

소 상 호, 윤 제 우, 이 문 호
전북대학교 대학원 전자공학과

Image Data Processing by Weighted Hadamard Transform.

Sang-Ho So, Jae-Woo Yoon, Moon-Ho Lee.

Jeonbuk National Univ. Dept. of Electronics

Abstract

The Hadamard matrix is a symmetric matrix made of plus and minus ones as entries. Therefore the use of Hadamard transform in the image processing requires only the real number operations and results in the computational advantages. Recently, however, certain degradation aspects have been reported. In this paper we propose a WH matrix which retains the main properties of Hadamard matrix.

The actual improvement of the image transmission in the inner part of the picture has been demonstrated by the computer simulated image developments. The orthogonal transforms such as Hadamard transform offers a useful facility in the digital signal processing. As the size of the transmission block increases, however, the assignment of bits for each data must increase exponentially. Thus the SNR of the image tends to decline accordingly. As an attempt to increase the SNR, we propose the WH matrix whose elements are made of $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, and the unitform is 8×8 matrix.

1. 서 론

일반적인 신호원 (speech, image 등)은 인접한 sample data 간에 correlation (Similarity 또는 redundancy) 이 크다. 신호원의 redundancy 를 줄이는 방법으로 대체로 predictive coding 법과 transform coding 법의 2 가지를 사용한다. 전자의 경우는 신호원의 유사성을 이용하여 지나간 data 들로부터 현재의 data 를 추측하여 이들의 차 (redundancy 감소)를 coding 하는 반면에 후자의

경우는 신호원의 energy 가 분산되어 있는 것을 (variance 가 크다) 신호변환에 의해 변환영역에서 energy 가 소수의 data 에 집중 (variance 가 작다) 되어 data compression 을 얻을 수 있다. 이 transform coding 법은 FFT algorithm 이후 real time transform 가능성으로 관심을 끌게 되었고 이로 인하여 시간이 많이 걸리는 이론적인 최상의 KLT (Karhune-Ldeve Transform) 에 가까우면서도 FFT 를 이용할 수 있는 sinusoidal transforms (DCT, HAAR, DST 등)을 남게 되었다. [1,5,6,7]

2. Unitary transform 의 성질

(a) 1차원 신호 변환: data vector $X(x(n))$ 은 $x(t)$ 를 일정한 주기로 Sampling 한 값 $n=0, 1, 2, \dots, N-1$) 를 변환 matrix $T(N \times N)$ 로 변환된 vector Y 는 (1) 로 정의되고 unitary transform 인 경우에는 (2)를 만족해야만 한다. (*t 는 conjugated transpose)

$$Y = TX \tag{1}$$

$$y(m) = \sum_n t(m, n) x(n) \\ T^{-1} = T^*t \tag{2}$$

(b) 2차원 신호 변환: 2차원 신호 Matrix X 를 변환 matrix T 로 변환된 vector Y 는 식 (3)으로 정의되고 T^t 는 transpose matrix 이다.

$$Y = TXT^t \tag{3}$$

$$y(l, k) = \sum_m \sum_n t_1(l, m) x(m, n) t_1(n, k)$$

(c) unitary transform 의 성질: (2)를 이용하여 1차원 변환의 경우 다음 성질을 알 수 있다.

a) Energy 보존

$$Y^*t Y = X^*t X \tag{4}$$

$$\sum_m |y(m)|^2 = \sum_n |x(n)|^2$$

b) Covariance: data vector X 의 Covariance

matrix C_x 는 (5)로 정의된다.

$$C_x = E [X - E(X)] [X - E(X)]^{*t} \quad (5)$$

여기서 $E(X)$ 는 X 의 평균값을 말한다.

위와 마찬가지로 방법으로 (1)과(2)를 이용하여 Y 의 covariance matrix C_y 는 (6)으로 나타낼수 있다.

$$C_y = T C_x T^{*t} \quad (6)$$

여기서 T 가 실수 라면 (orthogonal matrix), C_y 는 C_x 를 T 로 2차원 변환한 것과 같다.

