

파수영역에서 모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 방법, II : 수치 계산

이 재민*, 김 세운**, 나 정웅*

*한국과학기술원 전기및 전자공학과

**한국과학기술원 물리전자연구부

A New Inverse Scattering Technique Using
the Moment Method in the Spectral Domain, II: Numerical Simulation

Jae-Min Lee, Se-Yun Kim, Jung-Woong Ra

* Dept. of Elect. Eng., KAIST

** Center for Appl. Phys. and Elect. Eng., KAIST

ABSTRACT

In this paper, the reconstruction of complex permittivity distribution on a rectangular cross section of inhomogeneous dielectric cylinders is performed by employing the spectral inverse scattering scheme. Numerical simulations provide the superresolution to the permittivity profiles nearly regardless of the measurement locations of the scattered field and the permittivity distributions on the cross section.

I 서론

본 논문은 파수영역에서 모멘트방법을 이용한 새로운 역산란 계산방법에 대한 이론을 다룬 전편 논문인 I부[1]의 후속 논문인 II부인데, 여기서는 I부에서 기술한 역산란 방법의 유용성을 살펴보기 위하여 먼저 간단한 유전체 모형을 정하고, I부에서 제시한 역산란 방법으로 모형내의 유전을 분포를 수치계산하였다.

I부의 역산란 이론으로 모형내의 유전 분포를 계산하는 과정은 크게 다음 세 단계로 나눌 수 있는데 각 과정을 자세히 설명하면 다음과 같다. 먼저 첫번째 단계는 유전체 외부에서 측정된 전계 스펙트럼(spectrum)을 입력 자료로 하여 모형 내부의 등가유기전류를 구하는 과정인데, 이때 등가유기전류를 구하기 위해서는 전계 스펙트럼(spectrum)과의 선형적인 관계로 만들어지는 행렬식의 해[2,3]를 구하면 된다. 두번째 단계에서는 앞에서 구한 등가유기전류로부터 유전체 내부의 전계 스펙트럼을 구하고, 이것을 역푸리에 변환하여 전계를 구한다. 그러나 유전체 내부의 전계 스펙트럼은 각 등가유기전류에 의한 전계 스펙트럼의 합으로 간단히 구할 수 있으나, 이 전계 스펙트럼으로부터 전계를 구하기 위해서는 파수영역에서 전계 스펙트럼의 역푸리에 변환적분을 수치계산의 방법으로 적분을 하였다. 마지막 단계에서는 앞에서 구한 전계와 유기등가전류의 비를 계산하여 비유전을 분포를 계산하면 된다.

이와같은 순서로 본 논문에서는 I부에서 제안한 역산란 방법을 적용시켜 막대모양의 단면을 갖는 간단한 모형에

대하여 전계 스펙트럼의 측정위치 및 내부유전을 변화의 영향을 수치계산으로 살펴보았다.

II 계산방법

여기서는 I부에서 기술한 역산란 방법[1]을 사용하여 유전체 내부의 유전분포를, 펄스형 기저함수를 사용한 모멘트방법[4]으로 수치계산하는 방법에 대하여 서술하였다. 그림 1과 같이 z방향으로 분극된 평면파 $u^i(x,y)$ 가 시간조화 함수 $e^{j\omega t}$ 를 갖고, 단면 S를 갖는 막대모양의 유전체 기둥으로 입사할 경우에 x축에서 x_0 만큼 떨어진 선상에서의 전계 $u(x_0,y)$ 은 입사전계와, 유전체 기둥과 외부매질의 차이에 의해 생긴 유전체 내부의 등가유기전류에 의한 산란전계의 합으로 표현 할수 있다. 여기서 산란전계는 등가유기전류와 그린함수의 곱의 적분형으로 표시되는데, 이적분을 펄스 기저함수를 사용한 모멘트 방법으로 계산한다. 이와 같은 방법으로 구한 전계 $u(x_0,y)$ 를 변수 y에 대해 푸리에변환하면 x_0 선상에서의 전계 스펙트럼 $U(x_0,\beta_1)$ 를 얻을수 있는데, 이는 다음과 같이 표현 할수 있다[1].

