

최소대역폭 전송신호의 안정조건에 관한 연구

백 제 인^{○*}, 김 재 균^{**}

○: 한국전자통신연구소, **: 한국과학기술원

A Study on the condition for the stable transmission signal of minimum bandwidth

Je In Baek, Jae-kyoon Kim
ETRI KAIST

Abstract

In this paper, it is studied on the properties of the transmission signal for being tolerant to the timing jitter at the receiver, when an ideal low pass filter is used as the pulse shaper. A model for the transmission system with minimum bandwidth is presented and the related parameters to the tolerance or stability are explained. It has been proven that the necessary condition for a stable signaling is the same as the sufficient one.

1. 서론

저대역폭을 통한 펄스 통신시스템의 설계문제는, 주어진 전송신호의 특성을 고려하여 전송의 효율과 품질이 향상되도록 송수신 필터를 설계하는 것으로 볼 수 있다.

그런데, 송수신 필터의 설계는, 송신필터, 전송선로, 그리고 수신필터로 이어지는 전체적 전송경로에 대한 임펄스 반응파형의 성형화 문제를 기본으로 하고 있다[1]. 성형화된 펄스파형은 우선 intersymbol interference(ISI)가 없는 Nyquist 펄스이면서, 전송신호의 전력 및 선로 대역폭의 효율적 이용이 가능토록 하는 것이어야 한다.

최근에 와서, 대역폭 효율도가 가장 높은 극한적인 Nyquist 펄스파형인 것으로 알려진 sinc 함수를 성형펄스로 사용하는 최소대역폭 전송시스템의 실용화 가능성에 관하여 관심이 높아지고 있다[2,3]. 그동안 최소대역폭 전송의 실용화 문제는, 이론적으로는 가능하다는 식으로 막연하게 인식되어져 왔었다[4,5]. 그러던 중, 신호가 실용화 되기 위한 구체적인 성질로서 신호의 안정성이 정의되었고, 이와 관련하여 선로부호의 변수인 ISI sum variation (ISV) 이 도입되면서, 안정된 최소대역폭 전송이 되기 위한 충분조건이 발견되었다[6]. 또한, 이 조건을 배경으로 하여 새로운 최소대역폭 선로부호들이 제안되기에 이르렀다[7,8].

본 연구에서는 안정된 최소대역폭 전송을 위하여 제시된 충분조건이 사실상의 필요조건도 된다는 것을 보이고자 한다. 그리하여, 부호변수 ISV로써 신호의 안정성을 나타내는 방법이 더욱 타당하게 되고, 또한, 신호의 안정성과 신호의 전력분포 특성 사이의 관계가 밝혀지게 된다.

2. 최소대역폭 전송 모형

저대역에서의 최소대역폭 전송시스템을 그림 1과 같이 모형화 하였다[2,3].

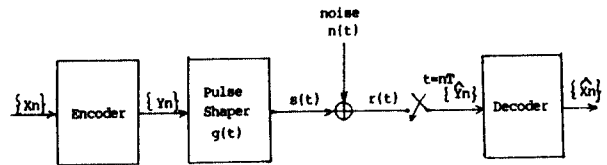


그림 1 최소대역폭 전송 모형

-1과 1의 symbol로 이루어진 입력 sequence $\{x_n\}$ 에 대해서 부호기는 L 레벨 symbol의 출력 sequence $\{y_n\}$ 을 만들어 낸다. Symbol 간의 시간간격을 T라 할 때에, 임펄스 함수 $\delta(t)$ 를 사용하여 부호기의 입출력을 시간함수로 나타내면 다음과 같다.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t-nT) \tag{1}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \delta(t-nT) \tag{2}$$

그리고, 이들을 Fourier 변환하여 주파수 영역에서 표시하면,

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega T} \tag{3}$$

$$Y(w) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-jn\omega T} \quad (4)$$

가 된다.

