

Robust 한 단 입출력 PI 및 PID 예측 제어기 설계

°전 병 균 전 기 준
경북대학교 공과대학 전자공학과

Robust Design of SISO Digital PI and PID Predictor Controllers

Byeong Gyoon Jeon and Gi Joon Jeon

Department of Electronics, Kyung Pook National University

Abstract

Using simple linear prediction algorithm a design procedure of robust PI and PID controllers for SISO system, usually called 'PID predictor controllers, is developed. The design procedure is able to properly adjust gain margin and phase margin and control coefficients are selected in frequency domain. The performance of the PID predictor controller is superior to that of the normal PID controller in terms of robustness in design and disturbance rejection.

를 설명한다. 특히 Robust 한점과 상승시간과 정정 시간이 짧은 점을 임의의 플랜트에 대해서 Bode 선도와 제단입력에 대한 응답으로 확인하며 외란제거 효과도 확인한다.

II. 이산치 PID 예측제어기의 구조

이상적인 연속 PID 제어기의 방정식은

$$u(t) = K_p [e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}] \quad (1.a)$$

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (1.b)$$

로 주어진다. 여기서 $u(t)$ 는 제어 입력이고, $e(t)$ 는 오차, $w(t)$ 는 기준입력, $y(t)$ 는 시스템 출력, K_p 는 상수이득, T_i 는 적분시간, T_d 는 미분시간이다. 식(1)은 샘플링 시간이 작을 때는 차분방정식으로 근사화시킬 수 있다. 이때 적분부분의 여러가지 근사화 방법중 안정도 면에서 손상이 없고 우수한 사다리형 (Trapezoidal) 방법^{1,2)}을 사용하면 식(1)은

$$u(k) = K_p \left[e(k) + \frac{T_0}{T_i} \left\{ \frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right\} + \frac{T_d}{T_0} \{ e(k) - e(k-1) \} \right] \quad (2)$$

이되며 T_0 는 샘플링 시간이다.

한편 시스템에서 기준입력의 빠른 변화후에 크게 조정 되어지는 제어입력 변화들을 감소시키기 위하여 기준입력 $w(k)$ 를 미분항에서 제외시키면 다음과 같은 차분방정식으로 나타나며 이 출력미분제어 (Derivative-of-output controller)의 블록선도는 그림 1과 같다.^{1,2,8)} 여기서 H_p , H_i , H_D 는 각각 PID 제어기의 위치(P), 적분(I), 미분(D)부분의 전달함수이고 G 는 플랜트이다.

I. 서 론

디지털 제어 방식에는 제어하려는 시스템의 종류에 따라 많은 알고리즘들이 있지만 아직도 많이 사용하는 것은 이산치 PID (Discrete proportional-integral-derivative) 제어기로서 이는 여러가지 잇점이 있다.¹⁾⁻⁵⁾ 그러나 PID 제어기의 계수는 시스템 동작이 안정되도록 주의깊게 선택 되어야 하며 실시간 제어를 위하여 제어논리가 간단해야 하는 것과 같은 문제점들이 있다. 이런 문제점들을 극복하기 위하여 Aylor 등은⁶⁾ 안정도에 기초를 두어 이산치 PID 예측제어기라 불리는 설계절차를 개발하였으나 이 절차는 Robust 하지 못한 단점이 있다. 그후 Phillips 등은⁷⁾ 이 절차를 개선하여 Robust 한 제어시스템이 되는 주파수 응답 설계 절차를 개발하였다. 그런데 이 절차는 미분항이 무시되는 PI 제어기에 국한되었었다.

