

C.G.M을 이용한 회전형 완전도체의

전류분포 분석

이 광 천<sup>o</sup>

김 정 기

중앙대학교 전자과

The Current Distribution of Revolution-Body  
Using Conjugate Gradient Method

LEE KWANG CHUN  
Dept. of Electronics

KIM JUNG KI  
CHUNG-ANG UNIV.

ABSTRACT

The method of Conjugate Gradient(C.G.M) is applied to the solution of current distribution from body of revolution (B.O.R).

Using the C.G.M, it is possible to analyze electrically large arbitrarily oriented B.O.R.

The fundamental differences between C.G.M and moment method are outlined. This method converges for any initial guess, and this techniqe gurantees a monotonic convergence.

Numerical results are presented for electromagnetic case which show good agreement with moment solution.

여기에 사용된 Conjugate Gradient Method Algorithm 은 Hestenes 와 Steifel 의 algorithm 과는 차이가 있는 Sarkar의 Algorithm을 사용하였다.

또한 산란체의 해석에 기본이 되는 전류분포를 구하는 데는 보통 표면상에서 homogeneous Dirichlet 경계 조건을 이용하는 적분식을 사용하지 않고 모양의 재역이나 singularity가 없는 Waterman의 확장경계 조건을 적용하여 3차원의 B.O.R(Body Of Revolution)을 1차원화 한 적분식을 사용하였다.

또한 Moment Method 로도 이 식의 해를 얻어서 C.G.M의 결과와 비교하였다.

C.G.M 과 Moment Method 의 차이점은 Moment Method 는 N개의 미지수를 가질 때 matrix가 N\*N 의 형태로 구성하여 Gaussian elimination에 의해서 해를 구하지만 C.G.M 은 그 문제 자체로부터 iterative 하게 얻어 진다는 것이 근본적인 차이 이다.

본 논문에서는 확장경계 조건(E.B.C)을 적용한 B.O.R의 적분식에 대한 이해 및 moment method 의 기초개념과 C.G.M의 algorithm 을 소개 하였다.

이 방법으로 해서 computer의 용량 문제나 N이 증가 할 때 Gaussian elimination 의 정확성의 한계 및 ill-condition (matrix singular)을 극복 할 수 있고 non-self-adjoint 일 때에도 monotonic 한 convergence 를 보장하고 초기치를 잘 설정함으로써 해서 연산시간을 줄일 수 있다.

1. 서 론

산란체의 해석에 있어서 임의의 전자장 이론의 operator equation 은

$A X = Y$  의 형태로 나타내어 질 수 있다.

A 는 일반적인 미적분(integro-differential) operator 이고 Y 는 주어진 excitation 이며 X 는 우리가 구하고자 하는 미지의 함수이다.

이러한 형태의 식을 푸는데는 크게 두가지의 방법이 있다. 첫째는 Hilbert space 내에서 span 하는 basis function을 이용한 내적(inner product)을 통하여 matrix식의 형태로 구성하고 이 matrix식을 변형하여 푸는 방법이 있다.

그리고 다른 하나는 범함수(functional)을 정의하여 이것을 반복적으로 최소화(minimizing)시켜서 해를 구하는 것이다.

전자의 방법으로는 Moment Method, Finite Element Method, Method of least squares 등이 있다.

후자의 경우에는 steepest descent method, Conjugate Gradient Method 등이 있다.

본 논문에서는 Moment Method 와 Conjugate Gradient method 를 이용하여 전자기에 관한 미적분 방정식을 풀이하였다.

2. 본 론

1. E.B.C 를 적용한 B.O.R 적분식

자유공간에서 도체에 전계가 인가하면 도체 표면에는  $\vec{E}$  에 의해 전하밀도  $\sigma$  와 전류밀도  $\vec{J}$  가 유기된다.

$\sigma, \vec{J}$  에 의해서 scattered field  $\vec{E}_s$  가 발생한다.

