

웨이브 디지털 필터의 스케일링에 관한 연구

권 회 훈 김 명 기
동아대학교 전자공학과

A study on the scaling in wave digital filter

Hi Hoon Kwon Myung Ki Kim
Dept. of Electronics Eng., Dong-A University

Abstract

Digital filters suffer from roundoff noise and under overflows due to finite precision arithmetic effects.

Scaling is an attempt to alter internal signal levels such that all signals are as large as possible, yet without the occurrence of overflows.

Scaling requirements are implemented by the use of 'wave digital transformers'.

This paper describes a procedure for scaling wave digital filters to avoid overflow problems and at the same time maximizing the output signal-to-noise ratio.

Results indicate that the scaled networks have an improved signal to noise ratio over the unscaled filters under the condition that there be no overflows occurring.

1. 서 론

디지털 필터를 유한 어장으로 실현할때 발생하는 오차는 필터의 응답에 영향을 준다. 유한 어장의 문제로는 오우버플로우와 반올림 오차가 있다. 이 두가지 문제는 서로 보완적이므로 상호간의 균형을 유지하면서 SNR을 개선할 수 있는 방법을 찾는다. 이와같은 목적으로 필터에서 행하는 신호의 조작을 필터의 스케일링이라고 한다.

오우버플로우는 두 수의 합이 레지스터가 저장할 수 있는 가장 큰 값을 초과할때 발생한다.

오우버플로우는 고정소수점 연산방식일때 주로 발생하여 심한 출력의 왜곡과 발진을 일으킨다.

반올림 오차는 두 수를 합한후에 행하는 반올림이나 자리버림으로 발생한다. 이것은 매 승산기마다 1개씩 손재하는 부가적인 잡음원으로 오차를 발생하게 한다. 이 잡음원은 출력 신호에 영향을 미치지만 필터

의 입력레벨에는 영향을 받지 않는다.

잡음원이 입력에 영향을 미치지 않으므로 입력레벨을 올리면 SNR은 개선되지만 오우버플로우가 발생한다. 한편 입력의 진폭을 감소시키면 오우버플로우 문제는 없어지지만 SNR이 나빠진다.

따라서 입력신호의진폭은오우버플로우를 피하고 반올림 오차를 극복하는데 충분하도록 함으로서 WDF의 동특성 영역을 최대화하도록 한다.

본 논문은 M. N. S Swamy 방법으로 WDF를 설계하고 有限語長の 문제를 해결하는 방법에 관하여 고찰한다. 또한 WDF를 변압기법으로 스케일링하여 오우버플로우를 발생하지 않으면서 SNR을 개선하는 방법을 연구한다.

2. 신호의 진폭 결정

디지털 필터를 고정소수점 연산방식으로 구성할때 가산기에서 오우버플로우가 발생할 수 있다. 따라서 주어진 회로의 동특성 영역을 유지하면서 오우버플로우를 피하기 위하여 회로내에서 신호의 진폭 한계를 결정해야 한다.

|V_i(n)| ≤ ||F_i(e^{jw})||_p ||U(e^{jw})||_q ... (2-1)

여기서 1/p + 1/q = 1
p, q > 1

||A(e^{jw})||_p 는 L_p norm을 표시한다.

||A||_p = [sum_{0 ≤ w ≤ π} |A(w)|^p dw]^{1/p} ... (2-2)

p의 값이 ∞이면

||A||_∞ = max_{0 ≤ w ≤ π} |A(w)| ... (2-3)

오우버플로우를 없애기 위하여 |V_i(n)| ≤ |u|을 만족하는 (p,q) 값에는 (1,∞), (2,2), (∞,1)가 있다. F_i(e^{jw})의 L_∞ norm을 계산하는 것은 0 ≤ W ≤ π의 구간에서 F_i(e^{jw})의 최대치를 구하는 것이다 즉 (p,q)=(∞,1)은 |V_i(n)| ≤ 1이 되기 위한 ||F_i(e^{jw})||_∞ ≤ 1 값의 최대치이다.

|V_i(n)| ≤ ||F_i(e^{jw})||_1 ||U(e^{jw})||_∞ ... (2-4)

|V_i(n)| ≤ ||F_i(e^{jw})||_∞ ||U(e^{jw})||_1 ... (2-5)

|V_i(n)| ≤ ||F_i(e^{jw})||_2 ||U(e^{jw})||_2 ... (2-6)

3. 디지털 4 단자망의 구성

직렬인 인덕터의 디지털 4 단자망을 구한다.

