

주파수 안정도 측정

이오성, 송양섭, 전인덕, 정낙삼
한국표준연구소

Measurement of Frequency Stability

Il. S. Lee, Y. S. Song, I. D. Jeon, and N. S. Chung.
Korea Standards Research Institute

Abstract

This paper first reviews the definitions of frequency stability in the frequency domain and time domain. And measurement techniques and systems of the frequency stabilities are described. It is also presented that general characteristics of oscillators can be determined from the frequency stability measurements.

1. 서 론

오늘날 사용되고 있는 전자장비들은 대부분이 주파수 발진기를 내장하고 있는데 고속통신, 항해, 인공위성 추적 등과 관련된 장비들은 특히 정확한 주파수 신호를 발생하게 위하여 정밀 발진기를 사용하고 있다. 이러한 주파수 발진기들의 특성은 정확도, 경년변화, 안정도에 의해서 결정된다. 정확도란 명목주파수와 측정주파수의 차이를 나타내는 것으로 주파수 차이를 명목주파수로 나눈 상대주파수로서 표현한다. 일정기간 동안의 이 상대주파수의 변화량을 경년변화라고 한다. 주파수 안정도란 출력신호에 평면적으로 따르기 마련인 불규칙 요동(fluctuation)의 정도를 말하는데, 이것을 표현하는 방법에는 주파수 영역에서의 안정도와 시간 영역에서의 안정도가 있다.

본 논문에서는 주파수 안정도의 기본 개념과 주파수 안정도의 정의에 관해서 알아보고 (제 2장) 일반적으로 알려진 주파수 안정도의 측정방법 (제 3장) 과 측정된 데이터의 분석 방법 (제 4장)에 대해서

알아보려고 한다.

2. 주파수 안정도의 정의

(1) 기본 개념

주파수 안정도란 그 일반적인 의미는 주파수 발진기가 일정기간 동안 같은 주파수를 발생하는 정도를 말한다. 발진기의 출력신호는 일반적으로 다음 식으로 표시된다.

$$V(t) = (V_0 + \epsilon(t)) \sin(2\pi\nu_0 t + \phi(t)) \quad (1)$$

여기서, V_0 : 명목 최대 전압 진폭

$\epsilon(t)$: 진폭잡음

ν_0 : 명목 주파수

$\phi(t)$: 위상잡음

을 나타낸다.

이상적인 발진기에서는 $\epsilon(t)$ 와 $\phi(t)$ 는 항상 0이겠지만 실제 그런 발진기는 존재하지 않는다. 이 두 잡음 성분을 조사하는 것이 곧 그 발진기의 특성을 알아내는 것이다.

명목 주파수가 ν_0 인 발진기가 시간 t 에서 $\nu(t)$ 의 주파수를 발생한다면 주파수의 벗어난 정도는 상대주파수 $y(t)$ 에 의하여 다음과같이 표시된다.[1, 2]

$$y(t) \equiv \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi\nu_0} \quad (2)$$

이 식의 우변항은 식 (1)에서 sine 의 위상항을 시간에 대해 미분하여 얻어진다. 이 값의 크기는 발전기의 주파수 정확도를 나타내고 이 값의 시간에 따른 변화량이 주파수 안정도를 나타내는 양이다.

(2) 주파수 안정도의 제 1정의 - 주파수 영역

주파수 영역에서 주파수 안정도는 상대주파수 $y(t)$ 의 스펙트럼밀도 $S_y(f)$ 에 의해서 정의된다. 다시말해서 잡음 주파수 f 에서의 위상잡음 스펙트럼 밀도를 $S_\phi(f)$ 라고 하면 이것은 스펙트럼 분석기로 쉽게 측정할 수 있는 양이므로 다음의 관계식을 이용하여 $S_y(f)$ 를 구한다. [3]

$$S_y(f) = \left(\frac{f}{\nu_0}\right)^2 S_\phi(f) \quad (3)$$

$S_y(f)$ 는 그 단위가 $[\text{rad}^2/\text{Hz}]$ 인데 이 값이 작을 수록 잡음의 크기가 작으므로 곧 주파수 안정도는 높다.