본 논문에서는 PI 및 PID 예측제어기를 보통의 PI 및 PID 제어기에 대한 장점을 비교 기술하고 Robust 한 PI 및 PID 예측제어기를 설계하는 절차

$$u(k) = K_p \left[e(k) + \frac{T_o}{T_i} \left\{ \frac{e(o) + e(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right\} + \frac{T_d}{T_o} \{-y(k) + y(k-1)\} \right] \quad (3)$$

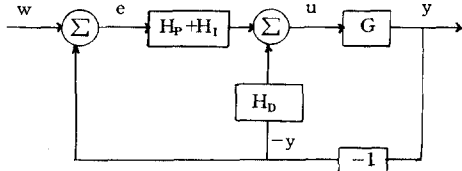


Fig.1 Derivative - of - output controller

제어기 입력 $e(t)$, $y(t)$ 나 제어기 출력 $u(t)$ 를 구할때 T_o 의 시간지연이 있는 시스템에 대해서는 $e(t)$ 와 $y(t)$ 의 다음값 $e(k+1)$ 과 $y(k+1)$ 를 예측하고 그것으로 식(3)에서 $u(k+1)$ 를 계산하여 이 값을 $t = (k+1)T_o$ 에서 시스템에 입력시키면 시간지연이 무시되는 장점이 있다. 그러나 예측된 값이 입력되므로 오차성분이 시스템에 들어가는 단점도 있다. 위의 장점을 활용하기 위하여 Aylor 등은⁶⁾ 단순한 선형 예측 알고리즘

$$e(k) = 2e(k-1) - e(k-2) \quad (4)$$

을 제안하였으며 이식을 식(3)의 $e(k)$ 와 $y(k)$ 를 예측하는데 사용하면

$$u(k) = K_p [2e(k-1) - e(k-2)] + \frac{K_p T_o}{T_i} \left[\frac{e(o)}{2} + e(k-1) - \frac{e(k-2)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right] + \frac{K_p T_d}{T_o} [-y(k-1) + y(k-2)] \quad (5)$$

가 되는데 이식이 이산치 PID 예측제어기 방정식이다.

III. 전달함수의 비교

이절에서는 보통의 PID 제어기와 PID 예측제어기를 비교 분석한다. 이에앞서 식(3)이나 식(5)는 비순환형 (non - recursive) 이므로 컴퓨터를 사용할 경우 기억용량의 한계를 초래한다. 그래서 식(3)이나 식(5)는 순환형으로 바뀌어서 비교될 것이다. 순환형 보통 PID 제어기 방정식 (Normal PID controller equation) 은 식(3)으로부터

$$u(k) - u(k-1) = K_p [e(k) - e(k-1)] + K_i [e(k) + e(k-1)] - K_D [y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)] \quad (6)$$

$$K_i \triangleq \frac{K_p T_o}{2T_i}, \quad K_D \triangleq \frac{K_p T_d}{T_o}$$

와 같이되며 이를 Z - 변환하면

$$u(z) = [K_p + K_i \frac{z+1}{z-1}] E(z) - K_D \frac{z-1}{z} Y(z) \quad (7)$$

이 된다. 만약 제어회로에 T_o 의 시간지연이 발생하는 경우는 (그것이 제어기의 계산에 의한것이든 플랜트와 센서에 의한것이든) 그시간 지연이 제어기의 입력에서 발생한다고 할 수 있다. 그래서 식(3)의 제어기 입력 $e(k)$ 와 $y(k)$ 대신에 $e(k-1)$ 와 $y(k-1)$ 를 넣으면 식(7)은

$$U(z) = \left[\frac{K_p}{z} + K_i \frac{z+1}{z(z-1)} \right] E(z) - K_D \frac{z-1}{z^2} Y(z) \quad (8)$$

와 같이되고 이것을 시간지연이 있는 보통의 PID 제어기라 부른다.

한편 순환형 PID 예측제어기는 식(5)로부터 $u(k) - u(k-1)$ 를 계산하고 그것을 Z - 변환하면

$$U(z) = \left[K_p \frac{2z-1}{z^2} + K_i \frac{4z^2-3z+1}{z^2(z-1)} \right] E(z) - K_D \frac{z-1}{z^2} Y(z) \quad (9)$$

이 되는데 이것이 순환형 PID 예측제어기 방정식 (PID predictor controller equation) 이다. 이식은 제어회로에 T_o 의 시간지연이 있는 경우를 고려한 것이므로 이제 식(8)과 식(9)를 직접 비교할 수 있다. 그래서 표 1에 있는 전달함수와 페루우프 전달함수로 두 제어기를 비교할 것이다.