$$\frac{U(x_0,\beta_1) - U^i(x_0,\beta_1)}{F(x_0,\beta_1)B(\beta_1)} = \sum_{n=1}^N G_n(\beta_1)p_n \quad (1)$$

$$B(\beta_1) = 4 \frac{\sin(\sqrt{k_0^2 - \beta_1^2} d) \sin(\beta_1 d)}{\sqrt{k_0^2 - \beta_1^2} \beta_1} \quad (2)$$

$$F(x_0,\beta_1) = -j \frac{k_0^2}{2} \frac{e^{-j\sqrt{k_0^2 - \beta_1^2} x_0}}{\sqrt{k_0^2 - \beta_1^2}} \quad (3)$$

$$G_n(\beta_1) = e^{j\sqrt{k_0^2 - \beta_1^2} x_n + j\beta_1 y_n} \quad (4)$$

$$p_n = (\epsilon_n - 1)u_n \quad (5)$$

여기서 $\text{Im}\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \leq 0$ 이고, 식 (3)과 (4)의 복부호중 첫부호는 $x \geq x_n$ 일 경우이고, 아랫부호는 그 반대의 경우에 사용한다. 첨자 i는 입사파를 의미하고, (x_n, y_n) 은 그림

1에서 보인바와 같이 단면 S를 N개의 소영역으로 나눌 경우 n번째의 소영역 S_n 의 중심의 좌표를 의미한다. 또 $2d$ 는 cell의 한번의 길이이고, β_l 은 변수 y 에 대한 임의의 1번째의 공간주파수를 의미한다. 이때 l 은 1, 2, ..., N의 임의의 상수이다.

위역산란 식 (1)을 이용하여 유전체 외부인 $x=x_0$ 선상에서 구한 전개 스펙트럼을 입력자료로 하여 유전체 모형내부의 비유전율 분포를 구하는 과정을 다음과 같은 3단계로 요약할 수 있다.

1. 분극 p_n 의 계산

입사파로부터 $U^i(x_0, \beta)$ 를 얻을 수 있으므로, N개의 서로 다른 공간주파수 β_l 에서 입력자료인 $U(x_0, \beta_l)$ 와 $U^i(x_0, \beta_l)$ 를 구하여 역산란식 (1)에 대입하면 분극 p_n 에 대한 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[G]\vec{p} = \vec{r}(x_0) \tag{6}$$

여기서 $[G]$ 는 $N \times N$ 행렬로 $l \times n$ 번째 요소 G_{ln} 은 식 (4)의 $G_n(\beta_l)$ 을 의미하고, N차 벡터 \vec{p} 의 n번째 요소가 p_n 이며 N차 벡터 $\vec{r}(x_0)$ 의 l번째 요소인 $r_l(x_0)$ 는 식 (1)의 좌변과 같이 주어진다. 따라서 위의 양변에 $[G]^{-1}$ 을 곱하면 다음과 같이 분극 p_n 을 구할 수 있다.

$$\vec{p} = [G]^{-1} \vec{r}(x_0) \tag{7}$$

2. 유전체 내부의 전개 u_n 의 계산

유전체 내부의 전개 $u(x_n, y_n)$ 을 구하기 위해서는 먼저 분극 p_n 으로부터 유전체 내부를 지나는 $x=x_1$ 선상의 전개 스펙트럼을 구하고, 이를 역푸리에 변환하여 유전체 내부의 점 (x_n, y_n) 에서 전개 $u(x_n, y_n)$ 을 구하면 된다. 그런데 전개 스펙트럼 $U(x_1, \beta)$ 는 앞에서 구한 분극 p_n 를 식 (1)에 대입하여, 각 유전율로 인한 영향을 합하면 간단히 구할 수 있다. 이 전개 스펙트럼 $U(x_1, \beta)$ 로부터 전계를 구하기 위해서는 $U(x_1, \beta)$ 를 변수 β 에 대해 다음과 같은 역푸리에 변환적분을 하여야 한다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_1, \beta) e^{-j\beta y} d\beta = u^i(x_1, y) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N p_n \int_{-\infty}^{+\infty} U^n(x_1, \beta) e^{-j\beta y} d\beta \tag{8}$$

$$U^n(x_1, \beta) = -j2k_0^2 \frac{e^{j\sqrt{k_0^2 - \beta^2}|x_1 - x_n|}}{\sqrt{k_0^2 - \beta^2}} \frac{\sin(\sqrt{k_0^2 - \beta^2}d)}{\sqrt{k_0^2 - \beta^2}} \frac{\sin(\beta d)}{\beta} e^{j\beta y_n} \tag{9}$$