(3) 주파수 안정도의 제 2정의 - 시간 영역

식 (2)에서 상대 주파수 $y(t)$ 의 시간에 대한 변화량은 측정을 위한 sample time 에 따라 달라질 수 있다. Sample time을 τ 라 할때 평균 상대주파수 \bar{y}_k 를 다음과 같이 정의하자.

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(t) dt \quad (4)$$

단, $k = 0, 1, 2, \dots$ 이고, 통계적인 처리를 위하여 일정주기 T 로 \bar{y}_k 를 반복 측정 한다면,

$$t_{k+1} = t_k + T \quad \text{이다.}$$

이때 주파수 안정도는 sample time τ 와 측정주기 T 및 데이터 개수 N 의 함수로서 다음 식으로 표현된다. [4, 5]

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left(\bar{y}_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right)^2 \right\rangle \quad (5)$$

여기서 $\langle g \rangle$ 는 g 의 무한 시간 평균을 나타낸다.

식 (5)를 Allan variance 라고 하는데 이 식에서 $N = 2, T = \tau$ (측정값 사이에 불균 시간인 없는 경우) 일때의 Allan variance 를 일반적으로 시간

영역에서의 주파수 안정도로 사용하고 있다. [6]

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &\equiv \langle \sigma_y^2(N = 2, T = \tau, \tau) \rangle \\ &= \left\langle \frac{(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2(M-1)} \sum_{k=1}^{M-1} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \quad (6) \end{aligned}$$

이 식에서 볼 수 있는 바와 같이 $\sigma_y^2(\tau)$ 이란 시간 τ 동안 측정해서 얻은 평균 상대 주파수를 τ 를 주기로 M 개 연속측정 하였을때 이웃하는 두 평균 상대 주파수의 변화량을 말한다. [5]

3. 주파수 안정도의 측정 방법

주파수 안정도의 측정방법에는 주파수 영역과 시간 영역에서의 측정방법이 있다. 두 영역에서 공통으로 사용되는 부품으로 피측정 발전기의 출력신호와 기준 발전기의 출력신호를 혼합하여 피측정 신호의 위상 잡음을 검출하는 혼합기가 있다. 이 혼합기는 일종의 위상 감지기 인데 schottky barrier diode 를 이용한 double balanced mixer 이다.

본 장에서는 주파수 영역에서의 측정방법 한 가지와 시간 영역에서의 측정방법 세가지를 소개한다.

(1) Loose Phase Lock Loop 방법

이 시스템의 구성도는 그림 1과 같다. 피측정 발전기의 신호와 기준 발전기의 신호를 혼합기의 두 입력단에 입력시킨다. 두 입력신호는 주파수는 동일 하되 90° 의 위상차를 가져야 한다. 따라서 혼합기 출력의 평균 전압은 0 이고 순간적인 전압변동은 두 신호 사이의 위상변화를 나타낸다. 이 혼합기의 출력을 저주파 통과 필터를 통과시켜서 반응 주파수를 제거하고, 증폭기를 통과 시킨후 전압에 의해 위상 조정이 가능한 기준 발전기로 feedback 시켜서 PLL(Phase Lock Loop)이 형성되도록 한다.

본 절에서 말하는 Loose PLL 이란 피측정 발전기의 위상 변화량 만큼 기준 발전기의 위상 조정 전압이 변화되지만 그 반응시간이 느리다는 것을 의미한다.

다시말해서 PLL 의 반응선풍이 측정하고자 하는 최소 잡음주파수 보다 좁아서 혼합기 출력을 스펙트럼 분석기로 입력시키면 피측정 발진기의 위상변화를 직접 관찰할 수 있다.

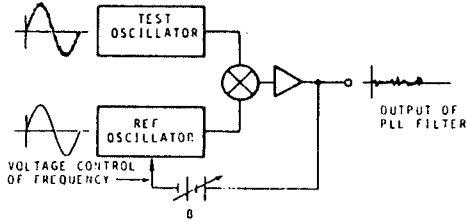


그림 1. 위상 (또는 시간) 요동 측정을 위한 Phase Lock Loop 방법.

(2) Tight Phase Lock Loop 방법

이 시스템의 구성도 및 작동 원리는 Loose PLL 과 같다. 이 시스템의 반응시간은 측정하고자 하는 최소 sample time 보다 짧아야 한다. 이 방법에서 혼합기의 출력은 voltage-to-frequency 변환기를 거쳐서 주파수 계수기로 입력되어 계수기에 의해서 주파수 요동이 측정된다.