Table 1. Transfer function

	position	integral	derivative
PID predictor contr.	$\frac{2z-1}{z^2}$	$\frac{4z^2-3z+1}{z^2(z-1)}$	$\frac{z-1}{z^2}$
normal PID contr.	$\frac{1}{z}$	$\frac{z+1}{z(z-1)}$	$\frac{z-1}{z^2}$

(i) 시간지연이 있는 보통의 PID 제어기

표 1에서 $H_p(z) = K_{PN} \frac{1}{z}$, $H_i(z) = K_{IN} \frac{z+1}{z(z-1)}$ 및 $H_D(z) = K_{DN} \frac{z-1}{z^2}$ 이며 밀수 N은 보통의 PID 제어기를 나타낸다. 따라서 페루우프 시스템 전달함수는

$$\frac{Y}{W} = \frac{(K_{PN} + K_{IN})G \cdot Z^2 + (-K_{PN} + K_{IN})G \cdot Z}{Z^2 + (K_{PN}G + K_{IN}G + K_{DN}G - 1)Z^2 + (-K_{DN}G + K_{IN}G - 2K_{DN}G)Z + K_{DN}G} \quad (10)$$

(ii) PID 예측제어기

표 1에서 $H_p(z) = K_{PP} \frac{2z-1}{z^2}$, $H_i(z) = K_{IP} \frac{4z^2-3z+1}{z^2(z-1)}$ 및 $H_D(z) = K_{DP} \frac{z-1}{z^2}$ 이며 밀수 P는 PID 예측제어기를 나타낸다. 위와 마찬가지로 페루우프 전달함수는

$$\frac{Y}{W} = \frac{(2K_{PP} + 4K_{IP})G \cdot Z^4 + (-3K_{PP} - 3K_{IP})G \cdot Z^3 + (K_{PP} + K_{IP})G}{Z^4 + (2K_{PP}G + 4K_{IP}G + K_{DN}G - 1)Z^3 + (-3K_{PP}G - 3K_{IP}G - 2K_{DN}G)Z^2 + (K_{PP}G + K_{IP}G + K_{DN}G)Z + K_{DN}G} \quad (11)$$

이 된다. 식(10)과 식(11)를 비교 해보면 K_{PN} , K_{IN} , K_{DN} 과 K_{PP} , K_{IP} , K_{DP} 에 관계없이 명백히 다르다. 이제 각부분의 전달함수에 대한 주파수 응답을 알아 볼것이다. 표 1로부터 두 제어기의 위치부분 전달함수 H_{pP} 와 H_{pN} 의 관계는

$$H_{pP} = K_p \frac{2z-1}{z^2} = \frac{2z-1}{z} \cdot \frac{K_p}{z} = \frac{2z-1}{z} \cdot H_{pN} \quad (12)$$

이 되고 같은 방법으로 적분, 미분부분의 전달함수 관계는

$$H_{IP} = K_I \frac{4z^2 - 3z + 1}{z^2(z-1)} = \frac{4z^2 - 3z + 1}{z(z+1)} \cdot \frac{K_I(z+1)}{z(z-1)} \\ = \frac{4z^2 - 3z + 1}{z(z+1)} K_{IN} \quad (13)$$

$$K_{DP} = K_D \frac{z-1}{z^2} = H_{DN} \quad (14)$$

이 된다. 이제 식 (12), (13), (14) 를 보면 $F_P(z) \triangleq \frac{2z-1}{z}$,

$F_I(z) \triangleq \frac{4z^2-3z+1}{z(z+1)}$, $F_D(z)=1$ 의 상대적인 관계가 있다.

한편 디지털 제어에 대한 주파수 응답 설계는 W -평면에서 행해지며^{9), 10)} 이때 Z -평면과 W -평면의 관계는

$$Z = \frac{1 + \frac{T_0 W}{2}}{1 - \frac{T_0 W}{2}} \quad (15)$$

와 같다. 그래서 $W = j\omega_w$ (ω_w 는 W -평면주파수)라 놓고 식 (15)를 이용하여 W -평면의 주파수에 대하여 $F_P(z)$, $F_I(z)$, $F_D(z)$ 의 응답을 그리면 그림 2와 같다.