이렬인 인덕터를 4 단자망으로 표시했을때 전압과 전류의 관계는

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & SL \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

전압의 입사파와 반사파로 표시하면

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_k \\ 1 & R_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k \\ I_k \end{bmatrix} \quad K=1, 2 \quad (3-2)$$

(3-1) 식을 (3-2) 식에 대입하면

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -SL \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_2 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

반사파와 입사파의 관계는

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 - R_1 + SL & 2R_1 \\ R_1 + R_2 + SL & R_1 + R_2 + SL \\ 2R_2 & R_1 - R_2 + SL \\ R_1 + R_2 + SL & R_1 + R_2 + SL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

쌍일 차변환하면 디지털 영역으로 바뀐다.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(R_2 - R_1 + L)Z + (R_2 - R_1 - L)}{(R_1 + R_2 + L)Z + (R_1 + R_2 - L)} & \frac{2R_1(Z+1)}{(R_1 + R_2 + L)Z + (R_1 + R_2 - L)} \\ \frac{2R_2(Z+1)}{(R_1 + R_2 + L)Z + (R_1 + R_2 - L)} & \frac{(R_1 - R_2 + L)Z + (R_1 - R_2 - L)}{(R_1 - R_2 + L)Z + (R_1 + R_2 - L)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

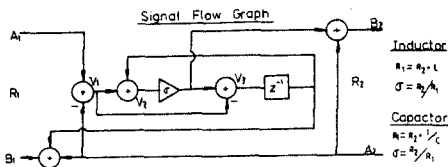
디지털 4 단자망을 종속접속시켰을때 지연이 없는 루우프를 없애기 위하여 다음 조건을 만족하여야 한다. [3]

$$R_1 = R_2 + L \quad (3-6)$$

(3-6) 식에서 $\sigma = R_2 / R_1$ 이라면 (3-7) 식이 된다.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\sigma-1)Z^{-1}}{1+\sigma Z^{-1}} & \frac{1+Z^{-1}}{1+\sigma Z^{-1}} \\ \frac{\sigma(1+Z^{-1})}{1+\sigma Z^{-1}} & \frac{(1-\sigma)}{1+\sigma Z^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

(3-7) 식으로 Fig.1 의 신호흐름선도를 작성한다.



Input	Node	Transfer Functions	
		F(z) (Inductor) D=1+σz ⁻¹	F(z) (Capacitor) D=1-σz ⁻¹
A ₁	V ₁	1	1
A ₂	V ₁	-1	-1
A ₁	V ₂	(1+z ⁻¹)/D	(1-z ⁻¹)/D
A ₂	V ₂	-(1+z ⁻¹)/D	-(1-z ⁻¹)/D
A ₁	V ₃	(σ-1)/D	(σ-1)/D
A ₂	V ₃	-(σ-1)/D	-(σ-1)/D
A ₁	B ₁	(C-1)z ⁻¹ /D	-(σ-1)z ⁻¹ /D
A ₂	B ₁	(1+z ⁻¹)/D	(1-z ⁻¹)/D
A ₁	B ₂	σ(1+z ⁻¹)/D	σ(1-z ⁻¹)/D
A ₂	B ₂	(1-σ)/D	(1+σ)/D

Fig.1. signal flow graph of series inductor

4. WDF의 전달함수

WDF의 전체적인 전달함수를 구하는데 전달산관계수의 행렬식을 사용한다. 종속접속인 회로망 전체의 T-행렬은 회로망을 구성하는 요소의 각각의 T-행렬을 곱하면 얻을 수 있다.

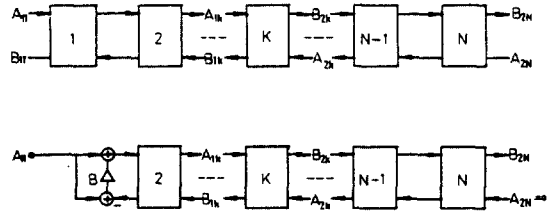


Fig.2. unscaled wave digital filter

Fig.2에서 입사파와 반사파의 관계는

$$\begin{bmatrix} B_{11} \\ A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N T_j \\ \sum_{j=1}^N T_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{2N} \\ B_{2N} \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

(4-1)식에서 $R_{2N} = R_L$ 일때 $A_{2N} = 0$ 이다.

$$\frac{B_{11}}{A_{11}} = \frac{1}{\left[\sum_{j=k}^N T_j \right]_{z=1}} \quad (4-2)$$

k번째 디지털 4 단자망에서

$$\begin{bmatrix} B_{1k} \\ A_{1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=k}^N T_j \\ \sum_{j=k}^N T_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{2N} \\ B_{2N} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

$$B_{1k} = A_{2N-1} \frac{\left[\sum_{j=k}^N T_j \right]_{z=1}}{\left[\sum_{j=1}^N T_j \right]_{z=1}} A_{11} \quad (4-4)$$

$$A_{1k} = \frac{\left[\sum_{j=k}^N T_j \right]_{z=1}}{\left[\sum_{j=1}^N T_j \right]_{z=1}} A_{11} \quad (4-5)$$

5. 스케일링 방법

스케일링은 아날로그 필터에서 각 단의 신호레벨을 변동시키기 위하여 이용된다. 스케일링을 행하기 위하여 전선비가 n:1인 이상적인 변압기를 구성요소의 사이에 삽입한다 이때 이상적인 변압기는 신호레벨을 높이거나 낮추는 역할을 한다.