그런데 전개스펙트럼의 함수형태를 살펴보면 위 식에서 알 수 있는 바와같이 적분경로 상의 점 $\beta = k_0$ 에서 branch

point를 갖는다는 것을 알 수 있다. 그런데 식 (8)의 적분을 해석적으로 정확히 구할 수 없으므로[5], 여기서는 적분경로를 그림 2와 같이 취하고, δ 를 0으로 접근시켜 적분의 해를 얻었다. 이때 (A, B), (C, D)구간에서의 적분은 피적분 함수가 δ 에 비례하므로 δ 이 0에 수렴할 경우에 두적분의 값이 0에 수렴한다는 사실을 알 수 있다. 따라서 남은 세 구간에 대해 적분만 하면 되는데, 이 세구간에서는 $\beta = \pm k_0$ 근방에서 피적분함수의 값이 컴퓨터가 다룰수있는 최대수 보다 크므로 계산에 어려움이 있다. 이런 문제를 해결 하기 위해 본 논문에서는 그림 3과 같이 상당히 작은 $\Delta k_0 (=0.00001k_0)$ 를 취하여 위의 세 구간에 대한 적분을 $\beta = \pm k_0$ 의 Δk_0 근방에 있는 (A', A), (B, B'), (C', C), (D, D')의 네 구간과 그 밖의 $(-\infty, A')$, (B', C'), (D', $+\infty$)의 세 구간으로 나누어, 후자의 세 구간에서는 수치적분이 가능하므로 간단히 Symphon's적분방법으로 수치적분하였고, 나머지 구간에서는 피적분함수를 근사화시켜 근사적분하였다[6]. 이와같이하여 전개 스펙트럼의 역푸리에변환을 구하면 원하는 전개 $u(x_1, y)$ 를 얻을 수 있다. 같은 방법으로 모든 $l = 1, 2, \dots, N$ 에 대해 $u(x_1, y)$ 를 구하여, 이로부터 유전체 내부의 n번째 소영역의 중심인 (x_n, y_n) 에서의 전개 u_n 을 얻는다.

3. 비유전율 ϵ_n 의 계산

마지막으로 앞에서구한 유전체 내부의 S_n 에서의 전개와 분극을 다음과 같이 비유전율 분포와 관련 시킬 수 있다[1].

$$\epsilon_n = \frac{p_n}{u_n} + 1, S_n \tag{10}$$

따라서 위 식으로부터 S_n 내의 비유전율의 값 ϵ_n 을 구할 수 있다. 이와 같은 방법으로 구한 유전율 분포는 유전체 내부의 소영역 S_n 의 중심에서의 비유전율인데, 여기서는 전개 스펙트럼에 대한 적분방정식[1]을 풀기 위해 펄스형 기저 함수를 갖는 모멘트방법을 사용하였으므로 소영역 S_n 내의 어느 점에서도, 중심에서의 유전율과 같은 값을 갖는다. 이와 같이 위에 서술한 세 과정을 거치면 유전체 내부의 비유전율을 구할 수 있다.

III 계산결과

I부에서 제시한 파수영역에서의 역산란 방법의 효용성을 살펴보기 위하여 앞장에서 기술한 방법으로, 간단한 구조를 갖는 유전체 모형에 대한 유전율 분포를 수치계산으로 구하였다. 본 수치계산에 사용된 유전체의 기본모형은 그림 1과 같이 단면의 한번의 길이가 0.1 λ 인 정사각형 24개를 x 축을 따라 24개를 일렬로 나란히 붙혀 막대모양을 이루게 하였다. 이와같은 유전체의 기본모형에 시간조화함수 $e^{j\omega t}$ 를 갖는 z방향으로 분극된 평면파가 x축방향으로 입사할경우에, 유전체 중심인 원점에서 0.1 λ 떨어진 $x=x_0$ 선상에서의 전개 스펙트럼을 공간 주파수

$\beta=0$ 와 이를 중심으로 공간 주파수간격이 $0.36 k_0$ 씩 떨어진 24개의 점에서 구하여 입력자료로 하였다. 위와 같은 기본형에 대해 근사적분간격은 $0.00001k_0$ 로 취하였다.