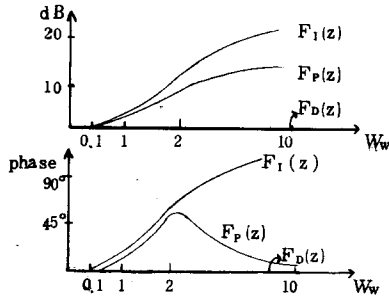


Fig.2 Frequency response of $F_P(z)$, $F_I(z)$ and $F_D(z)$.

그림 2를 보면 위치부분과 적분부분은 위상이 앞서 있고 미분부분은 위상이 같다. 그래서 제어회로 전체로 보면 PID 예측제어기는 보통의 PID 제어기에 비해서 상대적으로 위상진상 (phase-lead)이다. 이 사실은 다음과 같은 일반적인 효과가 있다.¹¹⁾ 첫째, 일반적으로 위상여유도와 이득여유도 (혹은 상대안정도)가 개선된다. 둘째, 개루우프 시스템의 대역폭이 증가한다. 셋째, 계단응답의 오우버 슈우트가 감소한다. 넷째, 시스템의 정상상태 오차는 변하지 않는다. 이상과 같은 효과로 PID 예측제어기의 우수성을 알 수 있다. PI 예측제어기와 보통의 PI 제어기 경우도 PID에서 미분부분을 제외하면 같은 방법으로 비교할 수 있다.

IV. 예측제어기의 설계

1) PI 예측제어기의 설계

여기서는 Phillips 등이¹⁰⁾ 개발한 설계방법을 확

장하여 사용하며 설계절차는, 먼저 적당한 위상여유도를 선정하고 그 다음 그값에 맞는 제어기의 계수들을 구한다. 그림 1에서 제어기의 전달함수는 $H(z) = H_P(z) + H_I(z)$ (PI 제어기 이므로 H_D 는 제외된다)이며 $H(z)$ 와 $G(z)$ 를 식 (15)를 사용하여 W -평면으로 변환한것을 $H(w)$ 와 $G(w)$ 라 하면 시스템의 특성 방정식은

$$1 + H(w)G(w) = 0 \quad (16)$$

인데 적당한 위상여유도 ϕ_m 이 발생하는 주파수를 $W = j\omega_{WP}$ 라 하면 식 (16)은

$$H(j\omega_{WP})G(j\omega_{WP}) = 1 \angle 180^\circ + \phi_m \quad (17)$$

이 되며 $H(j\omega_{WP})$ 의 위상 θ 는

$$\theta = \angle H(j\omega_{WP}) = \angle 180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_{WP}) \quad (18)$$

이 된다.

한편 표 1로부터 위치와 적분부분 전달함수는

$$H_P(w) = K_{PP} \frac{(1 - \frac{T_0 W}{2})(1 + \frac{3T_0 W}{2})}{(1 + \frac{T_0 W}{2})^2} \quad (19a)$$

$$H_I(w) = K_{IP} \frac{2(1 + \frac{3}{2} T_0 W + T_0^2 W^2)(1 - \frac{T_0 W}{2})}{(1 + T_0 W + \frac{T_0^2 W^2}{4})T_0 W} \quad (19b)$$

이 되는데 $W = j\omega_{WP}$ 에서 $H_P(w) + H_I(w)$ 의 주파수 응답을 실수와 허수부분으로 나누면

$$H(j\omega_{WP}) = (K_{PP}R_P + K_{IP}R_I) + j(K_{PP}X_P + K_{IP}X_I) \quad (20)$$

이 되며 이식을 식 (17)에 대입하고 실수부분과 허수부분으로 각각 분리해 보면

$$K_{PP}R_P + K_{IP}R_I = \left| \frac{1}{G(j\omega_{WP})} \right| \cos \theta \quad (21a)$$

$$K_{PP}X_P + K_{IP}X_I = \left| \frac{1}{G(j\omega_{WP})} \right| \sin \theta \quad (21b)$$