만약 C_x 의 eigen vector 로 구성된 unitary matrix P 가 존재한다면 (7)이 성립된다.

$$C_x P = P Q \quad \text{또는} \quad C_x^{-1} P = P Q^{-1} \quad (7)$$

여기서 Q 는 C_x 의 eigen value 로 된 diagonal matrix 이다. P^{*t} 에다 (7)을 곱하면 (8)이 됨을 알 수 있다.

$$P^{*t} C_x P = Q \quad (8)$$

(6)과 (8)에서 $P^{*t} = T$ 라면 C_y 는 대각선 matrix 가 되어 변환 영역에서 완전히 decorrelation 된 data $y(m)$ 을 얻을 수 있다.

이러한 변환을 KLT 라 하며 이 KLT 는 C_x 로 부터 P^{*t} 의 계산시간과 P^{*t} 의 non-harmonicity 로 인한 변환하는 데 장시간 계산 소요로 실패로 사용되는 경우에는 드무나 제한된 변환된 data 를 취함에 있어서 MSE 와 decorrelation 정도가 다른 Unitary transform 에 비해 최상의 것으로 알려져 있다.

3. WH 변환

(1) WH 의 명태

우리의 시각은 화면의 가장자리 보다는 화면의 중심의 화질에 대해 더욱 민감하다. 따라서 변환 후의 수신측에 SNR 을 개선 할 필요가 생긴다.^[9] 화면 중심 부분의 SNR 을 크게 개선시킬수 있는 변환 matrix 를 WH 라 하였고 Fig. 1 에서 기본 8×8 matrix 를 보였다.

$$WH_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fig.1 8×8 WH unit form matrix

(2) WH matrix 의 특징

Fig.1 의 matrix 는 Symmetric 하며 첫째, column 과 row 를 제외 하고는 그 element

값의 합이 0이므로 Hadamard 변환이 갖는 redundancy 를 갖게 된다.

(a) Kernel 의 부호

Table1. Values of the WH transform kernel for N=8

$u \setminus x$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	-	+	-	+	-	+	-
2	+	+	-	-	+	+	-	-
3	+	-	-	+	+	-	-	+
4	+	+	+	+	-	-	-	-
5	+	-	+	-	-	+	-	+
6	+	+	-	-	-	-	+	+
7	+	-	-	+	-	+	+	-

순 방향 WH 의 부호는 (9) 식을 따르고 있다.

$$WH(x, u) = (-1)^{\sum_{k=0}^{Z-1} b_k(x) b_k(u)} \quad (9)$$

여기서 $b_k(z)$ 는 Z 를 나타내는 k 번째 bit 의 2진수이다.

(b) WH matrix 의 확장

$$H_h(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$WH_{16} = WH_8 \otimes H_h(1)$$

$$WH_{32} = WH_{16} \otimes H_h(1)$$

$$\vdots$$

$$WH_n = WH_{n/2} \otimes H_h(1) \quad (10)$$

where, \otimes Kronecker matrix product.

(c) WH 의 Center Kernel

$$WH_8(c, k) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = 4H_h(1) \quad (11)$$

$$\vdots$$

$$WH_n(c, k) = WH_{n/2}(c, k) \otimes 4H_h(1) \quad (12)$$

(3) WH 의 전송

변환 부호화 방식인 WH 를 이용한 Image 전송 계통도는 Fig.2 와 같다.

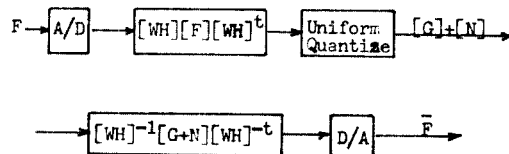


Fig.2 Transform of image processing

Hadamard 방식은 redundancy 만 고려되어 Quantization 에서 생기는 Noise 가 수신단에 미치는 영향에 대한 고려가 부족하므로 SNR 이 크게 저하되어 이에 대하여 Fig.2 처럼 WH 를 전

승하여 SNR 의 증가를 보였다.

