

PR Shaped SQAM 의 Performance 에 Carrier Phase Error 가 미치는  
영향에 관한 연구

83334

박 용 우 이 형 재

한국항공대학 전자공학과

A Study on the PR Shaped SQAM Performance with Carrier Phase Error

Park, Yong Woo Lee, Hyung Jae  
Dept. of Electronics Eng., Hnakuik Aviation College

Abstract

A Study is presented showing the effect of carrier phase error on the error-rate of a PR(class I,II,IV) shaped SQAM digital radio system.

A simple upper bound on the probability of error as a function of phase error is derived and compared to one another.

The result is that if carrier phase error is less than  $3^\circ$  there is no serious degradation.

I. 서론

Digital radio system 에 있어서 한정된 bandwidth 내에 전송해야 할 정보량이 급증함에 따라서 심각한 Spectral congestion은 증가하게 된다.

그러므로 이런 문제를 해결하기 위해서 고주파수 대역으로 새로운 주파수를 할당한다든지 주파수를 재사용하거나 data compression 과 같은 source encoding 등의 방안들이 제안되었다.

본 연구에선 bandwidth efficiency 를 높이기 위한 spectrally efficient modulation 에 중점을 두어서 그 방법으로 input signal을 modulation하기전에 Partial-Response Signaling (I,II,IV)를 도입해서 Nyquist 의 최소 대역폭 을 갖도록 spectral shaping 을 시켰으며, 변조 방식은(4-ary, 16-ary) Staggered Quadrature Amplitude Modulation(SQAM) 을 택했다.

또한 수신단에서 완전한 동기화의 어려움으로 생길 수 있는 Carrier phase error가 performance 를 얼마나 열화시키는가에 대해서 error 가  $3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 15^\circ$  인 경우에 대하여 고찰했다.

II. PRS 와 PR(class) SQAM

1. PRs

1) PRS 의 구성

PRS 의 block diagram 을 Fig.1 에 나타냈다.

PRS 의 system polynomial 은

$$F(D) = f_0 + f_1 D^1 + \dots + f_{N-1} D^{N-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f_k D^k$$

여기서 D 는 delay operator 이다.

또한 최소 대역폭 system 에 대해서 아래와 같다.

$$G(w) = \begin{cases} T & ; |w| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 & ; \text{elsewhere} \end{cases}$$

그러므로 전체 system function 은

$$H(w) = F(w) \times G(w)$$

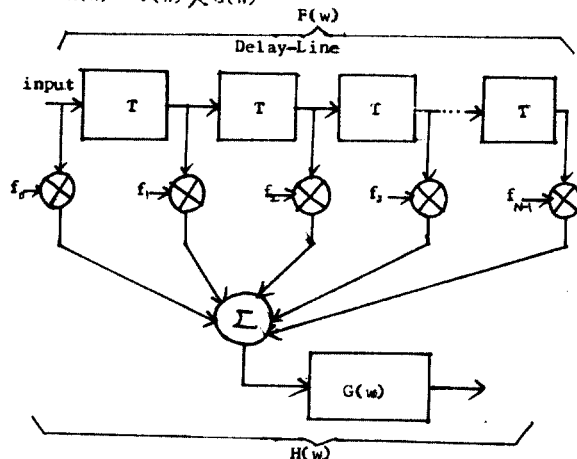


Fig.1 General Partial-Response System Model

2) PRS 의 특징 및 비교

본 연구에서 사용 할 PRS(class I, II, IV) 에 대한 특성을 Table. 1에 나타냈다. (1)

- o. 또한 PRS 의 일반적인 특성을 살펴보면 다음과 같다.
- o. Control 된 Intersymbol Interference (ISI) 를 갖는다.
- o. Nyquist rate로 전송 가능
- o. redundant digit 없이 error detection 가능
- o. Input level 수 보다 output level 수가 많아짐.