펄스 성형기는 임펄스 symbol y_n 을 함수 $g(t)$ 로 성형하는 필터로서, ISI가 없으면서 Nyquist 대역폭 즉, 최소 대역폭의 성질을 가지는 이상적인 저역여파기이다.

$$g(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} = \text{sinc} \left(\frac{\pi t}{T} \right) \quad (5)$$

그러므로, 펄스 성형기의 출력 $s(t)$ 는 다음과 같게 된다.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n g(t-nT) \quad (6)$$

$s(t)$ 는 전송과정에서 덧붙여진 신호잡음 $n(t)$ 와 합하여져서 매 T 초마다 표본화되고, 이 표본 sequence (\hat{x}_n) 으로부터 수신 데이터 sequence (\hat{x}_n)이 검출된다.

이 모형에서 펄스 성형기는, 통상의 전송시스템에서 송신필터, 전송선로 특성, 그리고 수신필터로 이어지는 전송 경로 전체를 통합하여 표현한 것인데, 잡음이 없다면 $t = nT$ 시각에서의 수신 표본치가 y_n 이 되므로 데이터의 온전한 검출이 가능하다.

그런데, 실제의 수신기에서는 표본화 시각이 $t=nT$ 로 정확히 유지되지 못하고 그것을 중심으로 하여 전후로 흔들리게 되는데(timing jitter), 이 상태의 표본 sequence로부터도 오차없는 검출이 가능한 경우를 '안정되어 있다'고 말하고 있다[6]. 따라서 $t=nT-T/2$ 와 $t=nT+T/2$ 의 구간에 대해서 신호 $s(t)$ 가 가질 수 있는 함수 값을 모두 나타낸 눈모양(eye pattern)을 보면, 안정된 신호가 되기 위해서는 눈(eye)이 좌우로 열리어져서, 눈의 횡축방향 크기, 즉, 눈폭(eye width)이 0이 아닌 값을 가지고 있어야 한다.

그러나, 본 모형에서와 같이 성형 펄스가 sinc 함수인 경우에는 일반적으로 눈폭이 0이 되어 버리는데, 그러하지 않기 위해서는 전송 symbol sequence (y_n)에 적절한 제약이 부가되어야 한다. 본 연구의 목적은, 눈폭이 0이 되지 않기 위한 충분조건으로 (y_n)이 만족하여야 하는 것으로 알려진 제약이 곧 바로 필요조건도 된다는 것을 규명하는 것이다.

3. 부호 변수

신호 $s(t)$ 의 눈폭 크기는 신호파형이 $t=nT$ 주변에서 인접 symbol의 영향을 어느 정도 받는지에 달려있음을 알 수 있다. 이 ISI 양을 파악하기 위하여, 임의 구간 동안의 symbol sequence (y_n)에 대하여 다음과 같이 정의된 running ISI sum (RIS) 라는 변수가 있다[2].

$$\text{RIS} [I, J] \triangleq \sum_{n=I}^J (-1)^n y_n \quad (7)$$

또, RIS의 최대 변화폭을 나타내는 ISI sum variation (ISV)는 다음과 같이 정의되어 있다[2].

$$\text{ISV} = \max_{\{y_n\}, I, J} \text{RIS} [I, J] \quad (8)$$

위의 두 정의식으로 부터, RIS는 부호화된 특정 symbol sequence에 대해서 정의된 변수이고, 이에 반하여 ISV는 모든 가능한 symbol sequence, 즉, 부호기 자체에 대해서 정의된 것임을 알 수 있다. 그리고, 식 (4)와 식 (7)로부터, RIS는 구간 $[I, J]$ 로 truncation된 symbol sequence (y_n)이 $w = \pi/T$ (Nyquist 주파수)에서 가지는 주파수 성분값과 같고, 이 사실과 식 (8)로부터, ISV는 주어진 신호부호의 임의의 출력 (y_n)이 $w = \pi/T$ 에서 최대로 어느 정도 크기의 주파수 성분을 가지고 있는가를 타내고 있음을 알 수 있다.

4. 안정된 최소대역폭 전송신호가 되기 위한 필요조건

안정된 최소대역폭 전송신호를 위한 충분조건으로서, 부호기의 ISV 값이 유한하여야 한다는 점은 이미 알려져있다. 이제, ISV의 유한성이 사실상의 충분조건도 된다는 점을 보이고자 한다. 여기서 '사실상'이라는 낱말이 뜻하는 바는 아직 엄격히 증명되지 못한 가정이 전제되어 있음을 가리킨다.

증명하고자 하는 명제는 다음과 같다.