이 되므로 이식에서 K_{PP} 와 K_{IP} 를 다음과 같이 구한다.

$$K_{PP} = \frac{R_I \left| \frac{1}{G(j\omega_{WP})} \right| \sin \theta - X_I \left| \frac{1}{G(j\omega_{WP})} \right| \cos \theta}{R_I X_P - X_I R_P} \quad (22a)$$

$$K_{IP} = \frac{X_P \left| \frac{1}{G(j\omega_{WP})} \right| \cos \theta - R_P \left| \frac{1}{G(j\omega_{WP})} \right| \sin \theta}{R_I X_P - X_I R_P} \quad (22b)$$

(2) PID 예측제어기의 설계

Phillips 등이⁷⁾ 개발한 설계절차는 PI에만 국한되어 있다. 만일 PID로 확장한다면 제어기 전달함수는

보통의 PID 제어기와 같으며 Robust 한면에서는 전혀 잇점이 없다. 그래서 여기서는 Robust 한 PID 예측제어기를 설계할 것이다.

여기서도 PI 경우와 같은 방법으로 시스템의 특성 방정식을 구하면

$$1 + \{H_P(w) + H_I(w) + H_D(w)\}G(w) = 0 \quad (23)$$

이 되는데 $H(w) \triangleq H_P(w) + H_I(w) + H_D(w)$ 라 하고 적당한 위상여유도 ϕ_m 가 발생하는 주파수를 $W = j\omega_{WP}$ 라 하면

$$H(j\omega_{WP}) \cdot G(j\omega_{WP}) = 1 \angle 180^\circ + \phi_m \quad (24)$$

이 된다. $H(j\omega_{WP})$ 의 위상 θ 와 표 1로부터 제어기 전달함수를 구해보면

$$\theta = \angle H(j\omega_{WP}) = 180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_{WP}) \quad (25)$$

$$H(w) = K_{PP} \frac{(1 - \frac{T_o W}{2})(1 + \frac{3T_o W}{2})}{(1 + \frac{T_o W}{2})^2} + K_{IP} \frac{(1 + \frac{3T_o W}{2} + T_o^2 W^2)(1 - \frac{T_o W}{2})}{(1 + T_o W + \frac{T_o^2 W^2}{4}) T_o W} + K_{DP} \frac{(1 - \frac{T_o W}{2}) T_o W}{1 + \frac{T_o W}{2}} \quad (26)$$

이 되므로 $W = j\omega_{WP}$ 에서 $H(w)$ 의 주파수 응답을 실수부분과 허수부분으로 나누면

$$H(j\omega_{WP}) = (K_{PP}R_P + K_{IP}R_I + K_{DP}R_D) + j(K_{DP}X_P + K_{IP}X_I + K_{DP}X_D) \quad (27)$$

이 된다. 이식을 식 (24)에 대입하고 다시 실수부분과 허수부분으로 나누면 다음식이 된다.

$$K_{PP}R_P + K_{IP}R_I + K_{DP}R_D = \left| \frac{1}{G(j\omega_{WP})} \right| \cos \theta \quad (28a)$$

$$K_{DP}X_P + K_{IP}X_I + K_{DP}X_D = \left| \frac{1}{G(j\omega_{WP})} \right| \sin \theta \quad (28b)$$

여기서는 K_{PP} , K_{IP} , K_{DP} 가 유일하게 결정되지 않으나 다음과 같은 조건들이 있다. 즉, 첫째, $K_{PP} > 0, K_{IP} > 0, K_{DP} > 0$, 둘째, $e(t)$ 에 대해서 최종치 정리를 적용하여 정상상태 오차를 최소로 하는 제어기의 계수를 구할 수 있으며^{5), 11)} 세째, 그림 1은 다중루우프이므로 개루우프 전달함수는

$$F(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\{H_P(z) + H_I(z)\}G(z)}{1 + G(z)H_D(z)} \quad (29)$$

이 되는데 시스템이 안정되기 위하여 $F(z)$ 의 모든 극점과 영점들이 모두 Z -평면의 단위원 안에 있어

야 한다.¹¹⁾ 이상의 조건과 식 (28)에 의하여 제어기의 계수들을 선택한다.

