확장 해밀턴 이론의 일반화에 대한 고찰

김진규¹ · 신진원^{2*}

¹한양대학교 ERICA캠퍼스 건축학과 건축공학부, ²단국대학교 건축대학 건축공학과

Study on the Generalization of the Extended Framework of Hamilton's Principle in Transient Continua Problems

Jinkyu Kim¹ and Jinwon Shin^{2*}

¹School of Architecture and Architectural Engineering, Hanyang Univ., Ansan, 15588, Korea

²College of Architecture, Architectural Engineering, Dankook Univ., Yongin, 16890, Korea

Abstract

The present work extends the recent variational formulation to more general time-dependent problems. Thus, based upon recent works of variational formulation in dynamics and pure heat diffusion in the context of the extended framework of Hamilton's principle, formulation for fully coupled thermoelasticity is developed first, then, with thermoelasticity-poroelasticity analogy, poroelasticity formulation is provided. For each case, energy conservation and energy dissipation properties are discussed in Fourier transform domain.

Keywords : extended framework of Hamilton's principle, thermoelasticity, poroelasticity

1. 서론

해밀턴 이론의(Hamilton, 1834: 1835) 치명적 약점이라 할 수 있는 초기치 산정 문제를 해결한 확장 해밀턴 이론이(Kim *et al.*, 2013) 근래, 연속체 동역학에 대해 정립되었고 이 이론에 근거한 몇 가지 수치해석법이 제안되었다(Kim, 2014a; 2014b; Kim and Kim, 2015). 현재, 이 이론은 고전 열전도와 유한한 열전도 속도를 갖는 경우를(Maxwell, 1867; Chester, 1963) 포함하는 순수 열전도 문제에 까지 대해 확장되었고 저차의 시공간 유한요소 해석법 또한 제시된 바 있다(Kim *et al.*, 2016).

확장 해밀턴 이론 정립의 핵심 요소로는 혼합 변수 사용과 초기치 산정을 위해 새롭게 정의한 범함수의 변분을 들 수 있다. 유의할 점은 이 또한 완전한 변분 이론이라 할 수 없는 점이다. 곧, 수학적으로 에너지 비보존계로 모델링되는 경우에 대해서는 범함수 action과 별도의 범함수인 Rayleigh's dissipation(Rayleigh, 1867)이 필요하며, 범함수의 변분은

새롭게 정의되어 수학적 변분 법칙을 온전히 따르지 않는 문제가 있다(범함수는 함수의 함수로 스칼라량으로 표현되며, 그에 따른 벡터공간을 나타내는 함수해석학에(functional analysis) 주로 쓰임). 또한, 이 이론에 근거한 수치해석법은 정확도가 개선되고 비반복 알고리즘으로 재료 비선형을 다룰 수 있는 장점이 있지만, 태생적으로 혼합변수를 다루기에 변위기반의 기존 수치해석법에 비해 계산량이 많은 단점이 있다. 하지만, 이 변분이론은 그 원리가 매우 단순하여 동역학과 순수 열전도 문제를 포함하는 시간의존 편미분 방정식을(transient problems including both hyperbolic and parabolic equations) 일관된 방법으로 접근할 수 있는 단초를 제공한다.

본 논문은 이 확장 해밀턴 이론을 열 탄성론과 공극 탄성론으로 적용하여 이 이론을 일반화하는 것에 그 목적이 있다. 이를 위해, 기존 연구 성과를 토대로 유한한 속도의 열전도와 동적 거동의 복합거동을 다룬 열 탄성론에 우선적으로 적용되었으며, 열 탄성론-공극 탄성론의 유사성을 기반

* Corresponding author:

Tel: +82-31-8005-3745; E-mail: jshin@dankook.ac.kr

Received July 20 2016; Revised October 9 2016;

Accepted October 10 2016

©2016 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

으로 공극 탄성론에까지 그 이론을 적용하였다. 또한, 에너지 보존계와 비보존계의 특징을 살펴보았다.

2. 본 론

이 장에서는 열 탄성과 공극 탄성에 대해 확장 해밀턴 이론을 적용하고 공간에 대한 푸리에 변환을 통해 에너지 보존계와 에너지 비보존계에 나타난 그 특징을 확인하였다.

2.1 열 탄성으로의 적용

확장 해밀턴 이론의 열 탄성학 적용에는 아래와 같은 충격량의 혼합 변수가 사용된다.

$$\theta(t) = \int_0^t T(\tau) d\tau ; \dot{\theta} = T \quad (1)$$

$$H_i(t) = \int_0^t q_i(\tau) d\tau ; \dot{H}_i = q_i \quad (2)$$

$$J_{ij}(t) = \int_0^t \sigma_{ij}(\tau) d\tau ; \dot{J}_{ij} = \sigma_{ij} \quad (3)$$

여기서, T , q_i , σ_{ij} 는 각각 온도(temperature), 열 유속(heat flux), 응력(stress)을 나타내며, 위 첨자 $\bullet$ 는 시간에 대한 미분을 의미한다.