이 관계식은 다음과 같다.

$$\vec{E}_s = -j\omega\vec{A} - \nabla\Phi \quad (1)$$

$$\vec{A} = \mu/4\pi \iint J' K ds' \quad (2)$$

$$\Phi = 1/4\pi\epsilon \iint \sigma \cdot K ds \quad (3)$$

$$\sigma = -1/j\omega\nabla \cdot J' \quad (4)$$

$$K = \exp(-jkR)/R \quad (5)$$

여기서

- $\vec{A}$  : vector potential
- $\Phi$  : scalar potential
- $\mu$  : 투자율(permeability)
- $\epsilon$  : 유전율(dielectric constant)
- $k$  : 전파상수(propagation constant)
- $K$  : kernel function

B.O.R 에 적용하면

그림(B)에서 3차원 문제를 2차원화 하기 위하여  $q$ 를 정의 한다.

$$\vec{q} = \vec{r} \sin(\psi(z')) + \vec{z} \cos(\psi(z'))$$

$$\vec{J} = J_\phi \hat{\phi} + J_q \vec{q}$$

그에 따른 divergence는

$$\nabla \cdot \vec{J}' = 1/r(z') [\partial/\partial\phi J'_\phi + \partial/\partial q (r(z') J'_q)]$$

미소면적  $ds'$  는

$$ds' = r(z') d\phi da'$$

$$= r(z') d\phi' dz' / \cos(\psi(z'))$$

O.P(observation point) 와 S.P(source point) 간의 거리 R 은

$$R = (r + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2)^{1/2}$$

이 식들을 식(1)-(5) 에 대입하고

총 전계  $\vec{E}$ 는  $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_s$  이고

E.B.C를 적용하면 축 상의 총 전계는 zero가 되며 vector  $\vec{\phi}$  와  $\vec{z}$  는 수직이므로  $\vec{\phi} \cdot \vec{z} = 0$ ,  $\vec{q} \cdot \vec{z} = \cos(\psi(z'))$  이고  $r=0$  이다.

또한  $J'_\phi$  는  $\phi$ 에 따라 균일하므로  $\partial J'_\phi / \partial \phi' = 0$  이며,  $\phi$  에 따라 linear 하게 변한다면  $\int_{-\pi}^{\pi} \partial J'_\phi / \partial \phi' d\phi' = 0$  이다.

B.O.R 단면을 통과하는 총 전류는

$$I_q(z') = \int_{-\pi}^{\pi} J'_q r(z') d\phi' \text{ 이고}$$

양 끝의 전류를 zero라 할 때

$$I_z(z) = j\omega\epsilon/4\pi \int_0^L I_q(z') K(z, z') dz' + 1/j4\pi\omega\epsilon \int_0^L I_q(z') \partial/\partial z \partial z' K(z, z') dz'$$

만 E.B.C 적용한 B.O.R 적분식이 유도된다.

여기서  $K = \frac{\exp(-jk\sqrt{r(z')^2 + (z-z')^2})}{\sqrt{r(z')^2 + (z-z')^2}}$  이다.

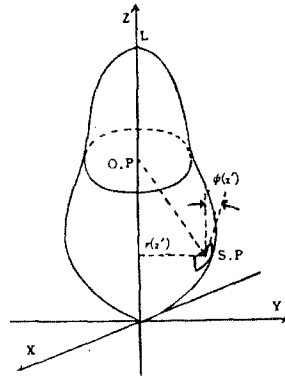


Fig (a) B.O.R with coordinate

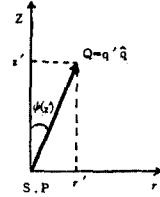


Fig (b) The unit vector tangential to the surface of the body and perpendicular

### 3. 수치 해석

#### 1> Moment Method

미적분 방정식을 moment method에 적용하는 방법을 알아보면 방정식을

$$A X = Y \text{ 로 정의 한다.}$$

L : operator

X : response

Y : excitation

이러한 방정식에 moment method를 적용하면 response는 다음과 같은 함수의 series로 표현된다.

$$X = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \quad (6)$$

$\alpha_i$  : constant

$x_i$  : basis function

여기에서

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i A x_i = Y \text{ 가 된다.} \quad (7)$$

그리고 Weighting function w 를 정의 할 때 구성식은 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle w_j, A x_i \rangle = \langle w_j, Y \rangle$$

w : weighting function

$$\langle a(x), b(x) \rangle = \int_x a(x) b(x) dx$$

(7) 식으로 부터 미지수  $\alpha_i$  가 N 개 존재하게 된다.

이 값들을 구하기 위해 j 를 1 에서 N 까지 변화시켜서 N 원 1차 방정식을 풀게 된다.