Table. I Comparison of Minimum Bandwidth PRS (class I, II, IV)

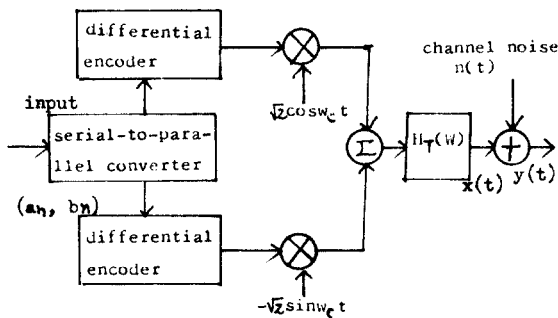
system poly-nomial F(D)	frequency response H(w)	impulse response h(t)
1 + D (class I)	2Tcos $\frac{wT}{2}$	$\frac{4T^2}{\pi} \frac{\cos \frac{\pi t}{T}}{T^2 - 4t^2}$
(1 + D) <sup>2</sup> (class II)	4Tcos $\frac{2wT}{2}$	$\frac{2T^3}{\pi t} \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{T^2 - t^2}$
1 - D <sup>2</sup> (class IV)	j2Tsin wT	$\frac{2T^2}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{t^2 - T^2}$

3) PRS 의 적용 (2~7)

PRS 는 여러가지 변조 방식에 적용 연구되어 왔으며 현재 digital radio system 에서 Quadrature Partial Response Signal (QPRS) (8) 방식과 XGHz 와 8GHz 에서 duobinary(class I) 3-level technique 및 7-level modified duobinary(class IV) method 가 사용 되고 있다. (11)

2. PR(class I) QAM Performance

1) Transceiver 의 구성



(a) Transmitter

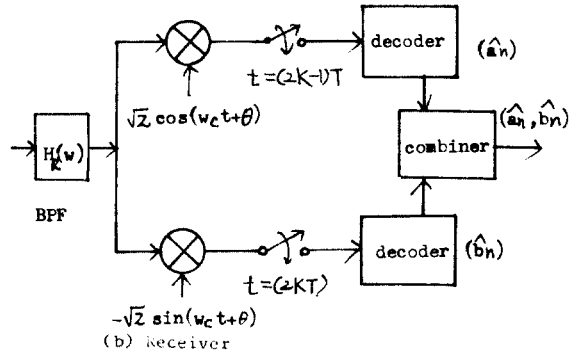


Fig 2. Block diagram of the PR Shaped QAM Transceiver

2) Performance

이 경우의 probability of error Pe(theta, A)를 구하면

$$Pe(\theta, A) = \frac{1}{2} \left\{ Q\left(\frac{1 - A \sin \theta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1 + A \sin \theta}{\sigma}\right) \right\} + \frac{1}{4} \left\{ Q\left(\frac{2 \cos \theta - 1 + A \sin \theta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{2 \cos \theta - 1 - A \cos \theta}{\sigma}\right) \right\}$$

여기서

$$n = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{1 - 4(k-n-1)^2}$$

Upper bound를 구하기 위해서 Amax를 구하면

$$A_{max} = \frac{8}{\pi}$$

$$\therefore Pe(\theta) \leq \frac{1}{2} \left\{ Q\left(\frac{1 + \frac{8}{\pi} \sin \theta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1 - \frac{8}{\pi} \sin \theta}{\sigma}\right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{ Q\left(\frac{2 \cos \theta - 1 + \frac{8}{\pi} \sin \theta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{2 \cos \theta - 1 - \frac{8}{\pi} \sin \theta}{\sigma}\right) \right\}$$

if theta = 0°

$$Pe(\theta) = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

여기서 sigma^2 는 noise variance.

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

이 식의 결과는 reference(9)에 나와 있다.

### III. 이론적 고찰

#### 1. PR class II, IV (4-ary)

##### 1) PR class II

이 경우에 있어서 probability of error 를 구하면

$$\begin{aligned}
 Pe(\vartheta, C) &= \frac{1}{4} \left\{ Q\left(\frac{1 - C \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1 + C \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right. \\
 &+ Q\left(\frac{3 - 2\cos \vartheta + C \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{3 - 2\cos \vartheta - C \sin \vartheta}{\sigma}\right) \\
 &+ Q\left(\frac{2\cos \vartheta - 1 + C \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{2\cos \vartheta - 1 - C \sin \vartheta}{\sigma}\right) \left. \right\} \\
 &+ \frac{1}{8} \left\{ Q\left(\frac{4\cos \vartheta - 3 + C \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{4\cos \vartheta - 3 - C \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