(3) Beat Frequency 방법

이 방법은 heterodyne frequency 방법이라고 하는데 구성도는 그림 2와 같다. 피측정 발진기와 기준 발진기의 출력신호를 혼합기의 두 입력단에 입력시키면 출력단에서는 두 신호의 주파수 차이 즉, beat frequency 가 나온다. 이 beat frequency 를 주파수 계수기로 측정하고 명목 주파수로 나눔으로써 피측정 발진기의 상대주파수를 얻을 수 있다. 이 방법은 정밀도가 높으나 beat 주기보다 짧은 sample time 에서는 사용할 수 없다.

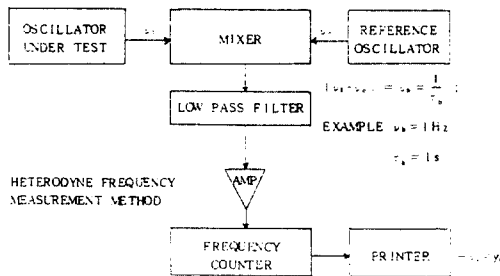


그림 2. Beat Frequency 방법.

(4) DMTD (Dual Mixer Time Difference) 방법

이 시스템은 Beat Frequency 방법의 장치를 두 개 합친 것과 같은 것으로 구성도는 그림 3과 같다. 그림에서 발진기 #1과 #2는 각각 피측정 발진기와 기준발진기를 나타내고 두 개의 혼합기에 동시에 입력되는 공통 발진기가 가운데 있다.

혼합기 1에서는 발진기 #1과 공통발진기의 주파수 차이에 해당하는 beat frequency 가 발생하고 혼합기 2에서는 발진기 #2와 공통 발진기의 주파수 차이에 해당하는 beat frequency 가 발생한다. 이 두 beat frequency 는 시간 간격 계수기의 start 단자와 stop 단자에 입력되어 두 beat frequency 의 시간차를 측정한다.

이 방법은 발진기 #1과 #2가 같은 주파수를 가진 경우에 유용하고 주파수를 측정하는 것이 아니라 시간 간격을 측정하는 것이기 때문에 ms 정도의 sample time 에 대해서도 불감 시간 없이 측정할 수 있다. 그러나 장치제작이 다른 시스템보다 다소 복잡하고 두 발진기의 위상변화가 클 경우에는 사용하기 어렵다. 다시 말해서 sample time 을 길게하여 측정할 경우에는 두 beat frequency 의 위상이 한 주기를 벗어날 수 있는데 이때는 start 와 stop 의 순서가 뒤바뀌게 되므로 이를 감지해 내어 계산해야 하는 어려움이 있다.

그림에서 phase shifter 는 두 beat frequency 의 위상을 조절하는데 사용된다.

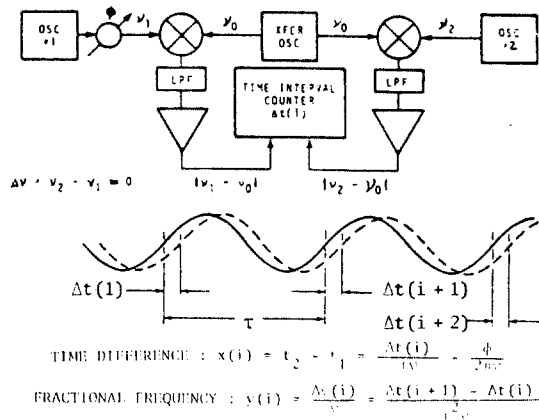


그림 3. DMTD(Dual Mixer Time Differency) 방법.

4. 측정값의 분석 방법

주파수 안정도 측정방법에 의하여 얻어진 데이터군을 분석하기 위하여, 특정한 주파수 운동 혹은 시간 운동을 계통적인 운동과 임의적인 운동으로 나누어 생각한다. 계통적인 운동이란 계산에 의해서 실제 시간이나 실제 주파수를 알 수 있는 위상차, 주파수 차, 선형 주파수 편이 등을 말한다. 임의적인 운동이란 데이터군에서 계통적인 운동을 제거했을 때 남은 부분으로 이것은 잡음을 주파수에 따라 다섯 가지로 분류한 다음절의 "잡음의 power-law" 모델에 의하여 설명될 수 있다.

