

Narrow-Band FIR 디지털 필터의 최적 설계에 관한연구

허가인  
동아대학교 전자공학과

최부귀  
동아대학교 전자공학과

A Study on the Optimum Design of Narrow-Band FIR Digital Filters

Kang - In Heo

Dept. of Electronic Engineering  
Dong-A University

Boo - Kwi Choi

Dept. of Electronic Engineering  
Dong-A University

Abstract

In this paper, we have shown how, using the techniques of decimation and interpolation, a desired narrow-band filter can be realized with a greatly reduced number of multiplication per second in the realization over standard direct form implementation. Simulation results show that the FIR filter designed can be used to convert the sampling rate of data by factors of L/M.

1. 서론

디지털 신호 처리에서 입력 샘플링 비와 다른 출력 샘플링 비를 요구하는 시스템, 즉 텔레타이프, 팩시밀리, 비디오, Radar, Vocoder 등이 있다.

이러한 샘플링 비의 변환을 하는 방법에는 정수, 유리수, 무리수를 인수로 하는 방법이 있으며, 이 인수들로 샘플링 비를 증가(Interpolation), 감소(Decimation)시킨다.

최초의 Multirate의 개념은 E.P.F.Kan과 J.K.Aggarwal이 1972년에 소개하였다.

또 R.W.Schafer와 L.R.Rabiner는 Interpolation에 의한 신호 처리의 기법을 제시하였고, L.R.Rabiner와 R.E.Crochiere는 Multirate FIR 필터의 기본 이론을 밝혔다. 그 후 G.Oetken은 새로운 Interpolation 기법으로 알고리즘을 발표하였고, L.R.Rabiner 등은 Multistage에 대한 알고리즘을 발표하였다.

본 논문에서는 Parks와 McClellan의 프로그램에 의한 Low pass 필터를 구성하고, 승산 수를 줄이는 최적의 Multistage로 구성된 필터를 설계하였고, simulation으로 all pass 신호를 취하여 샘플링 변환된 시퀀스를 구하였다. 그리고 단일 단계에 대해 L=8, M=5로 샘플링 변환된 필터의 unit sample 응답을 구하였다.

2. 샘플링 비의 변환

연속적인 신호를 주기 T로 샘플링한 시퀀스 X(n)을 주기 T'인 다른 시퀀스 Y(m)을 얻는 구조를 그림1에 보았다.

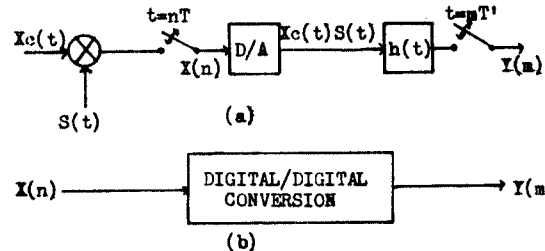


그림1 X(n)에서 Y(m)으로 디지털/디지털 변환

Digital/digital conversion of X(n) to Y(m)

그림1(a)에서 Xc(t)는 연속적인 입력신호이고, S(t)는 임펄스 열이다. Xc(t)를 주기 T로 샘플링한 경우 신호의 재생은 LPF의 차단 주파수가 F/2(=1/2T)이면 interpolation 공식으로 구해진다.

$$X_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) \cdot \text{sinc}(\pi(t-nT)/T) \quad \dots (1)$$
 신호의 재생에서 LPF가 선형위상인 경우 임펄스 응답 조건은 다음과 같다.

$$h(0) = 1$$

$$h(m) = 0, \quad m = \pm 1, \pm 2L, \dots, [N-1/2L] \dots (2)$$

여기서, L은 interpolation 인수이다.

interpolation된 샘플의 계산에서 Q 입력 시퀀스 샘플을 취하면 임펄스 응답의 길이는

$$N = \begin{cases} QL & , Q \text{와 } L \text{이 기수인 경우} \\ QL-1 & , Q \text{ 또는 } L \text{이偶수인 경우} \end{cases} \dots (3)$$

이다.

신호의 재생을 위한 방법에는 선택하는 Q 수에 따라 linear interpolation(Q=2)과 Lagrange interpolation(Q>2) 기법이 있다.

그림2에 L=5일 때 Q=2, 4, 6, 8의 주파수 응답을 보았다.