먼저 유전체 내부의 비유전율의 분포의 변화의 정도가 다른 세 경우, 즉 cosine형을 기본으로 점차 변화가 심한 삼각형, 계단형의 세 형태의 유전율분포를 갖는 유전체에 대해 수치계산으로 구한 유전율 분포를 원래의 분포와 같이 그림 4에 나타내었다. 이때 나타난 결과는 오차가 상당히 작아 그 영향을 보기 어려우므로 원래의 분포에 대한 상대오차 $\delta n \left(\frac{\epsilon_n - \epsilon_f}{\epsilon_f}, \epsilon_n \right)$; 재현된 비유전율, ϵ_f ; 원래의 유전율)를 그림 5에 나타 내었다. 여기서 분포의 변화가 클수록 구현된 유전율의 상대오차가 큰것을 알수 있는데, 그 이유는 유전율 분포의 변화가 심할수록 전개 스펙트럼 $U(x, \beta)$ 가 고주파 성분을 많이 가지게 된다. 따라서 내부유전율 변화가 심할수록 더 높은 주파수의 스펙트럼을 취해야 하기때문이다. 그러나 여기서는 위 세 경우 모두 동일한 파수를 선택 하였기 때문에 유전율 변화가 심할수록 오차가 증가함을 알수있다.

다음은 유전체 모형의 중심으로 부터 수신점까지의 x방향 거리 x_0 를 $0.1\lambda, 1\lambda, 5\lambda$ 의 3 가지로 변화 시킨 경우에 대한 비유전율의 상대오차를 그림 6에 도시하였다. 이때 사용한 공간 주파수의 간격은 $0.19k_0$ 로 하여 거리의 변화에 따른 영향을 뚜렷이 볼수 있게 하였다. 위의 결과로부터 수신 전개 스펙트럼을 취하는 x좌표의 거리 x_0 가 유전체로부터 멀수록 오차가 큰것을 알수 있다. 이는 전개 스펙트럼 $U(x_0, \beta)$ 의 크기가 거리 x_0 가 멀어짐에 따라 지수함수로 감소하므로 인하여, 컴퓨터에 의한 truncation 오차나 round off 오차의 영향을 크게 받아, 등가유기전류를 구하는 행렬식 (6)의 우변항인 $U(x_0, \beta)$ 를 포함하는 벡터 $r(x_0)$ 의 오차가 크지고, 다시 이 오차가 행렬 $[G]$ 의 역행렬에 의해 증폭되어 등가유기전류에 나타난다. 다시 이 오차가 등가유기전류로부터 비유전율을 구하는 과정에 그대로 연장되어 결국 재구성된 비유전율의 상대오차를 크게 하였기 때문이다.

IV 결론

본 논문에서는 전편논문인 I부에서 제시한 파수 영역에서의 역산란 방법을 간단한 기본모형에 적용시켜 수치계산으로 유전율 분포를 재구현하여 보았다. 이때 모형외부의 전개 스펙트럼을 입력자료로 하여, 유전체 내부의 비유전율 분포를 사용 전자파의 파장보다 작은 크기로 자세히 구할수 있음을 알수 있었다.

전개 스펙트럼을 측정하는 수신점의 위치가 유전체 모형으로부터 멀수록 재구현된 비유전율에 오차가 크므로, 되도록 가까이서 전개 스펙트럼을 측정하여야 함을 알수있었고, 유전체 내부의 유전율의 변화가 심할수록 높은 파수의 전개 스펙트럼을 필요로 함을 알수있었다.

V 참고 문헌

- [1] 김세운, 이재민, 나정웅, " 파수영역에서 모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산방법, I: 이론, " 추계종합 학술대회 논문집 제 10권, 1호, pp. 644-645
- [2] T. K. Sarkar, " Survey of numerical methods for solution of large systems of linear equations for electromagnetic field problems," IEEE Trans., Antennas Propagat., vol. AP-29, no. 6, pp. 847-856, 1981
- [3] B. Carnahan, H. A. Luther and J. O. Wilkes, Applied Numerical Methods, John Wiley and Sons. Inc., 1969
- [4] R. F. Harrington, Field computation by moment method, Macmillan, 1968
- [5] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of integrals, series, and products, Academic press, 1980
- [6] 김세운, 이재민, 나정웅, " 파수영역에서 모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산방법, II: 수치계산, " 전자공학회지에 제출