(1) 잡음의 power-law [2, 7]

이것은 잡음 주파수 축상의 위상잡음 스펙트럼 밀도의 계승기에 의하여 잡음의 특성을 설명하는 모델인데 잡음은 주파수에 따라 다섯 가지로 분류되고 임의의 잡음이란 이 다섯 가지 잡음의 조합에 의해서 만들어 진다고 가정하고 있다. 즉, 상대주파수의 스펙트럼 밀도 $S_y(f)$ 는,

$$S_y(f) = h_{-2}f^{-2} + h_{-1}f^{-1} + h_0f^0 + h_1f^1 + h_2f^2 \quad (7)$$

로 표시되고 각 주파수의 잡음은 다음과 같이 명명한다. 단, h_α ($\alpha = -2 \sim +2$) 는 f^α 에 대한 계수로서 진폭을 나타낸다.

- 1) Random Walk FM (f^{-2})
- 2) Flicker FM (f^{-1})
- 3) White FM (f^0)
- 4) Flicker ϕ M (f^1)
- 5) White ϕ M (f^2)

측정한 데이터로부터 위와 같이 잡음을 분류함으로써 그 잡음의 근원을 예측할 수 있는데 일반적으로 알려진 사항은 다음과 같다.

- 1) Random Walk FM 잡음은 발전기의 환경, 즉 층 복이나 진동, 온도 등에 의하여 발생한다.
- 2) Flicker FM 잡음은 능동형 발전기의 공진 메카니즘에서 발생하거나 시용한 전자부품의 역자

인에서 발생한다. 이 잡음은 주로 고성능 발전기에서 나타난다.

- 3) White FM 잡음은 송출 발전기를 가지는 수동형 발전기에서 나타난다. 세습원자서거나 부파동 원자서기는 이와같은 잡음을 나타낸다.
- 4) Flicker ϕ M 잡음은 주로 전자부품의 잡음에서 비롯되는데 특히 증폭기나 주파수 배수기에서 발생한다.
- 5) White ϕ M 잡음은 광대역 위상잡음 연대 Flicker ϕ M 잡음과 거의 비슷한 근원에서만 들어지던 증폭기가 주된 원인이다. 이 잡음은 증폭기를 잘 디자인 한다면, 좋은 부품을 선택해서 사용하거나 또는 출력단에 협대역 필터를 사용하여 줄일 수 있다.

(2) 주파수 안정도의 주파수 영역과 시간 영역 사이의 변환

주파수 영역에서 구한 스펙트럼 밀도 $S_y(f)$ 와 시간 영역에서 구한 Allan variance $\sigma_y^2(\tau)$ 는 서로 변환이 가능하다. $S_y(f)$ 로부터 $\sigma_y^2(\tau)$ 로의 변환은 Cutler 에 의하여 그 일반적인 변환식이 유도되어 있으나 [4], $\sigma_y^2(\tau)$ 에서 $S_y(f)$ 로의 변환은 일반적인 변환식이 없고 단지 cutoff 주파수 이내에서 "잡음의 power-law" 모델이 적용될 때만 가능하다. 다시말해서 측정 대역폭이 f_h 라 할때

$$S_y(f) = \begin{cases} h_2 f, & 0 < f < f_h \\ 0, & f > f_h \end{cases} \quad (8)$$

이면

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle \sim |\tau|^\mu, \quad 2\pi f_h \gg 1 \quad (9)$$

이러는 사실이 Allan 과 Vessot 에 의하여 증명되었다. [6, 8] 여기서 μ 는 α 와 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \mu &= -\alpha - 1, & -3 < \alpha < -1 \\ \mu &= 2, & 1 \leq \alpha \end{aligned} \quad (10)$$

따라서 sample time τ 에 대한 $\sigma_y(\tau)$ 의 기울기와 그림 4에서 각 잡음의 기울기를 서로 대응시킬 수 있다. [2]

표 1은 "잡음은 power-law"가 적용될 때 $S_y(f)$ 와 $\sigma_y^2(\tau)$ 사이의 변환계수를 나타낸 것인데 a 는 $\sigma_y^2(\tau)$ 에서 $S_y(f)$ 로 변환할 때의 계수이고 b 는 $S_y(f)$ 에서 $\sigma_y^2(\tau)$ 으로 변환할 때의 계수이다.