(4) Hadamard 와 WH 변환 비교

입력 영상 신호 $F(i, j)$ 에 대한 확률 밀도 함수가 UDP 를 갖으며 입력 영상 신호간에 decorrelation 하고 block 전송의 크기를 $N \times N$ 으로 할 경우 WH 는 $N = 2^{N'+3}$ 의 관계를 갖도록 한다.⁽⁸⁾

(a) 수신단 비교

$\bar{F}_h(i, j)$, $\bar{F}_{wh}(i, j)$ 를 각각의 변환에서 얻은 수신 신호라 하면 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$[\bar{F}_h] = [F] + [H]^{-1} [N] [H]^{-t} \quad (13)$$

$$[\bar{F}_{wh}] = [F] + [WH]^{-1} [N] [WH]^{-t} \quad (14)$$

(b) Hadamard 변환

$P_{Fh}(i, j)$, $P_{nrh}(i, j)$ 을 각각 수신 신호 전력과 Noise power 로 놓으면

$$P_{Fh} = M^2 / 12 \quad (15)$$

$$P_{nrh} = N^6 M^2 / 3N_1^2 \quad (16)$$

을 얻으며 따라서

$$(S/N)_{rh} = N_1^2 / 4N^6 \quad (17)$$

(c) WH 변환

$P_{Fwh}(i, j)$, $P_{nrwh}(i, j)$ 을 수신 신호와 Noise power 로 놓으면,

$$P_{Fwh}(i, j) = M^2 / 12 \quad (18)$$

$$P_{nrwh}(i, j) = 625 n^4 M^2 / 48 N_1^2 \left[\sum_{k=1}^N W^{-1}(i, k)^2 \right] \left[\sum_{j=1}^N W^{-t}(1, j)^2 \right] \quad (19)$$

따라서,

$$(S/N) = 4N_1^2 / 625 N^4 \left[\sum_{k=1}^N W^{-1}(i, k)^2 \right] \left[\sum_{j=1}^N W^{-t}(1, j)^2 \right] \quad (20)$$

where

- N_1 : Quantization level
- N : Transform matrix 의 크기
- N' : Positive integer.

(d) 수신단의 SNR 비교

앞절에서 구한 (17), (20)식을 이용하여 $N=8$, $N=16$ 일 경우에 대한 비교를 Fig. 3 과 4에 나타내 보았으며 여기서 Hadamard 변환의 SNR 을 0 dB 로 Normalize 시켰을 때의 WH 의 SNR 을 dB 로 표시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 8×8 block 일 경우 20 - 29(dB)로 SNR 이 증가 되었으며 16×16 의 block 에서는 32-38(dB)로 증가 되어, 변환 중심에서 좌절이 좀 미진 것을 확인 하였다.

4. Simulation

64×64 의 pixel 을 32 gray levels 로 양자화한 링컨 사진을 Hadamard 와 WH 의 matrix 로 바꿔가면서 꼭 같은 조건으로 Simulation 하였으며

이에 대한 flowchart 는 Fig. 5 와 같다.

Table 2. SNR improvement in 8×8 block of WH

S / N	HADAMARD	W - H	Improvement in dB
1,1	$N_1^2 / (8 \times 128)^2$	$62.5 N_1^2 / 800^2$	20.4
2,2	"	$333 N_1^2 / 800^2$	27.36
3,3	"	$333 N_1^2 / 800^2$	27.36
4,4	"	$500 N_1^2 / 800^2$	29.1
5,5	"	$333 N_1^2 / 800^2$	27.36
6,6	"	$333 N_1^2 / 800^2$	27.36
7,7	"	$333 N_1^2 / 800^2$	27.36
8,8	"	$62.5 N_1^2 / 800^2$	20.4

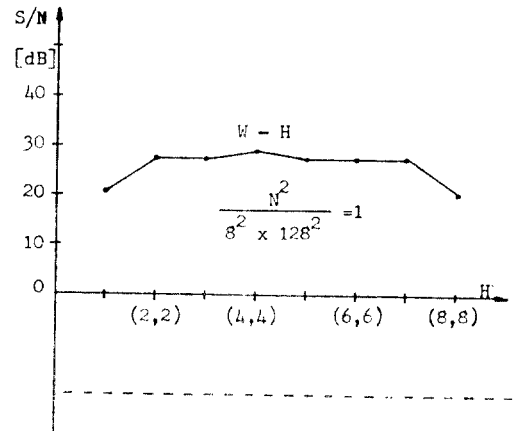


Fig. 3 SNR comparison between Hadamard and WH in 8×8 block

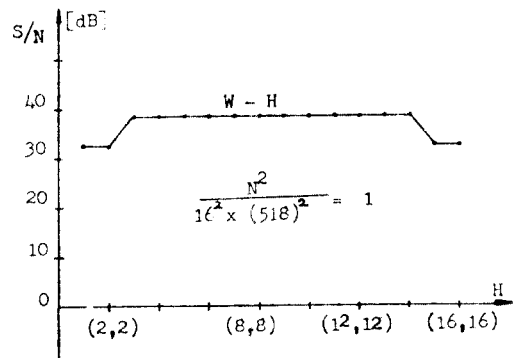


Fig. 4 SNR comparison between Hadamard and WH in 16×16 block.