V. 알고리즘

지금까지 설명한 PID 예측제어기의 계수들을 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

i) 보상되지 않은 플랜트 $G(w)$ 의 주파수 응답으로부터 식 (25)의 θ 가 음이 되는 적당한 주파수 ω_{WP} 를 선택한다. (경험상 $\frac{\omega_N}{20} < \omega_{WP} < \frac{\omega_N}{5}$, ω_N : Nyquist 주파수)

ii) 식 (28)의 각부분의 값을 계산한것과 앞절의 세가지 조건을 만족하는 계수들을 구한다.

iii) 구해진 계수들에 대해서 이득여유도가 적당한지 식 (29)의 주파수 응답을 구한다.

iv) 만약여유도가 적당하지 않으면 i)로 돌아가서 θ 가 음이 되는 다른 주파수 ω_{WP} 를 선택한다.

한편 PI 예측제어기의 경우는 위의 알고리즘에서 H_D 만 제외시키면 제어기의 계수가 유일하게 구해진다.

VI. 컴퓨터 시뮬레이션 및 고찰

PID 예측제어기와 보통의 PID 제어기의 성능을 임의의 플랜트

$$G(z) = \frac{z + 0.748}{z^2 - 1.460z + 0.562} \quad (30)$$

에 대한 컴퓨터 시뮬레이션으로 비교하였다.

(i) 같은 위상여유도에 대한 이득여유도의 비교
식 (30)의 플랜트에 대해서 두 제어기로 제어회로를 구성하고 위상여유도를 45° 로 주었을 때 개루우프 전달함수 식 (29)로 이득여유도를 조사한 결과가 그림 3과 4에 있다. 그림을 보면 PID 예측제어기의 경우는 7.1 dB의 이득여유도가 있고 보통의 PID 제어기 경우는 약 5.4 dB의 이득여유도가 있다.

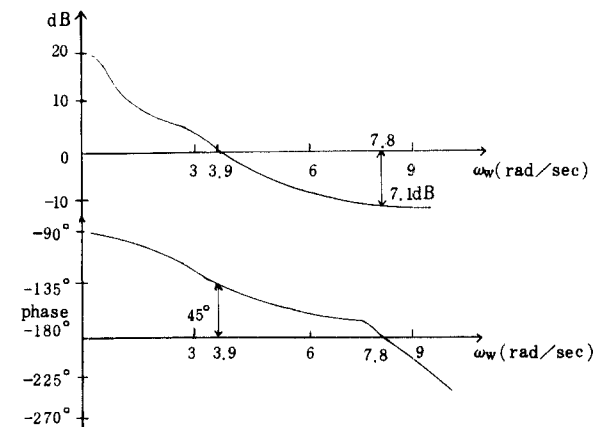


Fig.3 Frequency response (PID predictor controller)

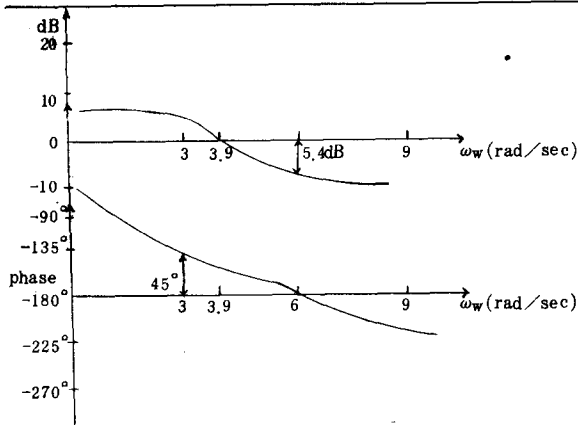


Fig.4. Frequency response(normal PID coroller)

(ii) 구형파 입력에 대한 응답

두 PID 제어기의 입력신호에 대한 응답을 비교하기 위하여 구형파를 입력시켰을때 그 응답을 그림 5와 6에 나타내었다. 그림을 보면 PID 예측제어기의 경우가 정정시간이 짧은 것을 알 수 있다.