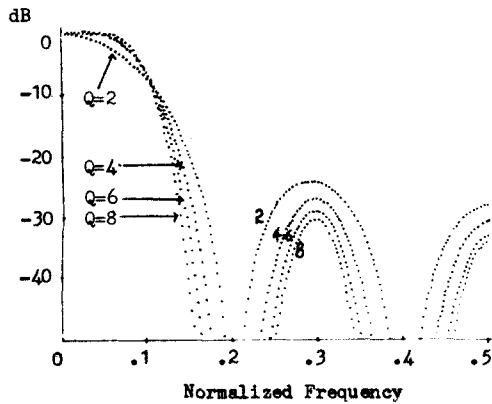


그림2 Interpolation의 주파수 응답: Q=2,4,6,8  
Frequency response of interpolation;  
Q=2,4,6,8

그림2에서 Q가 클때 passband에서 점점 평탄해지며 narrow-band가 됨을 알 수 있다.

이때 Q가 증가하면 필터의 차수가 증가가 된다.

그림1에서 주기 T와 T'를 다음과 같은 주기 비로 고려한다.

$$T'/T = F/F' = M/L \quad \dots (4)$$

여기서 L, M은 정수이다.

그림1(b)의 입출력 형식은 다음과 같다.

$$Y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_m(n) X\{\lfloor mM/L \rfloor - n\} \quad \dots (5)$$

$$\text{여기서 } g_m(n) = h\{(n + \delta_m)T\} \quad \dots (6a)$$

$$\begin{aligned} \delta &= 1/L \{mM - \lfloor mM/L \rfloor L\} \\ &= 1/L \{(mM) \oplus L\} \quad \dots (6b) \end{aligned}$$

또,  $\lfloor \cdot \rfloor$ 는 u와 같거나 보다 적은 가장 큰 정수이다.

식 (6a)에서  $g_m(n)$ 은 L의 독립 set값을 취하고, m에 주기적인 함수이므로, 샘플시간  $\{\lfloor mM/L \rfloor - n\}$ 의 입력에 대한 출력 샘플시간 m에서의 시스템 응답으로 주기적인 시변 선형 디지털 시스템이다.

식 (4)에서 새로운 샘플링 비는

$$F' = (L/M)F \quad \dots (7)$$

즉, L로써 샘플링 비를 증가 시킨 후 M으로 감소하는 방법으로 그림3의 구성이 된다.

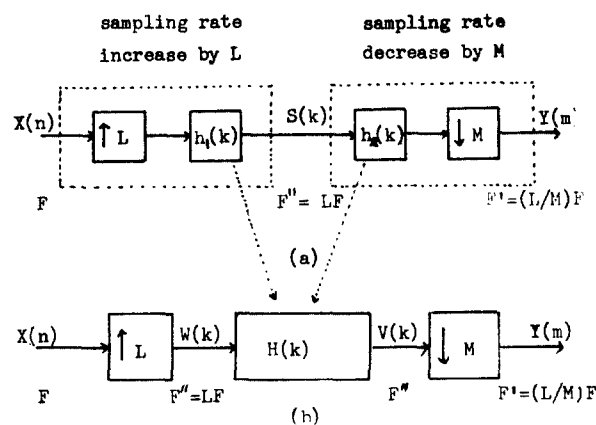


그림3 (a) 유리수로서 샘플링 비의 변환을 위한 interpolator와 decimator의 연결

(b) 이 처리의 효과적인 실행

(a) Cascade of an interpolator and decimator for sampling rate conversion by rational fractions

(b) A more efficient implementation of this process

그림3에서 LPF의 특성은

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} L, & |\omega| = |2\pi ft| < \min\{\pi/L, \pi/M\} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \dots (8)$$

이 된다.

그리므로 이상적인 차단 주파수는 decimator와 interpolator의 두 차단 주파수의 최소치이어야 한다.

이 때 출력 Y(m)은

$$\begin{aligned} Y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nL + mM \oplus L) X\{\lfloor mM/L \rfloor - n\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_m(n) X\{\lfloor mM/L \rfloor - n\} \quad \dots (9a) \end{aligned}$$

이고, 스펙트럼 형태는

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= (L/M)X(e^{j\omega L/M}), \text{ for } |\omega| < \min\{\pi/L, \pi/M\} \\ &= 0, \text{ otherwise} \quad \dots (9b) \end{aligned}$$

이다.

### 3. Multistage 디지털 필터의 설계방법

샘플링 비의 큰 변화에 대해서는 한 단계에서 전체 비를 감소 하는것보다 여러단으로 샘플링 비를 감소하는 것이 효과적이다.

(1) Interpolator와 Decimator의 최적 설계

디지털 필터에서 decimator와 interpolator는 쌍대이므로 한 경우만 고려할 수 있다.

설계에서 고려해야 할 것은 이들 비에서 초당 수행되어지는 승산 수와 가산 수  $[MADS/S]$ 이다. 각 단계에서 필터의 차수는 원하는 리플과 차단 주파수로 구하여 진다.

