부등비트오율이 고려된 DPCM의 신호대 잡음비

o 최 윤 철 , 박 영 구 , 문 상 재
경북대학교 전자공학과

SNR of DPCM with the Property of Unequal Bit - Error - Probability

Yun Cheol Choi , Young goo Park , S. J. Moon
Dep. of Electronics , Kyungpook National Univ.

Abstract

In transmission of DPCM signals, it is desired to protect the more significant digits from more errors than the less significant digits. The SNR of DPCM is examined in the case that bit error rates of individual digits consisting of the information word are different each other. The examination shows a better DPCM coding.

1. 서 론

아나로그 신호를 PCM으로 통신할 경우에 주로 양자화 오류와 전송 오류에 의하여 왜곡이 발생된다.양자화 레벨수가 비교적 적은 DPCM의 왜곡 해석은 PCM과는 달리[1,2,3]양자화 오류와 채널오류 간의 상관성에 의한 영향도 고려하여야 한다[4,5]. 오류 정정 부호 시스템을 통하여 전송되는 정보어의 각 비트는 다른 비트오율을 가질 수 있다. 이러한 비트별 부등오류제어 특성을 이용하여,채널오류의 영향을 크게받는 정보 비트에 오류제어 성능이 우수하도록 채널부호화 하면 왜곡을 줄일 수가 있다.

본 논문에서는 M 비트 DPCM 된 신호를 전송할 경우에 비트별 부등 오류 제어 특성을 고려하여 DPCM의 평균 자승 오차를 정량적으로 표현하고,효과적인 부호화 방법을 제시하였다. 얻어진 결과 식을 길쌈 부호를 사용한 DPCM 시스템에 적용시켜 그 성능을 조사하였다.

시스템 모델은 예측기계수가 하나이고 양자기 입력신호의 확율밀도함수는 Laplacian , 전송부호형태는 NBC(Natural Binary Code)로 하였다.

2. DPCM의 신호대 잡음비

그림-1은 전형적인 DPCM 시스템의 구성도 이다.

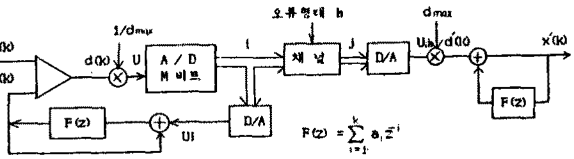


그림-1. DPCM의 구성도

입력신호 $x(k)$가 stationary ergodic random process 이고 서로 다른 샘플들 간의 상관성을 무시한다면, 오류신호 $e(k) = x'(k) - x(k)$의 평균자승오차는

$$E[e(k)^2] = E[\{n_M(k) + e_M(k)\}^2] + b_p E[e_M(k)^2] \quad (1)$$

이다[4]. 여기서 $n_M(k) = d_{max}(U_{ih} - U)$ (2)

$$e_M(k) = d_{max}(U_{ih} - U_i) \quad (3)$$

$$b_p = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \quad (4)$$

$$1/(1-F(z)) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^{-i}, \quad b_0 = 1 \quad (5)$$

서로 다른 양자화오류 신호들 간의 상관성및 양자화 오류신호와 codec 입력신호와의 상관성을 무시하면, 잔여신호 $d(k) = x(k) - y(k)$의 평균 자승 오차는

$$E[d(k)^2] = G^{-1}\sigma_x^2 + a_p E[n_M(k)^2] \quad (6)$$

로 된다. 여기서 $a_p = \sum_{i=1}^{k} a_i^2$ (7)

$$G(\text{예측이득}) = \sigma_x^2 / E[\{x(k) - \sum_{i=1}^{k} a_i x(k-i)\}^2] \quad (8)$$

$$\sigma_x^2 = E[x(k)^2] \quad (9)$$

그림-1에서, 정규화된 부호기입력신호 U와 복호기 출력신호 U_{ih} 간의 전 오류신호는

$$U_{ih} - U = (U_i - U) + (U_{ih} - U_i) \quad (10)$$

이다. 식 (10)의 평균자승오차를 구하기 위해 다음을 정의한다[4].

i) $\sigma_q^2(M) = E[(U_i - U)^2]$ (11)

ii) $Ah(M) = E[(U_{ih} - U_i)^2]$ (12)

iii) $\tilde{A}h(M) = E[(U_{ih} - U)^2] - E[(U_i - U)^2]$ (13)

iv) $p_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} p_{gr}(U)\,d(U)$, $\nu_i = -1 + i2^{-(M-1)}$, $i=0,1,\ldots,2^M$ (14)

$$q_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} (U_i - U)\, p_{gr}(U)\,d(U) \quad (15)$$

$$\sigma_{gr}^2 = \int_{-1}^{1} U^2 p_{gr}(U)\,d(U) \quad (16)$$

여기서 $p_u(U) = d_{max}\, p(d_{max} U)$ 이고

$p_{gr}(U) = p(U) / \int_{-1}^{1} p(U)\,d(U)$, $|U| \le 1$

$= 0$, $|U| > 1$ 이다.

