 이를 자세히 살펴보기 위해 원래의 비유전율 분포를 ϵ_{om} , 재구성된 비유전율을 ϵ_{rm} 이라 둔 경우 상대오차를 $\frac{\epsilon_{rm} - \epsilon_{om}}{\epsilon_{om}}$ 로 정의하고, 재구성된 비유전율 분포의 상대오차를 그림 4.b에 나타내었다. $Q=1$ 의 급수전개한 경우 소영역의 중심에서는 거의 일치하나, 소영역의 외부로 갈수록 오차가 커진다. 이는 basis의 급수전개를 $Q=1$ 으로 첫번째 평면파만을 취하였기 때문에 끝쪽에서 변화하는 부분을 잘 만족 시키지 못하기 때문이다. $Q=2$ 인 경우는 두번째 고조파의 평면파까지 합한 급수전개를 취하였으므로 소영역 끝쪽에서도 전개분포를 거의 정확하게 재구성할 수 있어 펄스 basis와 거의 일치함을 보인다. 평균효과를 살펴보기 위하여 그림 4.a에 나타난 각 점에서의 비유전율을 식(11)을 사용하여 평균을 취하였을 때의 상대오차를 그림 4.c에 나타내었으며, 평균효과에 의해 재구성된 비유전율 분포의 상대오차가 상당히 줄어들음을 확인하였다.

IV. 결론

본 연구에서는 이미 개발된 소영역 내에서의 비유전율과 전개분포에 대해 펄스 basis에 의한 모멘트 방법을 이용한 파수 영역의 역산란 계산식을, 소영역의 크기를 크게 하여 소영역내의 전계를 여러개의 basis를 갖는 급수 전개로 표시한 모멘트 방법을 적용 시킬 수 있도록 개선 하였으며, 수치계산으로 유전체내의 비유전율을 재구성하여 제시된 역산란 방법의 유용성을 확인하였다.

산란전자파의 크기와 위상을 정확히 측정할 수 있으면 제시한 역산란 방법으로 거의 정확하게 복소유전율분포를 재구성할 수 있었다. 급수전개된 basis를 적절히 취함으로써, 펄스 basis에 비해 미지수의 갯수가 감소하므로 역산란 계산용량과 계산시간이 단축되었다. 더우기 소영역의

크기를 크게 취함으로써 재구성된 비유전율 분포의 분별능력은 다소 떨어지지만, 산란 전자파의 측정시 고주파 성분의 스펙트럼까지 정확히 측정할 필요가 없으므로 역산란 문제에서 항상 발생하는 ill-posedness가 개선되었다.

이러한 파수영역의 역산란방법은 소영역의 크기를 x 와 y 방향 모두 크게 한 경우 및 입사파가 사입사하는 경우의 역산란 계산시에도 마찬가지로 적용시킬 수 있으며, 실제 문제에서 항상 발생하는 어려움으로 산란전계의 측정시 측정오차나 불필요한 주위신호에 의한 간섭 등으로 생기는 잡음이 본 연구에서 제시한 파수영역의 역산란 방법으로 재구성된 비유전율 분포에 미치는 영향을 조사하고, 이러한 잡음의 영향을 줄이는 방안을 연구할 필요가 있다.

참 고 문 헌

- [1] R. F. Harrington, " Matrix methods for field problems," Proc. IEEE, Vol. 55, pp. 136-149, 1967.
- [2] J. H. Richmond, " Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape," IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 13, pp. 334-341, 1965.
- [3] 김세운, 이재민, 나정웅, " 모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산 방법, I : 이론," 전자공학회지, 제25권, 제 3호, pp. 6-14, 1988년
- [4] 김세운, 윤태훈, 나정웅, " 모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산 방법, II : 잡음의 영향," 전자공학회지, 제 25권, 제3호, pp. 15-24, 1988년
- [5] 김세운, 이재민, 나정웅, " 파수영역에서 모멘트방법을 이용한 새로운 역산란방법, I : 이론," 전자공학회지에 제출
- [6] M. J. Hagmann, O. P. Gandhi, and C. H. Durney, " Procedures for improving convergence of moment-method solutions in electromagnetics," IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 26, pp. 743-748, 1978.