그림3(b)에서 여러 단으로 구성된 경우 i번째 단의 필터 차수  $N_{fi}$ 은 다음과 같다.

$$N_{fi} = D_{\infty}(\delta_p / 1, \delta_s) \cdot F_{i+1} / (F_i - F_p) \quad \dots (10)$$

전체 단의 계산 수  $R_T$ 는

$$R_T = D_{\infty}(\delta_p / 1, \delta_s) \cdot F_p \cdot S \quad \dots (11)$$

여기서

$$S = 2 / \left( \sum_{j=1}^{I-1} \prod_{k=1}^j M_k \right) + \sum_{j=1}^{I-1} M_j / \prod_{k=1}^j M_k \cdot [1 - \{(2-\delta_f)/2M\} \cdot \prod_{k=1}^j M_k]$$

그리므로 전체 단의 수 I의 값에 따라  $R_T$  값을 비교하여 수를 최적화 할 수 있다. 또 각 단의 필터 차수를 구할 수 있다.

(2) Narrow-band FIR 필터의 최적 설계

필터의 대역폭이 샘플링 비보다 적을 때 설계하기 위한 방법으로 설계 decimator와 interpolator의 2단 구성 이므로 passband 리플을 전체 리플과 같이 유지하기 위해 식(10)의  $D_{\infty}(\delta_p / 1, \delta_s)$ 를  $D_{\infty}(\delta_p / 2, \delta_s)$ 로 바꾸어 실행 한다.

4. Simulation 결과 및 고찰

$\delta = 0.01, \delta = 0.001, F = 0.05, F = 0.25, F = 1.0$  일 때 LPF를 설계 하였다. decimator(interpolator)의 경우 샘플 비  $M=L=20$  이다. 표1에 이 경우 전체 단의 수와 R, 필터의 차수를 보였다.

표1 M = 20인 LPF의 비교  
Comparisons for M=20 LPF

K	$D_m(\delta_p/M, \delta_s)$	S	R	M		N
				최적비	사용비	
1	2.541	20	55	20	20	110
2	2.760	1.925	44.2	7.44	10	14
				2.69	2	30
3	2.887	1.715	50.7	5.52	5	11
				2.24	2	13
				1.62	2	19

표1에서 K = 2일 때 필터1의 차수는 14, 필터2의 차수는 30으로 하는 LPF를 연결하면 된다. 표2에 narrow-band 필터의 경우가 보인다. 이 경우 M=10 이 된다.

표2 M = 10인 LPF  
Comparisons for M=10 LPF

K	R	M		N
		최적비	사용비	
1	17.75	10	10	119
2	11.7	$M_1 = 4.72$	5	$N_1 = 25$
		$M_2 = 2.12$	2	$N_2 = 27$

그림4에 McClellan 프로그램을 이용한 K = 1 일 때, K = 2 경우 두 필터를 convolution 하여 N = 51 했을 때 주파수 응답을 나타내었다. 그림4에서 주파수 응답은 거의 일치 하였다. 다음과 같은 all pass 신호를 고려한다.

$$X(n) = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ -a & , n = 0 \\ (1-a) \cdot a & , n \geq 1 \end{cases}$$

여기서  $a=0.9$  이다.

M = 10 인 narrow-band 필터에 통과 시켜 본 결과 입력 시퀀스 20개 당 decimate 된 출력 시퀀스는

.4783	.6009	.6849	.7277	.7371	.7431
-------	-------	-------	-------	-------	-------

이고, 입력 시퀀스 2개 당 interpolate 된 출력 시퀀스를 1경우 만 나타내면

입력 시퀀스	-.9000	.1000			
출력 시퀀스	.0001	-.0021	-.0054	-.0099	-.0131
	-.0117	-.0012	.0202	.0521	.0895
	.1241	.1482	.1540	.1394	.1066
	-.0623	.0155	-.0264	-.0581	-.0781

이다.

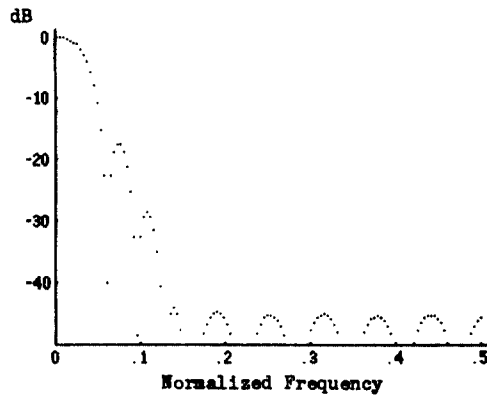
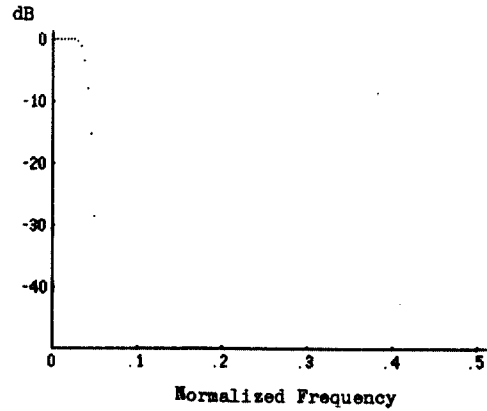


그림4 주파수 응답 (a)K = 1 (b)K = 2  
Frequency response for single stage

이 때 decimate 된 시퀀스의 주파수 응답이 그림5와 같이 규준화된 주파수 0.1 이 된다.