M. N. S Swamy의 WDF는 디지털 4 단자망을 종속으로 접속하므로 변압기법으로 스케일링하는데 적합하다. WDF를 스케일링하기 위하여 n과 1/n인 승상기를 각 요소의 사이에 삽입한다.

변압기법에서 사용되는 이상적인 변압기와 그의 디지털 4 단자망을 Fig. 3. 에 나타냈다. Fig.4.는 WDF를 스케일링했을때 승상기의 위치를 표시한다.

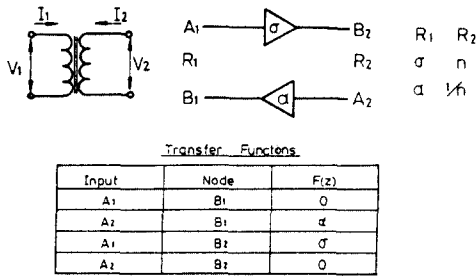


Fig. 3. Ideal transformer and digital 2-port

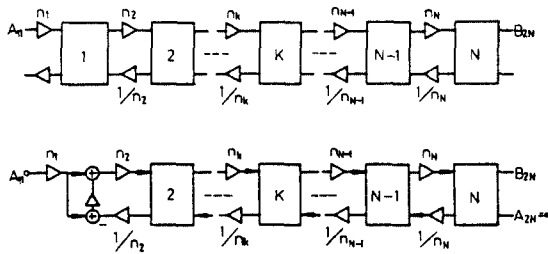


Fig. 4. Scaled wave digital filter

6. 설계 예 및 고찰

Fig.5은 통과 대역폭이 17~19.7 [KHZ]이고, 통과대 리플이 0.18[dB]인 대역통과필터이다. 이 사다리형 필터로 WDF를 설계하고 앞 절에서 설명한 변압기법을 이용하여 WDF를 스케일링한다.

아날로그 필터를 디지털 필터로 변환하기 위하여 쌍일차 변환을 사용할때 두 필터의 차단 주파수 영역이 일치하지 않는다. 디지털 필터를 설계하는데는 이러한 주파수 왜곡을 줄이기 위하여 아날로그 필터에 Prewarping을 한다.

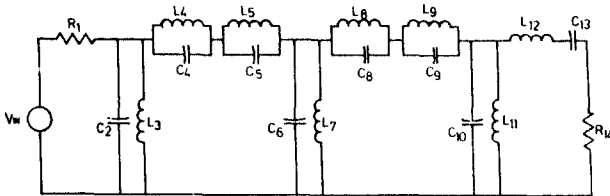


Fig.5. 12th-order band passfilter

오버버플로가 발생하지 않을 경우에 스케일링하지 않은 WDF와 스케일링한 WDF의 SNR을 비교한다. 스케일링 필터에서 입력 신호의 최대치는 1이 되도록 하고 반올림 잡음을 계산한다.

스케일링할때 n_k 값은 다음식으로 결정한다.

$$n_k = \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^{k-1} n_j \right] O_k}$$

Table1. L1 Scaling (Theoretical)

	Sam Freq. (kHz)	Max Input	Noise Variance	Signal Variance	S/N Ratio	S/N Improvement
Unscaled	125	.99	.11 E-7	.57 E-4	37.1	
	250	.99	.26 E-8	.14 E-4	27.3	
	500	.99	.96 E-7	.37 E-5	15.8	
	1000	.99	.56 E-5	.83 E-6	1.7	
Scaled	125	1	.19 E-7	.16 E-2	49.2	+12.1
	250	1	.12 E-6	.16 E-2	41.2	+13.9
	500	1	.96 E-6	.17 E-2	32.4	+16.6
	1000	1	.58 E-5	.13 E-2	23.5	+21.8

7. 결 론

1) WDF의 디지털 4 단자망이 종속접속되므로 변압기법으로 스케일링 되었다.

2) 스케일링했을때 스케일링하지 않은 경우보다 SNR가 7~35[dB] 개선되었다.

3) 샘플링 주파수를 증가시키면 WDF의 전체적인 SNR이 감소하였다.

참 고 문 헌

1. A.V. Oppenheim and R.W.Schafer, Digital Signal Processing. U.S.A.: Prentice-Hall, 1975.
2. T.A.Claasen "Effects of quantization and overflow in recursive digital filters", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-24, no. 6, pp. 517-529, Dec. 1976.
3. A.Fettweis, "On sensitivity and roundoff noise in wave digital filters", IEEE Trans. ASSP, vol. ASSP-22, no. 5, pp. 383-384, Oct. 1974.
4. L.B. Jackson, "Roundoff noise bounds derived from coefficient sensitivities for digital filters", IEEE Trans. CAS, Vol. CAS-23, no. 8, pp. 481-485, Aug. 1976.
5. M.N.S. Swamy and K.S. Thyagarajan, "A new type of wave digital filter" Journal of the Franklin Institute, vol. 300, no. 1, pp. 41-58, July 1975.
6. G.A. Jullien, "Residue number scaling and other operations using ROM array", IEEE Trans. Computer, vol. 29, no. 4, p. 325-336, Apr. 1978.
7. P. Dewide and E. Deprettere, "Orthogonal cascade realization of real multipoint digital filters," Int. J. Circuit Theory Appl., vol. 8, 245-277, 1980.