이 식은 matrix 형식으로 형성되어서

$$[A_{mn}] [\alpha_n] = [Y_m] \text{ 이 된다.}$$

$$[\alpha_n] = [A_{mn}^{-1}] [Y_m]$$

만  $[A_{mn}]$ 이 non singular 해야한다.

이 식으로부터  $\alpha_k$  를 구하여 (6)식에 대입하여 해를 구한다.

Moment method 는 basis function 과 weighting function의 선택에 따라 오차가 좌우된다.

가중함수와 weighting 함수를 같이 놓는 것이 Galerkin's method 이고 weighting 함수를  $\delta(\Delta)$  함수로 하는 것이 collocation method 이다.

본 논문에서는 weighting function으로 pulse function 을 선정하여 해를 구해 보았다.

## 2> Cojugate Gradient Method

고려해야 할  $AX = Y$  를 풀기 위해서 최소화 해야 할 functional  $F(X)$ 를 정의한다.

$$F(X) = \langle r, HX \rangle$$

H는 Hermitian positive definite operator 이고

내적(inner product)는 다음과 같다.

$$\langle C, D \rangle = \int C(x) \bar{D}(x) dx$$

$\bar{D}(x)$ 는  $D(x)$ 의 conjugate gradient 이다.

C의 norm은

$$\|C\|^2 = \langle C, C \rangle = \int |C(x)|^2 dx$$

잔차(residual)  $r$ 은  
 $r = AX - Y$  이다.

## 7. A 는 positive / negative definite operator 일때

$(A^{-1})^*$ 는  $(A^{-1})$ 의 adjoint 이다.

$$F(X) = \langle X_e - X, A(X_e - X) \rangle$$

$X_e$ 는 Exact solution이다.

$$X_e = A^{-1}Y$$

초기치를  $X_0$ 로 정하고  $P_0$ 는  $r_0$ 와 같이 놓는다.

$$P_0 = -r_0 = Y - AX_0 \text{ 이고}$$

$$X_{k+1} = X_k + t_k P_k$$

$$\text{여기서 } t_k = \|r_k\|^2 / \langle AP_k, P_k \rangle$$

$$r_{k+1} = r_k + t_k AP_k$$

$$P_{k+1} = -r_{k+1} + \alpha_k P_k$$

여기서  $\alpha = \|r_{k+1}\|^2 / \|r_k\|^2$  이다.

$I_{k+1}$ 은  $I_k$ 에서  $P_k$  방향으로  $t_k$ 만큼 이동하는 것을 말한다.

C. A가 모든 Y에서 임의의 operator 일때

functional  $F(X)$ 는

$$F(X) = \langle r, r \rangle = \|r\|^2$$

이 functional은 monotonic 하게 residual이 감소한다.

초기치  $I_0$ 에서

$$P_0 = -b_1 A^* r_0 = -b_1 A^* (AX_0 - Y)$$

$$X_{k+1} = X_k + t_k P_k$$

$$r_{k+1} = r_k + t_k A P_k$$

$$P_{k+1} = P_k - b_k A^* r_{k+1}$$

$$t_k = 1 / \|A P_k\|^2$$

$$b_k = 1 / \|A^* r_{k+1}\|^2 \text{ 이 된다.}$$

## 4. 결과 및 고찰

본문에서 언급한 수치해석 방법인 Conjugate Gradient Method 와 Moment Method 를 사용하여 표(1) 과 표(2)를 전류분포로 얻었다.

입사파는 마침음이 0.990066812를 같은 타원에 수직으로 입사하는 파(plane wave)를 고려 하였고 error의 허용치 (tolerance)는 10E-8 보다 작을 때 까지 반복 시켰으며 9개의 segment 로 나누었을 때의 전류분포를 구하였다.

C.G.M의 경우 22번째 iteration에서 오차 허용치에 만족한 해를 얻었으며 초기치(initial guess)는 0 으로 하였다.

M.M의 경우에는 pulse function을 가중함수로 사용하였다.

그리고 M.M은 최소한  $N*(N+1)$ 의 memory가 필요로 하지만 C.G.M 의 경우에는  $5*N$ 의 memory가 필요하다.

