

ART 알고리즘에서 반복 순서 기준

○ 박상배, 박길흠, 최태호
 경북대학교 공과대학 전자공학과

Iteration Sequence Criteria in ART Algorithm

○ Sang Bae Park, Kil Houm Park and Tae Ho Choi
 Department of Electronics, Kyung Pook National University

Abstract

This paper proposes an improved ART (Algebraic Reconstruction technique) algorithm. This algorithm is an iterative one with iteration sequence criteria based on the discrepancy between measurement and pseudo-projection data. The simulation result using the proposed algorithm shows a significant improvement in convergency rate over the conventional ART algorithm.

1. 서론

ART 알고리즘[1-4]은 제한된 방향과 불완전한 부영데이터 등으로부터 영상을 재구성하는 여러가지 특수한 경우에 많은 유용성을 가지고 있기 때문에 계속해서 많은 관심을 받아 왔었다. 그러나 ART 알고리즘은 수행시간이 낮은 반복적인 방법이기 때문에 변환방법보다 느린 영상 재구성 방법이다. 그러므로 수행시간 개선이 요구된다.

본 논문에서는 측정된 부영 데이터와 가상의 부영 데이터 사이의 오차에 근거를 둔 반복 순서 기준을 사용하여 더욱 빠른 반복적인 ART 알고리즘을 제안한다.

2. 이론

먼저 ART 에 대한 기본적인 개념을 알아 본다. 재구성 하고자 하는 영상을 pixel 이라 불러주는 J 개의 부영영역으로 나누고 x 를 J 차원의 열 벡터이라고

가정한다. 여기서 x 의 j 번째 성분 x_j 는 그 부영영역에서 영상의 평균값을 나타낸다. I 번의 측정이 취하여 졌다고 가정하고, y 를 I 차원의 열 벡터로 두자. y 의 i 번째 성분 y_i 는 i 번째 측정에서 얻은 값이다. 각 반복 단계에서 측정값 들은 pixel 값들의 선형조합으로 표현되어질 수 있다고 가정한다. 즉

$$y_i = \langle a_i, x \rangle, \quad 1 < i < I \quad (1)$$

여기서 J 차원의 열 벡터 a_i 는 단지 측정 과정에만 의존한다.

$$(a_i, x) = \sum_j a_{ij} x_j$$

ART 알고리즘은 식 (1) 의 해에 수렴하는 벡터들의 열 x^0, x^1, \dots 을 생성한다. ART 알고리즘은 초기 근사치 x 로부터 시작하여 영상 벡터까지 진행되는 반복적인 과정이다. 어떤 한 반복 단계에서, 한 ray - 이를테면 i 번째 ray - 에서만 고려하여 이 ray 와 교차하는 pixel 들의 영상 값들만을 변화시킴으로써 현재 반복 단계의 영상값 x^k 을 새로운 단계의 영상값 x^{k+1} 로 수정한다. 측정된 부영 데이터 y_i 와 현재 단계의 영상값 x^k 로부터 얻은 가상의 부영 데이터 $(\sum_{j=1}^J a_{ij} x_j^k)$ 사이의 차이값은 i 번째 ray 와 교차하는 pixel 들에게 전체 ray 에서 그 pixel 들의 가중치에 따라 재분배된다. 이러한 방법에 의해 i 번째 ray 와 교차하는 pixel 값들은 수정되어 나머지 영상들을 변화시키지 않고 i 번째 측정값에 일치하게 된다. 이러한 과정은 다음 알고리즘에 의해 설명되어 진다.

$$x^{k+1} = x^k + \frac{(y_{ik} - \langle a_{ik}, x^k \rangle)}{\|a_{ik}\|^2} \cdot a_{ik} \quad (2)$$

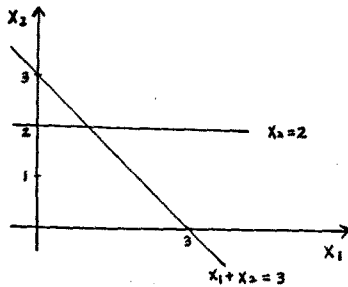
여기서 inner product 표기와 Euclidean norm 을 사용한다. ray 들은 주기적으로 선택되어진다. 즉

$$i = ik = k \pmod{m} + 1$$

지금까지 설명한 ART 알고리즘은 반복 순서 기준이 없이 주기적으로 반복되었다. 본 논문에서는 정확한 해에 좀 더 빠르게 수렴하기 위하여 반복 순서 기준을 갖는 개선된 ART 알고리즘을 제안한다. 반복 순서 기준은 다음과 같이 정의되어 진다.