표면 Γ 으로 닫혀진 Ω 영역의 선형 탄성 매개체에 대해서 Maxwell-Chester 모델의 유한한 속도를 갖는 열전도와 체적력(body force) 그리고 표면력(surface traction)을 고려할 경우, 확장 해밀턴 이론은 Lagrangian density l , Rayleigh's dissipation ϕ , 퍼텐셜 V 의 세 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$l = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{2} A_{ijkl} \dot{J}_{ij} \dot{J}_{kl} - (\dot{J}_{ij} - \beta_{ij} \dot{\theta}) \epsilon_{ij} \quad (4)$$

$$+ \frac{\rho c}{2 T_0} \dot{\theta}^2 + \frac{\tau_0}{2 T_0} d_{ij} \dot{H}_i \dot{H}_j - \frac{1}{T_0} \dot{\theta}_i H_i$$

$$\phi = \frac{1}{2 T_0} d_{ij} \dot{H}_i \dot{H}_j \quad (5)$$

$$V = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{T_0} \bar{\psi} \theta + \bar{f}_i u_i \right) d\Omega + \int_{\Gamma_r} \bar{\tau}_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \frac{1}{T_0} \bar{q} \theta d\Gamma \quad (6)$$

식 (1)~(6)에서 아래첨자 콤마는 공간의 한 좌표축에 대한 편미분을 의미하고 위첨자 $\bullet$ 는 시간에 대한 미분을 T_0 는 응력 및 변형이 없는 상태에서의 초기 온도를 ϵ_{ij} 는 매개체의 미소변형률(곧, $\epsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$)로 u_i 는 변위를 나타냄),

A_{ijkl} 는 변위기반의 재료 구성 방정식에 나타난 C_{ijkl} 의 역수를 (곧, $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$) 나타내며, d_{ij} 는 열전도도 k_{ij} 의 역수이다. 또한, β_{ij} , ρ , c 는 각각 열팽창 계수, 질량 밀도, 비열 용량(specific heat coefficient)의 재료 성질을 τ_0 는 유한한 속도의 열전도를 표현하기 위한 이완시간(relaxation time)을 나타내며, $\bar{f}_i$, $\bar{\tau}_i$, $\bar{q}$ 와 $\bar{\psi}$ 는 주어진 체적력 밀도(body force density), 표면 장력(surface traction), 열속 총량(total heat flux)과 체적당 내부 열원 속도(heat source rate)를 나타낸다.

확장 해밀턴 이론은 범함수(functional) A 를 다음과 같이 정의하고

$$A = - \int_0^t \int_{\Omega} l d\Omega dt - \int_0^t V dt \quad (7)$$

그의 정상성(stationarity)을 나타내는 $\delta A = 0$ 에 있어, 변분(first variation) δA 를 다음과 같이 새롭게 정의한다.

$$\begin{aligned} \delta A = & - \int_0^t \int_{\Omega} \delta l d\Omega dt - \int_0^t \delta V dt + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial H_j} \delta H_j d\Omega dt \quad (8) \\ & + \int_{\Omega} \bar{p}_i \delta u_i|_0 d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{T_0} \bar{\psi} \delta \theta|_0 d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_q} \frac{1}{T_0} \bar{Q} \delta \theta|_0 d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{1}{T_0} (d_{ij} \bar{H}_j + \theta_{,i}) \delta \bar{H}_i|_0 d\Omega \end{aligned}$$

식 (8)에서 p_i , $\bar{\psi}$, $\bar{Q}$ 는 아래와 같고

$$p_i = \rho \dot{u}_i ; \quad \bar{\psi} = \int_0^t \bar{\psi}(t) dt ; \quad \bar{Q} = \int_0^t \bar{q}(t) dt \quad (9)$$

위첨자 $\bar{}$ 는 주어진 조건으로부터 산정할 수 있는 값과($\bar{\psi}$ 및 $\bar{Q}$) 선형 탄성 매개체가 정해지지 않은 하나의 초기 값($\bar{u}_i(0)$, $\bar{p}_i(0)$, $\bar{\theta}(0)$, $\bar{H}_i(0)$)부터 미지의 마지막 값($\bar{u}_i(t)$, $\bar{p}_i(t)$, $\bar{\theta}(t)$, $\bar{H}_i(t)$)으로 제한됨을 의미한다.