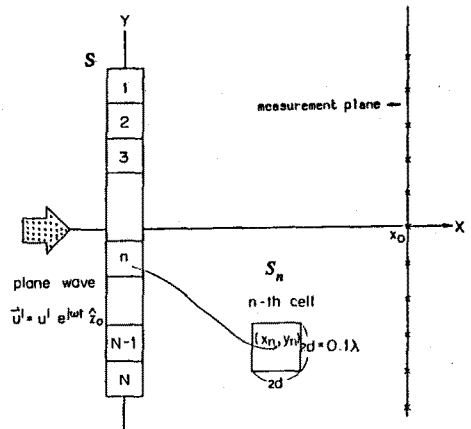


그림 1. 본 수치계산에 사용된 유전체구조.

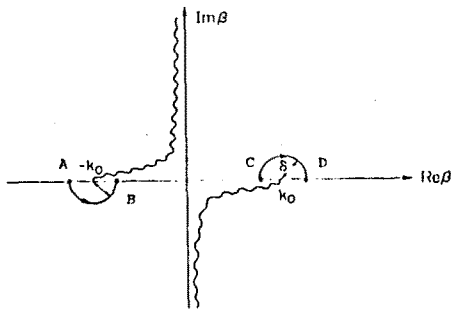


그림 2. 전체 스펙트럼 $U'(x, \beta)$ 의 역푸리에 변환적분경로.

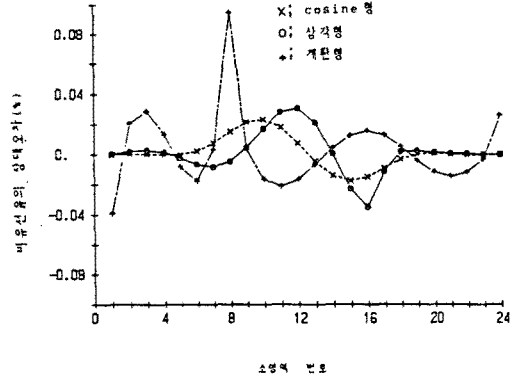


그림 5. 내부의 유전율 변화에 대한 상대오차

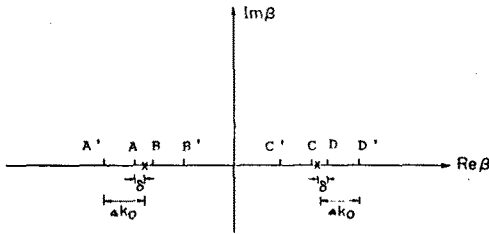


그림 3. 수치계산에 적합하게 변형한 기본경로

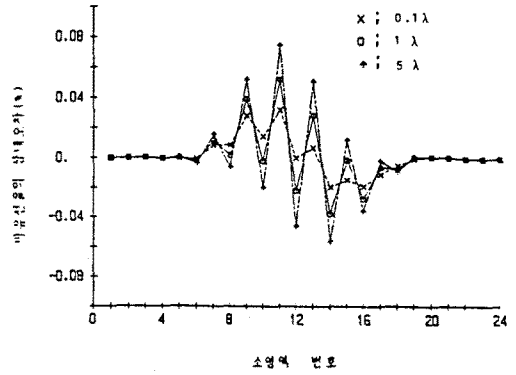


그림 6. 측정위치 x_0 의 변화에 따른 비유전율의 상대오차

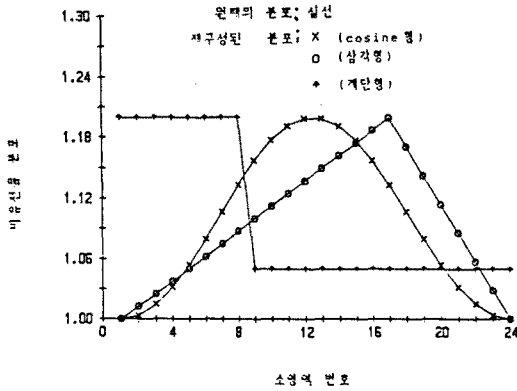


그림 4. 내부의 유전율의 변화에 대해 역산한 결과