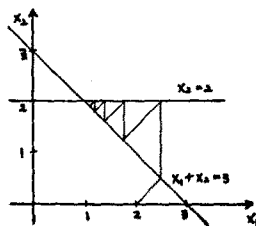
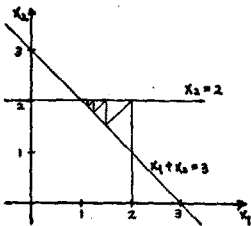
아래와 같이 2 차원 경우의 기하학적 해석을 생각해 본다.

$$x_1 + x_2 = 3, \quad x_2 = 2$$



첫번째 방법은 두번째 방정식을 먼저 풀고 난 후 첫번째 방정식을 풀므로써 해를 구하는 방법이며, 두번째 방법은 첫번째 방정식을 먼저 풀고 난 후 두번째 방정식을 푸는 방법이다. 초기값을 아래와 같이 가정한다.

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0$$



두번째 경우의 접근 시간이 첫번째 경우의 접근 시간보다 느리다. 왜냐하면 첫번째 방법이 두번째

방법보다 정확한 해에 도달하는데 더 많은 반복횟수가 필요하기 때문이다. 그러므로 반복을 시작하기 전 최소의 반복횟수로 정확한 해에 도달하기 위해 어떤 기준을 수립할 필요가 있다. 위의 방정식이 앞에서 얻은 매개변수들에 의해 풀려 질 때 반복 순서 기준은 가장 큰 오차를 갖는 방정식을 선택하는 것이다. 예로서 다음 문제를 생각해 본다.

$$x_1 + x_2 = 3 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 = 4 \quad (4)$$

$$x_2 + x_4 = 6 \quad (5)$$

$$x_3 + x_4 = 7 \quad (6)$$

$$\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_4 = 5\sqrt{2} \quad (7)$$

X 의 초기값들은 0 이다

반복 1 : 식 (6) 이 가장 큰 오차 (error=7) 를 가지므로 식 (4) 를 선택한다. 식 (2) 로부터

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 7/2, \quad x_4 = 7/2$$

반복 2 : 식 (3) 이 가장 큰 오차 (error=3) 를 가지므로 식 (3) 을 선택한다. 식 (2) 로부터

$$x_1 = 3/2, \quad x_2 = 3/2, \quad x_3 = 7/2, \quad x_4 = 7/2$$

반복 3 : 식 (4) 가 가장 큰 오차 (error=1) 를 가지므로 식 (5) 를 선택한다. 식 (2) 로부터

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3/2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 7/2$$

반복 4 : 식 (5) 가 가장 큰 오차 (error=1) 를 가지므로 식 (6) 을 선택한다. 식 (2) 로부터

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4$$

이러한 순서를 되풀이하여 4 번의 반복에 의해 정확한 해에 도달할 수 있다. 아래와 같이 다른 순서 즉, 식 (1), (2), (3), (4) 그리고 (5) 의 순서로 문제를 풀어 위의 결과와 비교하여 보자.

$$\text{반복 1 : } x_1 = 3/2, \quad x_2 = 3/2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

$$\text{반복 2 : } x_1 = 11/4, \quad x_2 = 3/2, \quad x_3 = 5/4, \quad x_4 = 0$$

$$\text{반복 3 : } x_1 = 11/4, \quad x_2 = 15/4, \quad x_3 = 5/4, \quad x_4 = 9/4$$

$$\text{반복 4 : } x_1 = 11/4, \quad x_2 = 15/4, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4$$

$$\text{반복 5 : } x_1 = 15/4, \quad x_2 = 15/4, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 25/8$$

5 번 반복한 후에도 X 에서 평균 변화율이 1 % 이하인 정확한 해에 도달할 수 없다.

만약 많은 반복을 필요로 한다면 첫번째 주기에서 반

복 순서가 결정되어 지고 그 다음 주기에서 첫 번째 주기와 같은 순서로 진행되어 진다. 왜냐하면 첫 번째 주기의 반복 순서가 가장 중요하기 때문이다.