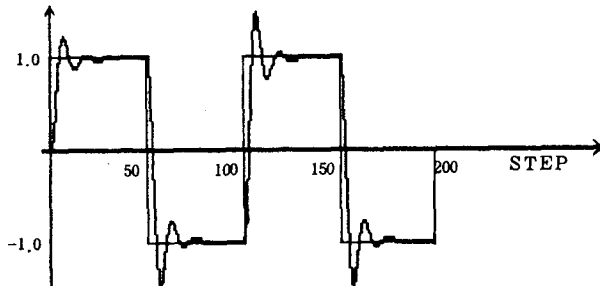


Fig.5. Output when PID predictor controller is used

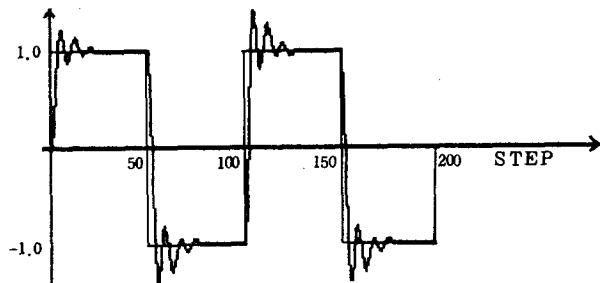


Fig.6. Output when normal PID controller is used

VII. 결 론

본 논문은 Robust한 PI 및 PID 예측제어기의 설계 방법을 개발한 것이다. PID 예측제어기는 PI 예측제어기의 확장이며 위상여유도와 이득여유도를 충분히 주므로써 대부분의 설계 방법들이 비선형 특성을 무시하여 생길 수 있는 시스템 불안정의 염려를 줄일 수 있었으며, 외란의 제거와 구형파 입력에 대한 응답이 좋았다. 그리고 플랜트는 주파수 응답만 알면 되므로 보통의 설계 방법과는 달리 높은 차수의 플랜트에 대해서도 적용할 수 있는 장점이 있다.

다만 PID 예측제어기에서 제어계수들이 유일하게 결정되지 않으나 다른 설계제약사항을 고려한다면 크게 문제되지 않을 것이다.

참 고 문 헌

1. R. Iserman, Digital Control System. New York: Springer-Verlag, 1984.
2. K.J. Astrom and B. Wittenmark, Computer Controlled Systems Theory and Design. Prentice-Hall Inc. N.J. 1984.
3. R.A. Mollenkamp, C.L. Smith, and A.B. Corripio, "Designing a digital controller for fast processes," Instrum. Contr. Syst., Vol.46, no.8, pp.47-49, Aug. 1973.
4. A.B. Corripio, C.L. Smith, and P.W. Murill, "Evalulating digital PI and PID controller performance," Instrum. Contr. Syst., Vol.46, no.7, pp.56-58, July 1973.
5. B.C. Kuo, Digital Control System. New York: Holt, Rinehart and Winston, Ind. pp.509-694, 1980.
6. J.H. Aylor, R.L. Ramey and G. Cook, "Design and Application of a Microprocessor PID Predictor Controller," IEEE Trans. Inc. Electron. and Contr. Instrum., Vol. IECI-27, pp.133-137, Aug. 1980.
7. C.L. Phillips and J.M. Parr, "Robust Design of a Digital PID Predictor Controller," IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. IE-31, pp.328-332, Nov.1984.
8. Davies, W.T.D. Control Algorithm for DDC. Instrument Practice 21, Nr.1. 70-77, 1967.
9. C.L. Phillips and H. Troy Nagle, JR. Digital Control System Analysis and Design, Prentice-Hall, Inc. pp.190-265, 1984.
10. C.L. Phillips and C.I.T. Huang, "Bode Design of Digital Controllers," IEEE Trans. Education, Vol. E-26, pp.70-71, May 1983.
11. B.C. Kuo, Automatic Control Systems, Prentice-Hall, Inc. pp.468-685, 1982.