추측 : 최소대역폭 신호의 눈모양이 좌우로 열리어져 있으면 이 부호기의 ISV는 유한한 값을 갖는다.

이것의 증명으로는, ISV가 무한대인 부호기에 대해서는 신호의 눈모양이 닫힌다는 것을 보이면 된다.

먼저 다음과 같은 가정을 설정하자.

가정 : 부호기는 그 복잡도가 유한하여 finite state transition diagram으로 표현될 수 있는데, 이 diagram에는 어떠한 state로 부터라도 도달될 수 있고, 한 주기의 RIS 기여량이 0이 되는 transition loop가 적어도 하나는 존재한다.

여기서 loop가 가지는 RIS 기여량이라는 것은 state transition 이 그 loop를 따라서 한바퀴 순회할 때, 그에 대응하여 발생되는 symbol sequence가 갖는 RIS 양을 말한다.

위의 가정이 전제된 상태에서, 제시된 추측이 성립되는 것을 증명한다.

논리 1 : 다음의 두 명제는 동격이다.

명제 1 : 부호기의 ISV가 무한대이다.

명제 2 : state transition diagram 상에는, 한 주기의 RIS 기여량이 0이 되지 않는 transition loop가 적어도 하나는 존재한다.

증명) 1. 명제 1 <--- 명제 2 :

State transition이 그 loop를 따라서 반복해서 진행

되는 경우, 그것에 대응 되는 symbol sequence (y_n)의 RIS는 발산한다. 따라서 이 부호기의 ISV는 무한대이다.

2. 명제 1 ----> 명제 2 ;

명제 1에 의하여 RIS가 무한대인 symbol sequence (y_n)이 존재하는데, 여기에 대응되는 state sequence (s_n)을 생각할 수 있다. 그런데, state의 종류는 유한하므로, 무한한 길이의 sequence (s_n)에는 어느 한 state가 무한정 나타날 것이다. 이 state를 s_r 라 하자. Sequence (s_n)을 쪼개어서, 유한한 길이의 segment로 나누되, 각 segment는 그 길이가 착수이며 s_r 로 부터 시작되도록 한다. 이렇게 무한개의 segment로 나누어 놓고 보면, 이들 segment 중에는 RIS 기여량이 0이 되지 않는 것이 적어도 하나는 존재한다. 왜냐하면, 만약 모든 segment의 RIS 기여량이 0이라면, 전체 sequence의 RIS 기여량도 0이 되는데, 이것은 앞의 전제와 상충되기 때문이다. 그런데, 각 segment는 state s_r 를 포함하는 transition loop를 뜻하므로 명제 2가 성립된다.

증명 끝.

논리 2 : 최소대역폭 전송시스템에서 한쪽 방향으로만 무한히 진행되는 주기적 symbol sequence에 대한 출력 파형이 언제나 유한한 값을 갖기 위한 필요충분 조건은, 한 주기(착수) 동안의 symbol sequence의 RIS 기여량이 0이 되면 된다.

증명) 다음 식과 그림 2에서와 같이 한쪽 방향으로만 무한히 진행되는 주기적 symbol sequence (y_n)을 생각하자.

$$y_n = \begin{cases} 0, & n < \tau \\ p_n, & n \geq \tau > 0 \end{cases} \quad (9)$$

여기서 n' 은 $(n-\tau)$ 의 modulo N 이며, N 은 착수로서 symbol sequence의 주기를 말한다. 만약에 주기 N 이 홀수이면 2개의 주기를 묶어서 하나의 주기로 보면 되므로, 착수의 제한은 일반성을 잃지 않는다. 이 (y_n)에는 $t=\tau$ 에서부터 symbol 패턴 p_0, p_1, \dots, p_{N-1} 이 반복해서 나타나고 있다. 편의상 $\tau > 0$ 이라 하였다. 그리고, τ 는 임의의 정수이므로, $t > 0$ 인 전체 구간 대신에 $0 \leq t \leq T/2$ 에 대해서만 신호를 관측하여도 된다.