표(3)은 model에 대한 수치계산 과정에 있어서 각 step 의 error 값을 나타내 주며 그 error값이 monotonic하게 감소함으로 각 step 마다 monotonic하게 exact solution에 수렴함을 알 수 있다.

Table 1. Result using moment method

O.P	Real Part	Imag. Part
.056	.16441731E-02	.31610603E-02
.167	.37840380E-02	.72178948E-02
.278	.56382182E-02	.10692455E-01
.389	.68492032E-02	.12944020E-01
.500	.72674919E-02	.13718592E-01
.611	.68494797E-02	.12944237E-01
.722	.56384673E-02	.10692676E-01
.833	.37841545E-02	.72181016E-02
.944	.16442258E-02	.31611549E-02

Table 2. Result using C.G.M

O.P	Real Part	Imag. Part
.056	.167384748E-02	.321859124E-02
.167	.381003602E-02	.726737441E-02
.278	.563459299E-02	.106848272E-01
.389	.681887749E-02	.128858409E-01
.500	.722714987E-02	.136417304E-01
.611	.681910190E-02	.128863054E-01
.722	.563460787E-02	.106850006E-01
.833	.380994676E-02	.726728596E-02
.944	.167382671E-02	.321859073E-02

Table 3. Values of Error

Iteration No.	Error
1	.10000000E+01
2	.90830150E+00
3	.83790484E+00
4	.80803270E+00
5	.79635933E+00
6	.78198489E+00
7	.67025338E+00
8	.79371062E-01
9	.87591497E-02
10	.37085029E-02
11	.56502547E-04
12	.29847713E-04
13	.29241070E-04
14	.28581988E-04
15	.28963633E-04
16	.25010339E-04
17	.18645857E-04
18	.98251707E-06
19	.55925189E-06
20	.20897107E-06
21	.70967189E-07
22	.96314145E-08

5. 결 론

C.G.M 을 B.O.R 에 유기되는 current density를 구하는데 적용하였으며 수치해석 결과가 moment method 와 잘 일치함을 보였다.

이러한 C.G.M을 이용함으로써 해서 moment method 가 가지는 residual 의 수렴성을 보장 할 수 없고 self-adjoint 할 때 만 monotonic한 convergence를 하는 moment method 로써 해석하기 어려운 non-self-adjoint 한 경우에도 결과를 얻을 수 있다.

또한 matrix의 크기가 커짐에 따른 Gaussian elimination의 부정확성과 그 필요로 하는 computer 의 memory 용량이 최소  $N * N(N+1)$ 인 것에 비하여 C.G.M은  $5 * N$ 의 memory 용량만 필요하며 정확성을 임의로 정 할 수 있는 잇점이 있다.

그리고 초기치 설정을 잘 함으로써 computation time 를 단축 시킬 수 있다.

REFERENCES

[1] Magnus R.Hestenes & Eduard Stifel " Method of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems " J. Res. Nat. Bur. Standard., vol 49, no 152 pp. 409-436

[2] Tapan K. Sarkar " The application of the conjugate gradient method for the solution of operator equations arising in electromagnetic scattering from wire antennas " Radio Science Vol. 19 , No 5, pp 1156-1172 SEP-OCT 1984

[3] T.K.Sakar & S.M.Rao, " An Iterative Method for Solving Electrostatic Problems." IEEE Trans. Vol.AP-30, pp 611-616 , July , 1982.

[4] R.Redlich, "On the Extended Boundary Condition as Applied to the Dipole Antenna Problem,"IEEE Trans., Antennas Propagat., Vol.AP-32, No.4, pp. 403-404, April 1984

[5] R.F.Harrington, Field Computation by Moment Methods, New York ; Mcmillian, 1968

[6] C.D.Taylor, et al , " The Extended Boundary Condition Solution of the Dipole Antennas of Revolution," IEEE Trans., Antennas Propagation. , Vol. AP-20, No 6, pp.772-776, November 1972

[7] R. Mitra, Computer Technique for Electromagnetics , Pergamon Press , pp.44-55, 1973

[8] T.K. Sarkar , " A note on the choice of weighting functions in the method of moment , " IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-33, No.4, 1985

[9] Je-Hoon Yun , " The Current Distribution of Revolution-Body Antennas with Extended Boundary Condition." Master thesis , Chung Ang Univ. , December 1985.