식 (14)-(16)을 이용하여 $\sigma_q^2(M), Ah(M), \tilde{A}h(M)$을 다시 정리하면

$$\sigma_q^2(M) = \sigma_{gr}^2 + \sum_{i=0}^{2^M-1} (2q_iU_i - p_iU_i) \quad (17)$$

$$Ah(M) = \sum_{i=0}^{2^M-1} p_i (U_{ih} - U_i) \quad (18)$$

$$\tilde{A}h(M) = Ah(M) + 2\sum_{i=1}^{2^M-1} q_i (U_{ih} - U_i) \quad (19)$$

이 된다. 식 (10)의 평균자승오차는 식 (17)-(19)로부터

$$E[(U_{ih} - U)^2] = \tilde{A}h(M) + \sigma_q^2(M) \quad (20)$$

이며, d(k)와 d'(k)의 차에 대한 평균자승오차는

$$E[(d'(k) - d(k))^2] = d_{max}[\sigma_q^2(M) + \sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)\tilde{A}h(M)] \quad (21)$$

이다. 여기서 p(h)는 오류형태 h의 확률이다.
또한 양자화된 신호의 전송오류에 대한 평균자승오차는 $d_{max}\sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)Ah(M)$ 으로 나타낼 수 있으므로 식 (1)은

$$E[e(k)^2] = d_{max}[\sigma_q^2(M) + \sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)\tilde{A}h(M) + b_p \sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)Ah(M)] \quad (22)$$

로 표현될 수 있다. 식 (6)과 (22)로부터 신호대 잡음비는

$$SNR = \frac{G[(1 - a_p L^2 \sigma_q^2(M)]}{L^2(\sigma_q^2(M) + \sigma_{qt}^2)} \quad (23)$$

이 된다. L은 load factor 로서 $d_{max} = L\sigma_d$ 이고

$$\sigma_{qt}^2 = \sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)\tilde{A}h(M) + b_p\sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)Ah(M) \quad (24)$$
$$= (1+b_p)\sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)Ah(M) + 2\sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)\sum_{i=0}^{2^M-1} q_i(U_{ih}-U_i)$$

3. 부동비트오율을 적용한 평균 자승 오차

보내고자 하는 정보비트의 중요도가 서로 다를 경우에는 왜곡에 미치는 영향도 비트별로 다르다. 본절에서는 이러한 부등오류특성을 고려하여 DPCM의 평균자승오차를 정량적으로 표현하고자 한다.

식 (24)의 첫번째 항에서

$$\sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)Ah(M) = \sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)\sum_{i=0}^{2^M-1} p_i(U_{ih}-U_i) \quad (25)$$

midrise 대칭 양자기의 출력값의 집합을 S_o라 두면

$$U_i, U_{ih} \in S_o = \{W(i-(2^M-1)/2) \mid i=0,1,\ldots,2^M-1\} \quad (26)$$
$$= \{-1+W/2, -1+3W/2, \ldots, 1-W/2\} \quad (27)$$

이다. 여기서 $W=2^{-(M-1)}$ 이다.

$$U_i + W(2^M-1)/2 = U_i' \quad (28)$$

$$U_{ih} + W(2^M-1)/2 = U_{ih}' \quad (29)$$

$$U_i', U_{ih}' \in S' = \{c_i + W(2^M-1)/2 \mid c_i \in S_o, i=0,\ldots,2^M-1\} \quad (30)$$
$$= \{0, W, 2W, \ldots, (2^M-1)W\} \quad (31)$$

라고 정의하고

$U_i' = W\cdot i$, $U_{ih}' = W\cdot N_h(i)$

; $i, N_h(i) \in S = \{0,1,2,\ldots,2^M-1\}$ (32)

임을 이용하면

$$\sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)\sum_{i=0}^{2^M-1} p_i(U_{ih}-U_i)^2 = W\sum_{h=1}^{2^M-1} p(h)\sum_{i=0}^{2^M-1} p_i[N_h(i)-i]^2 \quad (33)$$

이 되며 h=0인 경우 $N_h(i)=i$ 이므로

$$\sum_{h=0}^{2^M-1} p(h)Ah(M) = W^2\sum_{h=1}^{2^M-1} p_i\sum_{i=0}^{2^M-1}[N_h(i)-i]^2 p(h) \quad (34)$$
$$= W^2\sum_{i=0}\sum_{j=0}(j-i)^2 p(j|i)p(i) \quad (35)$$
$$= E[(j-i)^2] \; ; i,j \in S=\{0,\ldots,2^M-1\} \quad (36)$$

이다. 여기서는 $p(i)=p_i$, $p(j|i)=p_i(j)$ (37)

$$\sum_{h=0}^{2^M-1}[N_h(i)-i]^2 p(h) = \sum_{j=0}^{2^M-1}(j-i)^2 p_i(j) \quad (38)$$

을 이용하였다.