여기서

$$C = \frac{16}{\pi} \frac{\pi}{n} \frac{dn}{2K-2n-1} \cdot \frac{(-1)^{K-n}}{4-(2K-2n-1)^2}$$

$$C_{max} = \frac{40}{3\pi}$$

$$\begin{aligned}
 Pe(\vartheta) &\leq \frac{1}{4} \left\{ Q\left(\frac{1 + \frac{40}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1 - \frac{40}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right. \\
 &+ Q\left(\frac{3 - 2\cos \vartheta - \frac{40}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{3 - 2\cos \vartheta + \frac{40}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \\
 &+ Q\left(\frac{2\cos \vartheta - 1 - \frac{40}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{2\cos \vartheta - 1 + \frac{40}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \left. \right\} \\
 &+ \frac{1}{8} \left\{ Q\left(\frac{4\cos \vartheta - 3 + \frac{40}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{4\cos \vartheta - 3 - \frac{40}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

if)  $\vartheta = 0^\circ$

$$Pe = \frac{7}{4} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

##### 2) PR class IV

이 경우에 있어서 probability of error 를 구하면

$$\begin{aligned}
 Pe(\vartheta, B) &= \frac{1}{2} \left\{ Q\left(\frac{1 + B \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1 - B \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right\} \\
 &+ \frac{1}{4} \left\{ Q\left(\frac{2\cos \vartheta - 1 - B \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{2\cos \vartheta - 1 + B \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

여기서  $B = \frac{8}{\pi} \frac{\pi}{n} \frac{dn}{(2K-2n-1)^2-4}$

$$B_{max} = \frac{32}{3\pi}$$

$$\begin{aligned}
 Pe(\vartheta) &\leq \frac{1}{2} \left\{ Q\left(\frac{1 + \frac{32}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1 - \frac{32}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right\} \\
 &+ \frac{1}{4} \left\{ Q\left(\frac{2\cos \vartheta - 1 + \frac{32}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{2\cos \vartheta - 1 - \frac{32}{3\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

if)  $\vartheta = 0^\circ$

$$Pe = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

#### 2. 16-ary PR (class I) SCA

평균적인 probability of error 를 구하면

$$\begin{aligned}
 Pe(\vartheta) &\leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{16} \left[ Q\left(\frac{1 + \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1 - \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right. \right. \\
 &+ \left. \left. Q\left(\frac{1 - \frac{8}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1 + \frac{8}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right] \right. \\
 &+ \frac{1}{16} \left[ Q\left(\frac{6\cos \vartheta - 5 + \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{6\cos \vartheta - 5 - \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right] \\
 &+ \frac{3}{16} \left[ Q\left(\frac{2\cos \vartheta - 1 - \frac{8}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{2\cos \vartheta - 1 + \frac{8}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right. \\
 &+ \left. Q\left(\frac{3 - 2\cos \vartheta + \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{3 - 2\cos \vartheta - \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right] \\
 &+ \frac{2}{16} \left[ Q\left(\frac{5 - 4\cos \vartheta - \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{5 - 4\cos \vartheta + \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right. \\
 &+ \left. Q\left(\frac{4\cos \vartheta - 3 - \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{4\cos \vartheta - 3 + \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right. \\
 &+ \left. Q\left(\frac{4\cos \vartheta - 3 + \frac{8}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{4\cos \vartheta - 3 - \frac{8}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right. \\
 &+ \left. Q\left(\frac{5 - 4\cos \vartheta - \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{5 - 4\cos \vartheta - \frac{8}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right] \\
 &+ \frac{1}{16} \left[ Q\left(\frac{6\cos \vartheta - 5 + \frac{8}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{6\cos \vartheta - 5 + \frac{24}{\pi} \sin \vartheta}{\sigma}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{16} \left\{ Q \left( \frac{2\cos\phi - 1 - \frac{24}{\pi}\sin\phi}{6} \right) + Q \left( \frac{2\cos\phi - 1 + \frac{24}{\pi}\sin\phi}{6} \right) + Q \left( \frac{3 - 2\cos\phi - \frac{24}{\pi}\sin\phi}{6} \right) + Q \left( \frac{3 - 2\cos\phi + \frac{24}{\pi}\sin\phi}{6} \right) \right\}$$

if:  $\phi = 0^\circ$

$$Pe = \frac{15}{8} Q \left( \frac{1}{6} \right)$$

#### IV. 결론

본 연구에서 고찰한 3가지의 PRS 방식을 이용한 결과로 SNR 대 probability of error  $Pe(\phi)$  를 Fig. 3 ~ Fig. 6 에 plot 했다.