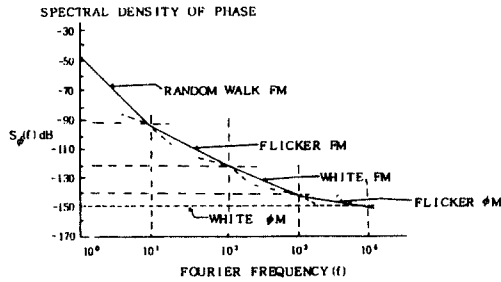


그림 4. 잡음의 종류와 그에 해당하는 위상 잡음 스펙트럼 밀도의 기울기.

표 1. 주파수 안정도의 시간 영역에서 주파수 영역으로의 변환계수 (a) 와 주파수에서 시간영역으로의 변환계수 (b)

$S_y(f) = a f^n$	$\sigma_y^2(\tau) = a \tau^n$	$\sigma_y^2(\tau) = b S_y(f)$
2 (white phase)	$\frac{(2\pi)^2 \tau^2 f^2}{3 f_h}$	$\frac{3 f_h}{(2\pi)^2 \tau^2 \nu_0^2}$
1 (flicker phase)	$\frac{(2\pi)^2 \tau^2 f}{3.81 + 3 \ln(\omega_h \tau)}$	$\frac{[3.81 + 3 \ln(\omega_h \tau)] f}{(2\pi)^2 \tau^2 \nu_0^2}$
0 (white frequency)	2τ	$\frac{f^2}{2 \tau \nu_0^2}$
-1 (flicker frequency)	$\frac{1}{2 \ln(2) \cdot f}$	$\frac{2 \cdot \ln(2) \cdot f^3}{\nu_0^2}$
-2 (random walk frequency)	$\frac{6}{(2\pi)^2 \tau f^2}$	$\frac{(2\pi)^2 \tau f^4}{6 \nu_0^2}$

6. 결 론

주파수 영역에서의 주파수 안정도 측정은 sample time 이 비교적 짧은 단기 안정도 측정에 있어서는 시간 영역에서의 측정보다 용이하다. 그리고 잡음의

스펙트럼 밀도의 기울기에 의하여 발전기의 특성을 알아낼 수 있는 장점이 있다. 반면에 시간 영역에서의 주파수 안정도 측정은 장기 안정도 측정에 적합하다. 따라서 주파수 안정도 측정에 있어서 바람직한 방법은 주파수 영역과 시간 영역의 측정 방법을 종합하여 측정이 중복되는 영역에서 상호 비교 보완하여 발전기의 장·단기 주파수 안정도 특성을 알아내도록 하는 것이다. 이를 위하여 한국표준연구소에서는 PNMS 와 DMTD 시스템을 종합하는 연구를 진행 중에 있다.

6. 참고 문헌

- (1) D. W. Allan, "The measurement of frequency and frequency stability of precision oscillator," NBS Tech. Note 669, May 1975.
- (2) D. A. Howe, "Frequency domain stability measurements: A tutorial introduction," NBS Tech. Note 679, Mar. 1976.
- (3) L. Cutler and C. Searle, "Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuations in frequency standards," Proc. IEEE, Vol. 54, pp. 136-154, Feb. 1966.
- (4) J. A. Barnes et al., "Characterization of frequency stability," NBS Tech. Note 394, Oct. 1970.
- (5) D. W. Allan, J. H. Shoaf and Donald Halford, "Statistics of time and frequency data analysis," Chapter 8 of NBS Monograph 140, pp. 151-204, May 1974.
- (6) D. W. Allan, "Statistics of atomic frequency standards," Proc. IEEE Vol. 54, pp. 221-230, Feb. 1966.
- (7) Barnes, J. A., et al., "Characterization of frequency stability," IEEE Trans. Instrum. Measure, Vol. IM-20, pp. 105-120, May, 1971.
- (8) R. F. C. Vessot, et al., "An intercomparison of hydrogen and cesium frequency standards," IEEE Trans. I & M, Vol. 15, pp. 165-176, Dec. 1966.