식 (36)에서 $E[(j-i)^2]$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E[(j-i)^2] = \sum_{i=0}^{2^M-1}\sum_{j=0}^{2^M-1}(j-i)^2 p(j|i)p(i) \quad (39)$$

i 와 j를 각각

$$j = \sum_{k=0}^{M-1} s_k 2^k , \; j \in S \text{ 이고 } t_k \in (0,1) \quad (40)$$

$$i = \sum_{k=0}^{M-1} t_k 2^k , \; i \in S \text{ 이고 } s_k \in (0,1) \quad (41)$$

라 두고, 임의의 값 i가 전송되었을 때

$$E[(j-i)^2 \mid i] = E(j^2|i) - 2E(j|i)i + i^2 \quad (42)$$

이다. 식 (40)으로부터

$$E(j|i) = \sum_{k=0}^{M-1} E(t_k|i)2^k \quad (43)$$
$$= \sum_{k=0} [(1-p_M(k))s_k + p_M(k)(1-s_k)]2^k \quad (44)$$
$$= \sum_{k=0}^{M-1} [(1-2p_M(k))s_k + p_M(k)]2^k \quad (45)$$
$$= i + \sum_{k=0} (1-2s_k)p_M(k)2^k \quad (46)$$

이다. 여기서 $p_M(k)$는 비트오율 이다.

$$E(t^2|i) = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1} E(t_k t_m|i)2^{k+m} \quad (47)$$

에서 memoryless 채널로 가정하면 k≠m일때

$$E(t_k t_m|i) = E(t_k|i)E(t_m|i) \quad (48)$$

이고 k=m일때는 $s_k^2 = s_k$을 이용함으로써

$$E(t_k^2|i) = E(t_k|i) \quad (49)$$

이다. 따라서

$$E(j^2|i) = \sum_{k=0}^{M-1} E(t_k|i)2^{2k} - \sum_{k=0}^{M-1}[E(t_k|i)]^2 2^{2k} + E(t_j|i)^2 \quad (50)$$

인데 여기서 s 의 값에 무관하게

$$E(t_k|i) - [E(t_k|i)]^2 = p_M(k)[1 - p_M(k)] \quad (51)$$

이므로 식 (50)은

$$E(j^2|i) = \sum_{k=0}^{M-1} p_M(k)[1-p_M(k)]2^{2k} + [E(j|i)]^2 \quad (52)$$

이다. 따라서 식 (46)과 (52)를 식 (42)에 대입하면

$$E[(j-i)^2|i] = \sum_{k=0}^{M-1} p_M(k)[1-p_M(k)]2^{2k} + (\sum_{k=0}^{M-1} p_M(k)(1-2s_k)2^k)^2 \quad (53)$$

이다. 식 (53)을 이용하여 식 (36)을 구해보면

$$p(h)Ah(M) = W^2[\sum_{k=0}^{M-1} p_M(k)(1-p_M(k))2^{2k} + \sum_{i=0}^{2^M-1}(\sum_{k=0}^{M-1} p_M(k)(1-2s_k)2^k)^2 p(i)] \quad (54)$$

이된다.

식 (24)의 두번째 항에서

$$\sum_{h=1}^{2^M-1} p(h) \sum_{i=0}^{2^M-1} q_i (U_{ih} - U_i) = W \sum_{h=0}^{2^M-1} p(h) \sum_{i=0}^{2^M-1} q_i (N_h(i)-i) \quad (55)$$

$$= W \sum_{h=0}^{2^M-1} q_i \sum_{i=0}^{2^M-1} p(h)(N_h(i)-i) \quad (56)$$

$$= W \sum_{i=0} q_i \sum_{j=0} (j-i) p_i(j) \quad (57)$$

$$= W \sum_{i=0} q_i [\sum_{j=0} jp(j|i) - i] \quad (58)$$

$$= W \sum_{i=0} q_i \sum_{k=0} (1-2s_k) p_M(k) 2^k \quad (59)$$

이다. 식 (54)와 (59)를 식 (24)에 대입하면

$$= (1+b_p)W^2[\sum_{k=0}^{M-1} p_M(k)(1-p_M(k))2^{2k} + \{\sum_{i=0}^{2^M-1} p_M(k)(1-2s_k)2^k\}^2 p(i)] + 2W\sum_{i=0}^{2^M-1} q_i \sum_{k=0}^{M-1}(1-2s_k)p_M(k)2^k \quad (60)$$

으로 된다.[7] 식 (60)에서 알 수 있듯이 평균 자승 오차는 양자기 입력신호의 확율밀도함수 p(i)와 비트오율 $p_M(k)$에 의해서 결정된다.