이 sequence에 대한 최소대역폭 출력신호는 식 (5)와 식 (6)으로부터,

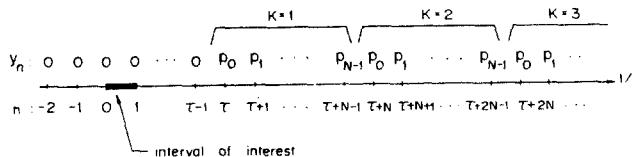


그림 2 단방향 진행형의 주기적인 symbol sequence

$$s(t) = \sum_{n=\tau}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} y_n}{nT-t} \cdot \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T/2 \quad (10)$$

이며, 이 증에서 K 번째 주기 sequence에 의한 부분항은 다음과 같다.

$$s_K(t) = \sum_{n=(K-1)N+\tau}^{KN+\tau-1} \frac{(-1)^{n+1} p_n}{nT-t} \cdot \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T} \quad (11)$$

여기서 $n' = [n - \tau] \bmod N$ 이다. Index를 변화시키고 정리하면,

$$s_K(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{z_i}{[(K-1)N+\tau+i]T-t} \cdot \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T} \quad (12)$$

이 된다. 여기서 $z_i = (-1)^{i+\tau+1} \cdot p_i$ 인데, $-z_i$ 는 K 번째 주기 sequence에서의 symbol p_i 에 의한 RIS 기여량을 말한다. $s(t)$ 의 summation 중에서 RIS 기여량의 부호에 따라 두 개의 부분 summation으로 표시하면, 다음과 같게 된다.

$$s_K(t) = \left[\sum_{i \in I^+} \frac{z_i}{[(K-1)N+\tau+i]T-t} - \sum_{i \in I^-} \frac{z_i}{[(K-1)N+\tau+i]T-t} \right] \cdot \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T} \quad (13)$$

여기서 $I^+ = \{i \mid 0 \leq i \leq N-1, z_i > 0\}$, $I^- = \{i \mid 0 \leq i \leq N-1, z_i < 0\}$ 이다. 분모에 있는 iT 항을 없애기 위하여 i 를 0나 N 으로 대치하면 $s_K(t)$ 의 상하한 범위를 얻을 수 있다. 즉,

$$LB(K,t) \leq s_K(t) \leq UB(K,t) \quad (14)$$

$$LB(K,t) = \frac{KNTZ^- + A}{[(KN+\tau)T-t][[(K-1)N+\tau]T-t]} \cdot \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T} \quad (15)$$

$$UB(K,t) = \frac{KNTZ^+ + B}{[(KN+\tau)T-t][[(K-1)N+\tau]T-t]} \cdot \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T} \quad (16)$$

여기서 A 와 B 는 K 와 무관한 상수이며, $Z = \sum_{i=0}^{N-1} z_i$ 로서 한 주기 동안의 symbol sequence로서 RIS 기여량의 역부호 값이다. 그런데,

$$s(t) = \sum_{K=1}^{\infty} s_K(t) \quad (17)$$

이므로, $s(t)$ 는 다음과 같은 한계치 사이에 존재하게 된다.

$$\sum_{K=1}^{\infty} LB(K,t) \leq s(t) \leq \sum_{K=1}^{\infty} UB(K,t), \quad 0 \leq t \leq T/2 \quad (18)$$

먼저 $Z = 0$ 인 경우를 생각하자. 이 경우 식 (15)와 식 (16)에서 분자는 K 와 무관하며 분모는 K^2 에 비례하게 된다. 그런데, $\sum_{K=1}^{\infty} 1/K^2$ 은 수렴하므로 $0 \leq t \leq T/2$ 에서 $s(t)$ 의 상하 한계치는 모두 수렴한다. 만약 $Z \neq 0$ 이라면, 분자는 K 에 비례하며 분모는 K^2 에 비례하게 되어 전체적인

K의 차수는 -1이 된다. 그런데, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ 는 발산하므로 s(t)의 수렴을 위한 필요충분조건은 Z축, 한 주기 동안의 symbol sequence의 RIS 기여량이 0이 되어야 하는 것이다. 증명 끝.

이제, 제시된 추측의 증명을 마무리한다. 이것은, 부호기의 ISV가 무한대이면, 진폭이 발산하는 최소대역폭 신호가 만들어질 수 있음을 보이면 된다. 그런데, 논리 1과 가정을 근거로 하여, ISV가 무한대인 부호기는 그림 3과 같은 symbol sequence (y_n)을 발생시킬 수 있다. 그리고, 이 sequence에 대한 최소대역폭 출력신호는 논리 2에 의거, 발산된다. 그러므로, 제시된 추측은 진실된 것이 된다.