3. 시뮬레이션 결과

개선된 ART 알고리즘은 시험 phantom 으로 실험하였다. 컴퓨터 시뮬레이션을 하기 위해 30 개의 views 와 각 view 당 51 개의 rays 로 부터 무영 데이터가 생성되었다. 영상의 질은 아래와 같이 정의되는 distance 로 평가하였다.

$$\text{distance} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\hat{f}_{ij} - f_{ij})^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\hat{f}_{ij} - \bar{f})^2} \right]^{1/2}$$

여기서 \hat{f}_{ij} 는 (i,j) 번째의 pixel 에서 추정된 영상이고 f_{ij} 는 원래의 영상이며, \bar{f} 는 원래 영상의 평균을 나타낸다. 그리고 n 은 어떤 한 행이나 열의 전체 pixel 수를 나타낸다. 그림 (3) 은 시험 phantom 의 구조를 보여준다. 이러한 시험 phantom 에 대하여, 두 알고리즘에 대한 distance 를 그림 (4) 에서 비교하여 나타내었다. 그림 (4) 에서 제안된 알고리즘은 기존의 알고리즘보다 수렴률에서 현저하게 개선되었음을 알 수 있다.

시뮬레이션 결과를 그림 (5) 에 나타내었다.

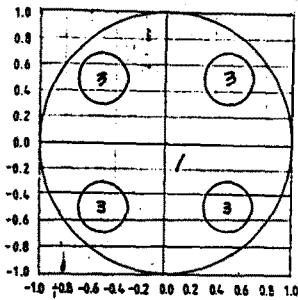


Fig. 3. Test phantom.

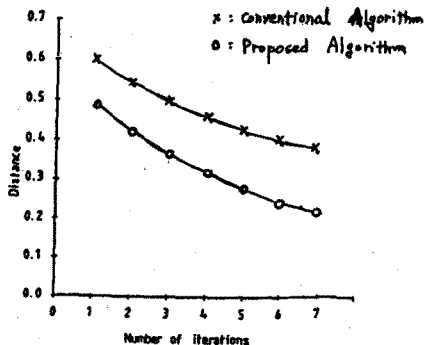


Fig. 4. Distances for the test phantom.

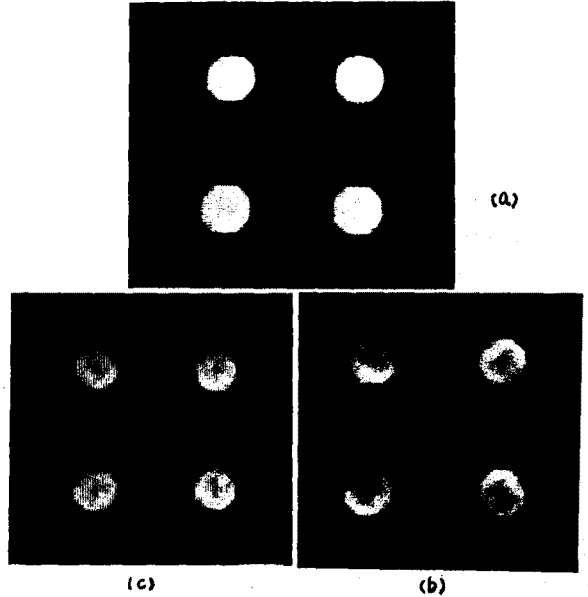


Fig 5. (a) Original image
(b) Conventional method
(c) Proposed method

4. 결론

반복 순서 기준을 갖는 개선된 ART 알고리즘을 제안하였다. 반복 순서 기준은 측정된 무영 데이터와 가상의 무영 데이터 사이의 차이값에 근거를 두었다. 제안된 방법은 기존의 방법보다 현저하게 개선되었음을 알 수 있었다. 더우기 반복 순서 기준은 다른 알고리즘 즉, Series Expansion Methods 등에 적용되어 질 수 있다.

5. 참고문헌

1. G.T.Herman: 'Image reconstruction from projections',
2. R.Gordon and G.T.Herman: 'ART for 3-dimensional electron microscopy and X-ray photography', J.ther, Biol., vol. 29, 1974,
3. Garbor T. Herman and Arnold Lent: 'Iterative reconstruction algorithms', Comput., Biol., Med., Pergamon Press, 1976, vol. 6, pp. 273-294
4. Yair Censor: 'Finite series-expansion reconstruction methods', Proceeding of the IEEE, vol. 71, no. 3, march 1983 .