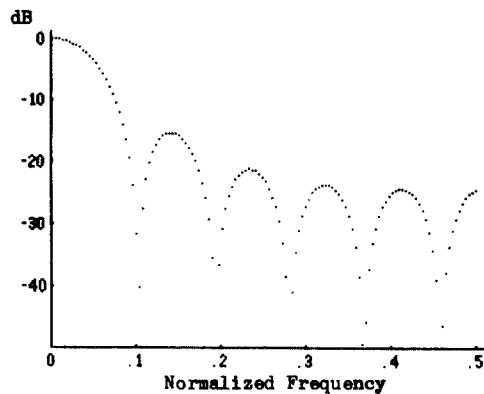


그림5 시퀀스 X(n)의 주파수 응답  
Frequency response of sequence X(n)

그림6에 K = 1 일 때 L=8, M=5 의 비로 구성 하였을 때 unit sample 응답과 주파수 응답을 보였다.

UNIT SAMPLE RESPONSE		
.0022335	-.0048430	-.0152422
-.0010998	.0321762	.0366542
-.0259960	-.1018255	-.0589927
.1691204	.4648550	.6019151
.4648550	.1691204	-.0589927
-.1018255	-.0259960	.0366542
.0321762	-.0010998	-.0152422
-.0048430	.0022335	0.0000000

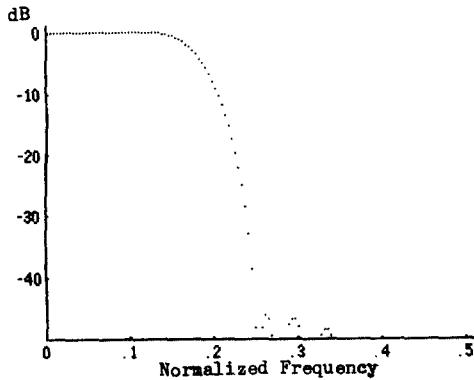


그림6은 그림4(a)의  $F = 1.0$  에서  $F' = (L/M) \cdot F = 1.6$  으로 샘플링 변화가 된 것이다.

## 5 결 론

본 논문에서는 승산 수가 감소되는 multistage narrow-band FIR 필터의 설계 기법을 제시하였다. 필터의 계수는 McClellan 프로그램을 이용하여 구하였으며 Oetken 과 Rabiner 의 프로그램들을 수정하여 이용 하였다.

simulation 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. multistage 구성이 필터의 차수와 승산 수를 감소시켰다.
2. decimation 과 interpolation 시켰을 때 임의의 신호에 대한 주파수 응답이 좋았으며, 그림6에서 입력 샘플링 비를 10 KHz 로 하면  $L = 8$ ,  $M = 5$  에서 출력은 16 KHz 가 됨을 알았다.

## 참 고 문 헌

- (1) E.P.F. Kan and J.K. Aggarwal, "Multirate digital filtering," IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-20, pp. 223-225, Aug 1972.
- (2) R.W. Schafer and L.R. Rabiner, "A digital signal processing approach to interpolation," Proceeding of the IEEE, Vol.61, No.6, June 1973.
- (3) J.H. McClellan, T.W. Parks and L.R. Rabiner, "A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters," IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-21, No.6, pp. 506-526, Dec 1973.

(4) R.E. Crochiere and L.R. Rabiner, "Optimum FIR digital filter implementation for decimation, interpolation, and narrow-band filtering," IEEE Trans. acoust., speech, signal Processing, Vol. ASSP-23, No.5, pp. 446-456, Oct 1975.

(5) R.E. Crochiere, L.R. Rabiner, R.R. Shively, "A novel implementation of digital filters," IEEE Trans. acoust., speech, signal processing, Vol. ASSP-23, No.5, Oct 1975.

(6) L.R. Rabiner and B. Gold, "Theory and application of digital signal processing", Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1975

(7) R.E. Crochiere and L.R. Rabiner, "Interpolation and decimation of digital signals - tutorial review," Proc. IEEE, Vol. 69, pp. 300-331, Mar 1981.