표 1. 기본형의 유전율분포

cell 번호	비 유전율 분포	
	실수부	허수부
1	1.1	0.0
2	1.3	0.0
3	1.5	0.0
4	1.2	0.0

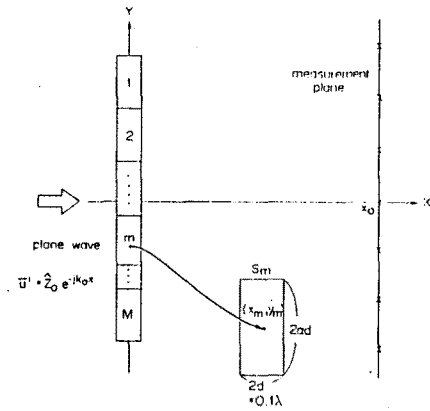
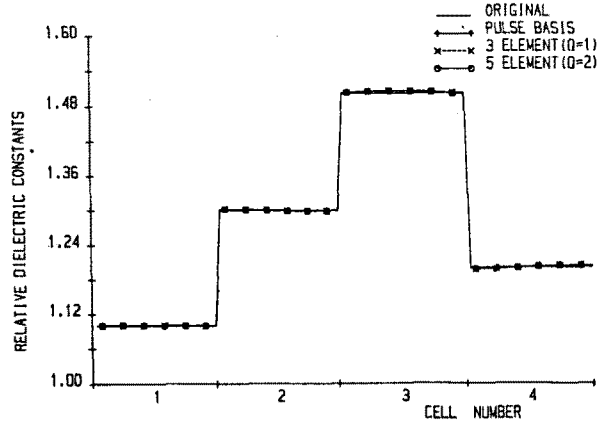


그림 1. 임의의 단면 S를 갖는 유전체 기둥 구조



(a) 재구성된 비유전율을 분포

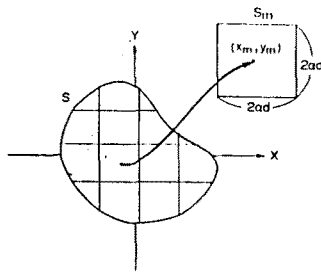
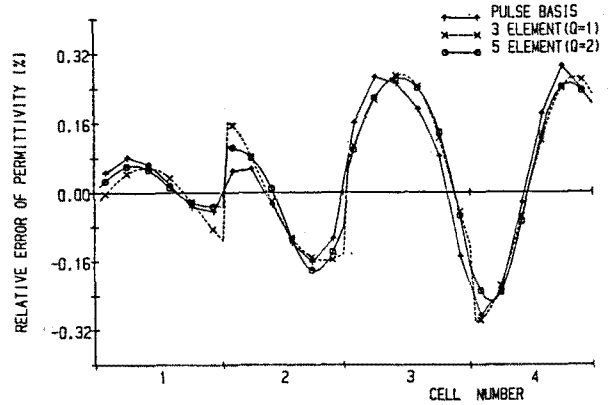


그림 2. M 개의 소영역으로 단면 S 분할



(b) 상대오차

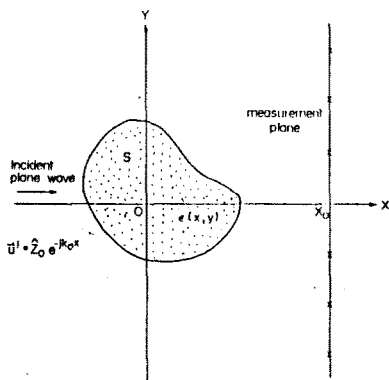
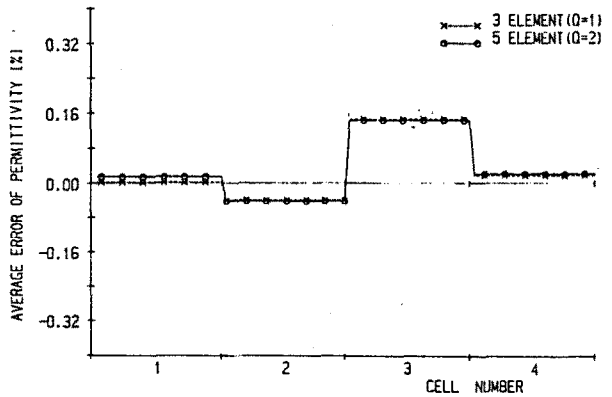


그림 3. 본 수치계산에 사용한 기본형의 구조.



(c) 평균오차

그림 4. 기본형에 대한 역산란 결과.