Table 3. SNR improvement in 16x16 block of WH

S/N	HADAMARD	W - H	Improvement in dB
1,1	$N_1^2 / (16 \times 518)^2$	$250N_1^2 / 3000^2$	32.8
2,2	"	$250N_1^2 / 3000^2$	32.8
3,3	"	$1000N_1^2 / 3000^2$	38.8
4,4	"	"	38.8
5,5	"	"	38.8
6,6	"	"	38.8
7,7	"	"	38.8
8,8	"	"	38.8
9,9	"	"	38.8
10,10	"	"	38.8
11,11	"	"	38.8
12,12	"	"	38.8
13,13	"	"	38.8
14,14	"	"	38.8
15,15	"	$250N_1^2 / 3000^2$	32.8
16,16	"	$250N_1^2 / 3000$	32.8



Fig. 6. 32 Quantize levels original Image data (Lincoln)

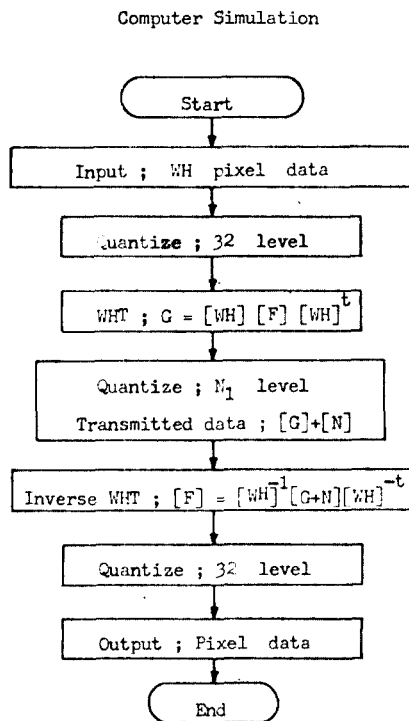


Fig. 5 Flowchart of Image Processing



Fig. 7 32 Quantize levels Hadamard and WH



Fig. 8 64 Quantize levels Hadamard and WH .

5. 결 론

Orthogonal Transform 인 WH 가 Hadamard 의 특성을 꼭 같이 갖으면서 Diagonal 에 Weighted 가 주어져 KLT 에 접근하였다.

따라서 8x8 block 전송에서는 20 - 29 (dB), 16x16 block 전송에서는 32 - 38 (dB)의 SNR 이 개선되어 이 논문은 digital Image Processing 에 크게 적용될 수 있을 것이다.

Reference

1. D. F. Elliot, K.R. Rao, "Fast Transforms Algorithms, Analysis Applications", Academic press. 1982, pp 362 - 410
2. Hideo Nitajima, A.T S. himono, "Residual Correlation of the Hadamard Transforms of stationary Markov - 1 Signals". IEEE , Trans, Com-31, No. 1 Jan 83 PP 119 - 121
3. A.K. Jain, "Image Data Compression; A Review, "Proc. IEEE, vol. 69, No.3, March, 1981, PP. 349 - 389
4. A. Habibi W.K. Pratt, G. Robinson, R. Means, H. Whitehouse, J. Speiser, "Real Time Image Redundancy Reduction Using Transform Coding" on COMM. Jun. 17 - 19, 1974, PP. 18- (1)- 18A(8).
5. N. Ahmed, K.R. Rao, "Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing," PP.99-143, Springer-Verlag, Berline, 1975.
6. R.C. Gonzalez, P. Wintz, "Digital Image Processing," PP. 88-102. Addison-Wesley Pub. 1977.
7. W.K. Pratt, "Digital Image Processing," PP. 232-277. John Wiley sons, 1978.
8. 윤재우, 함운철, 이문호, " 새로운 Weighted Hadamard 변환을 이용한 Image 전송에 관한 연구 " 1983년도 KIEE, 하계 종합학술 대회 논문집 vol 6, No.1. pp 44
9. Douglas J. G " The Role of Human Visual Models in Image Processing , " IEEE Proc, vol 69, No. 5, May 1981. PP 552 - 561.