Fig. 3 의 class I 의 경우 에서는  $Pe(\phi)=10^{-6}$  을 얻기 위하여  $\phi=0^\circ$  인 경우 에 SNR = 12.8dB 이 필요 하지만  $\phi=3^\circ, \phi=6^\circ$  인 경우 에 각각 1.1dB, 2.1dB 이 각각 더 필요 하게 된다.

Fig. 4 의 class II 의 경우 에서는  $Pe(\phi)=10^{-6}$  을 얻기 위하여  $\phi=0^\circ$  인 경우 에 SNR = 12.9dB 이 그리고  $\phi=3^\circ$

$\phi=6^\circ$  인 경우 에 각각 1.2dB, 3.8dB 이 더 필요 하게 된다.

Fig. 5 의 class IV 의 경우 에서는  $Pe(\phi)=10^{-6}$  을 얻기 위하여  $\phi=0^\circ$  인 경우 에 SNR = 12.8dB 이 필요 하지만  $\phi=3^\circ$

$\phi=6^\circ$  인 경우 에 각각 1.1dB, 2.9dB 이 각각 더 필요 하게 된다.

Fig. 6 의 16-ary class I 의 경우 에서는  $Pe(\phi)=10^{-5}$  을 얻기 위하여  $\phi=0^\circ$  인 경우 에 SNR = 13dB 이 필요 하지만  $\phi=3^\circ$  인 경우 에 3.1dB 이 더 필요하다.

결과적으로 carrier phase error 가  $\phi=3^\circ$  보 다 적은 error 가 생기면 performance 가 심하게 열화되지 않지만  $\phi=6^\circ$  이상이 되는 경우 에 영향을 많이 받게 된다는 사실을 알 수 있다.

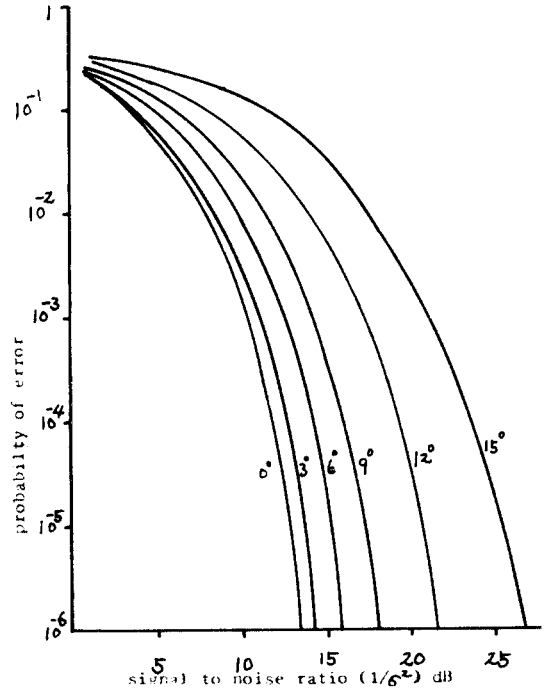


Fig.3 Error-rate of the PR class I (4-ary)

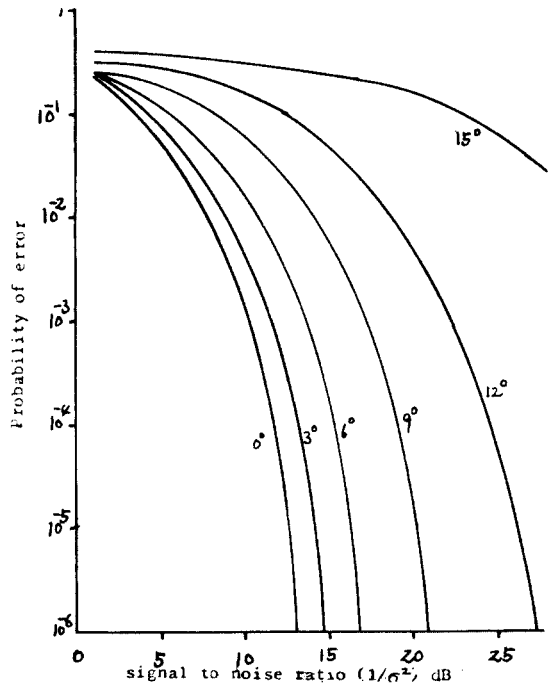


Fig.5 Error-rate of the PR class IV (4-ary)