비트의 위치 k에 따라 $p_M(k)$의 값이 다름을 이용하여, 중요도에 따라서 정보벡터의 비트들을 적절히 치환(permutation)시켜 채널부호기에 입력시킴으로써 채널오류에 의한 왜곡을 줄일 수 있다.

4. 길쌈부호에 대한 적용

정보벡터의 k번째 비트가 적절히 치환된 후 길쌈부호기에 입력되는 경우에, k번째 비트가 k번째로 부호기에 입력되지 않을 수 있으므로 식 (60)을 직접 사용할 수 없다.

부호율 r=b/n 길쌈부호기에 입력되는 벡터 b = $(b_1, b_2, \ldots, b_b)$의 입력순서를 $b_1, b_2, \ldots, b_b$로 두기로 한다. 치환을 v 라하면

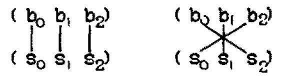
$$b_j = s_{v(i)}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, b \quad (61)$$

로 둘 수 있다. 따라서 식 (60)은

$$= (1+b_p)W^2[\sum_{k=0}^{M-1} P_b[v(k)](1-p_b[v(k)])2^{2k} + \{\sum_{i=0}^{2^M-1} p_b[v(k)](1-2s_k)2\}^2 p(i)] + 2W\sum_{i=0}^{2^M-1} q_i \sum_{k=0}^{M-1}(1-2s_k)p_b[v(k)]2^k \quad (62)$$

으로 된다. 식 (62)에서, p(i)와 비트별 오율 $p_b(k)$가 주어졌을 때 평균자승오차는 치환 v의 선택에 따라 달라짐을 알 수 있다.

그림-2는 r=3/4 L=5 에서의 두 사상을 나타낸 한 예이다.



(a) 사상 v_1 (b) 사상 v_2

그림-2. 두 사상의 예

부등비트오율 특성이 고려된 사상 v_2에대해서 길쌈 부호를 사용한 32Kbps DPCM 시스템의 신호대 잡음비를 구하여 그 성능을 조사해 보았다. 비트오율은 평균비트오율(각 비트오율의 평균치), 부등비트오율을[6] 적용하였으며 그 결과를 표-1 에 나타내었다. 보는 바와 같이 신호대 잡음비가 개선됨을 알 수 있다.

표-1. 신호대 잡음비

채널 SNR (dB)	신호대 잡음비 (dB)		
	평균비트오율 적용	부등비트오율 적용	BSC의편탐 오율 적용
4	5.26	5.27	7.38
5	11.33	12.99	10.2
6	15.25	16.94	13.21
7	17.12	17.86	15.65
8	17.82	18.02	17.40
9	18.02	18.55	17.90
10	18.06	18.06	18.05

4 결 론

DPCM 신호가 오류정정 부호 시스템을 통하여 전송될 때 정보어의 각비트는 서로 다른 비트오율을 가질 수 있다.

본 논문에서는 M 비트 DPCM 신호를 전송할 경우, 이러한 정보비트의 부등오율이 고려된 DPCM의 평균자승오차를 구할 수 있는 수식을 유도하였다. 이를 길쌈부호에 적용시켰으며, 그 결과 이진대칭통신로(BSC)의 편담 비트오율의 경우에 비해서 부등비트오율을 고려한 경우가 신호대 잡음비를 개선시킴을 알 수 있었다.

참고문헌

[1] N.Rydbeck and C.E.Sundberg, " Analysis of Digital Errors in Nonlinear Systems," IEEE Trans. Commu., COM-24,No.1, pp.59-65, Jan.1976.

[2] C.E. Sundberg, " Optimum Weighted PCM for Speech Signal," IEEE Trans. Commu. COM-26, No.6, pp872-81, June 1987.

[3] 안승춘, 서정욱, 이문호, " 가우시안 채널에 있어 가중치를 부여한 BPSK/PCM 음성신호의 비트검출 한계치 변화에 의한 신호 재생, " 전자공학회 논문집, Vol.24, 1987.9

[4] D.J.Goodman and C.E.Sundberg, "Transmission Errors and Forward Error Correction in Embeded Differential Pulse Code Modulation, " BSTJ, Vol.62, No.9, Nov.1983.

[5] D.J.Goodman,"Embeded DPCM for Variable Bit Rate Transmission," IEEE Trans. Commu., COM-28, No.7, July 1980

[6] 이수인,이상곤,문상재," 길쌈부호의 부동 오류 특성 및 그 응용",1988년도 전기 전자공학 학술대회 발표논문 , July,1988.

[7] D.J.Daut," Application of New Rational Rate Covolutional Codes To Image Transmission," IEEE