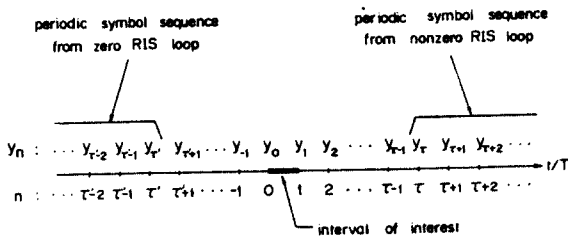


그림 3 Eye를 닫히게 하는 symbol sequence

5. 결론

최소대역폭 전송시스템의 모형이 설명되었고, 전송 신호의 안정성 문제 및 이와 관련된 변수들에 관하여 검토되었다.

안정된 전송신호가 되기 위한 충분조건인 것으로 알려져 있는 ISV의 유한성이 사실상의 충분조건도 된다는 것이 증명되었다. 이 과정에는 아직 엄격히 증명되지 못한 가정이 전제되어 있지만, 현재까지 알려진 모든 부호기들은 이 가정을 만족하고 있음을 확인할 수 있다. 이 증명 결과, 부호변수 ISV로써 신호의 안정성을 나타내는 방법이 더욱 타당하게 되었다.

한편, 이미 알려져 있는 바와 같이, ISV가 유한하면 symbol sequence (y_n)이 Nyquist 주파수 ($f = 1/2T$)에서 전력 분포 0을 나타낸다[2]. 눈모양 특성과 ISV, 그리고 전력 분포 특성들 사이의 조건관계를 도표로 나타내면 그림 4와 같다. 그림에서 A → B의 표시는 A가 B의 충분조건임을 나타내는 것이다. 본 연구에서는 그림에서의

조건 a가 증명되었는데, 이것과 조건 c로부터, 눈모양이 열리어져서 안정된 최소대역폭 특성을 가지는 신호는 $f = 1/2T$ 에서 전력성분을 가지지 않는다는 것을 알 수 있다. 따라서, 이러한 안정된 신호에다 pilot 신호를 덧붙여 전송하고자 할

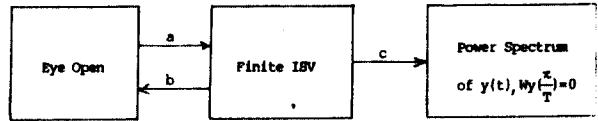


그림 4 명제들 사이의 조건관계

때에는 $f = 1/2T$ 부분을 이용하면 되므로, 대역폭이 추가될 필요가 없게 된다. 뿐만 아니라, 통과대역의 경계부근에서는 전력성분이 적으므로, 비이상적 저역여파기를 사용하더라도 성능저하가 적어서, 실용화 가치가 더욱 높음을 알 수 있다.

참고 문헌

- [1] P.W.Lucky, J.Salz, and E.J.Weldon, Jr., Principles of Data Communication, Mc-Graw Hill Book Company, N.Y., 1968.
- [2] D.Y.Kim, "A study on the line codes of minimum bandwidth," Ph.D. dissertation, KAIST, Seoul, Korea, Dec. 1982.
- [3] J.I.Baek, "A study on the ring-type line code for stable minimum bandwidth transmission," Ph.D. dissertation, KAIST, Seoul, Korea, Dec. 1985.
- [4] H.Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," AIEE Trans., vol.47, pp.617 - , 1928.
- [5] A.Croisier, "Introduction to pseudo ternary transmission codes," IBM J.Res. Develop., pp.354-367, Jul. 1970.
- [6] D.Y.Kim and J.K.Kim, "A condition for stable minimum bandwidth line codes," IEEE Trans. Commun., vol.COM-33, no.2, pp152-157, Feb. 1985.
- [7] D.Y.Kim, "Line codes for data transmission," Korea Institute of Electronics Electronics Engineers Review, vol.12, no.4, Aug. 1985.
- [8] D.Y.Kim, J.I.Baek, and J.K.Kim, "State of the art in minimum-bandwidth signalling", Seoul International Symposium on Electronics Engineering, Nov. 1985.