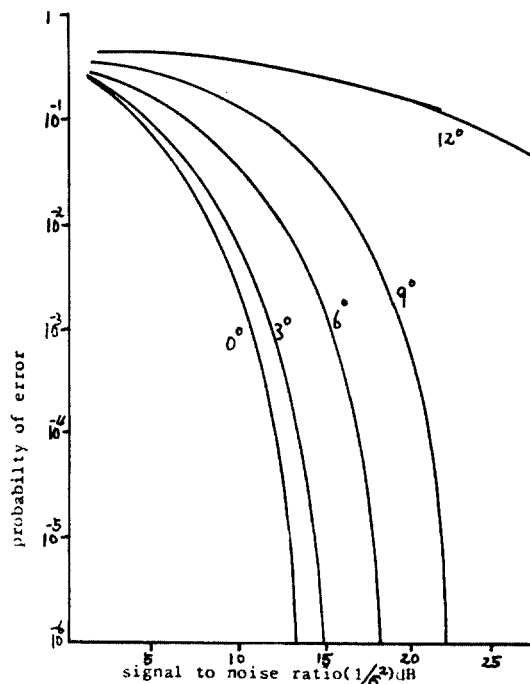


Fig.4 Error-rate of the PR class II (4-ary)

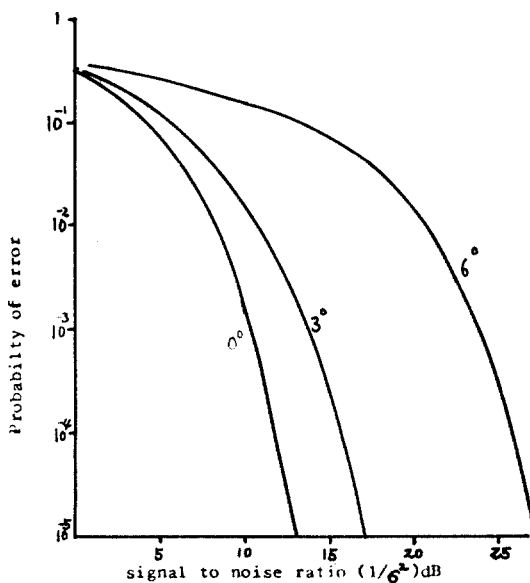


Fig.6 Error-rate of the PR class I (16-ary)

REFERENCES

1. P.Kabal and S.Pasupathy, "Partial-Response Signaling," *IEEE Trans. on Comm.*, vol.COM-23-9, Sep.1975
2. S.Pasupathy, M.A. Yongacglu, and J.B. Tallier, "Carrier phase Error in single Sideband-Partial Response Systems," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. COM-28-12, Dec.1980.
3. J.Steel and B.M.Smith, "The Effects of Equalization, Timing, and Carrier Phase on The Eye Patterns of Class 4 Partial-Response Data Signals," *IEEE Trans. on Comm.*, vol.COM-23-2, Feb. 1975.
4. B.M.Smith, Results for the Eye Patterns of Class 4 partial Response Data Signals, *IEEE Trans. on Comm.*, May.1974.
5. F.Jager and C.B.Dekker, "Tamed Frequency Modulation, A Novel Method to Achieve Spectrum Economy in Digital Transmission," *IEEE Trans. on Comm.*, vol.COM-26-5, May 1978.
6. G.J.Garrison, "Power Spectral Analysis for Digital FM" *IEEE Trans. on Comm.*, vol. COM-23-11, Nov.1975.
7. D.Muilwijk, "Correlative Phase Shift Keying-A Class of Constant Envelope Modulation Techniques," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. COM-29-3, March 1981.
8. G.J. Sunndal, "Error Rate of QPRS Evaluated in Amplitude-Phase Space," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. COM-27-12, Dec.1979.
9. D.P.Taylor and D.Cheung, "The Effect of Carrier Phase Error on the Performance of a Duobinary Shaped QPSK Signal," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. COM-25-7, July 1977.
10. I.S.Gradshcheyn and I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York, 1965.
11. K.Feher, *Digital Communication Microwave Applications*, Prentice-Hall, New York, 1981.