식 (8)을 통한 정상성은 열 탄성의 미분 방정식을 유도하며, 이의 확인을 위해 각 변분 항을 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} - \int_0^t \int_{\Omega} \delta l d\Omega dt = & - \int_0^t \int_{\Omega} (\rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i + A_{ijkl} \dot{J}_{ij} \delta \dot{J}_{kl}) d\Omega dt \quad (10) \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \epsilon_{ij} (\delta \dot{J}_{ij} - \beta_{ij} \delta \dot{\theta}) d\Omega dt + \int_0^t \int_{\Omega} (\dot{J}_{ij} - \beta_{ij} \dot{\theta}) \delta \epsilon_{ij} d\Omega dt \\ & - \frac{1}{T_0} \int_0^t \int_{\Omega} \rho c \dot{\theta} \delta \dot{\theta} d\Omega dt - \frac{1}{T_0} \int_0^t \int_{\Omega} \tau_0 d_{ij} \dot{H}_i \delta \dot{H}_j d\Omega dt \end{aligned}$$

$$-\int_0^t \delta V dt = -\int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{1}{T_0} \bar{\psi} \delta \theta + \bar{f}_i \delta u_i \right) d\Omega dt \quad (11)$$

$$-\int_0^t \int_{\Gamma_\tau} \bar{\tau}_i \delta u_i d\Gamma dt + \int_0^t \int_{\Gamma_q} \frac{1}{T_0} \bar{q} \delta \theta d\Gamma dt$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{H}_j} \delta H_i d\Omega dt = \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{T_0} d_{ij} \dot{H}_j \delta H_i d\Omega dt \quad (12)$$

식 (10)의 각 항에 시간과 공간에 대한 부분적분을 적용하면 다음과 같다.

$$\int_0^t \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dt = \int_0^t \rho \ddot{u}_i \delta u_i dt - \rho \dot{u}_i \delta u_i \Big|_0^t \quad (13)$$

$$-\int_0^t A_{ijkl} \dot{J}_{ij} \delta \dot{J}_{kl} dt = \int_0^t A_{ijkl} \ddot{J}_{ij} \delta J_{kl} dt - A_{ijkl} \dot{J}_{ij} \delta J_{kl} \Big|_0^t \quad (14)$$

$$\int_0^t \epsilon_{ij} (\delta \dot{J}_{ij} - \beta_{ij} \delta \dot{\theta}) dt = \quad (15)$$

$$-\int_0^t \epsilon_{ij} (\delta J_{ij} - \beta_{ij} \delta \theta) dt + \epsilon_{ij} (\delta J_{ij} - \beta_{ij} \delta \theta) \Big|_0^t$$

$$-\frac{1}{T_0} \int_0^t \rho c \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^t \rho c \ddot{\theta} \delta \theta dt - \frac{\rho c}{T_0} \dot{\theta} \delta \theta \Big|_0^t \quad (16)$$

$$-\frac{\tau_0}{T_0} \int_0^t d_{ij} \dot{H}_i \delta \dot{H}_j dt = \quad (17)$$

$$-\frac{\tau_0}{T_0} \int_0^t d_{ij} \ddot{H}_i \delta H_j dt - \frac{\tau_0}{T_0} d_{ij} \dot{H}_i \delta H_j \Big|_0^t$$

$$\frac{1}{T_0} \int_0^t \int_{\Omega} H_i \delta \dot{\theta}_{,i} d\Omega dt = \quad (18)$$

$$\frac{1}{T_0} \int_0^t \int_{\Omega} \dot{H}_{i,i} \delta \theta d\Omega dt - \frac{1}{T_0} \int_0^t \int_{\Gamma} \dot{H}_i n_i \delta \theta d\Gamma$$

$$-\frac{1}{T_0} \int_{\Omega} H_{i,i} \delta \theta \Big|_0^t d\Omega + \frac{1}{T_0} \int_{\Gamma} H_i n_i \delta \theta \Big|_0^t d\Omega$$

$$\int_{\Omega} (\dot{J}_{ij} - \beta_{ij} \dot{\theta}) \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \quad (19)$$

$$-\int_{\Omega} (\dot{J}_{ij,j} - \beta_{ij} \dot{\theta}_{,j}) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} (\dot{J}_{ij} - \beta_{ij} \dot{\theta}) n_j \delta u_i d\Gamma$$

식 (13)~(19)의 유도과정에는 아래의 대칭성(symmetry relations)이 사용되었다.

$$\dot{J}_{ij} = \dot{J}_{ji} \quad ; \quad \beta_{ij} = \beta_{ji} \quad (20)$$

특히, 식 (18)은 시간과 공간 모두에 대한 부분적분이 적용되었고, n_i 는 표면에 수직으로 외부로 향하는 단위 벡터(outer unit normal) q 는 열속(q_i)의 총량이다($q = q_i n_i$).

이 모든 것을 고려했을 때, 식 (8)은 다음 식과 같다.

$$\delta A = \int_0^t \int_{\Omega} (\rho \ddot{u}_i - (\dot{J}_{ij,j} - \beta_{ij} \dot{\theta}_{,j}) - \bar{f}_i) \delta u_i d\Omega dt \quad (21)$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega} (A_{ijkl} \ddot{J}_{ij} - \epsilon_{kl}) \delta J_{kl} d\Omega dt$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\rho c}{T_0} \ddot{\theta} + \frac{1}{T_0} \dot{H}_{i,i} + \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{T_0} \bar{\psi} \right) \delta \theta d\Omega dt$$

$$+ \frac{1}{T_0} \int_0^t \int_{\Omega} (\tau_0 d_{ij} \ddot{H}_i + d_{ij} \dot{H}_i + \dot{\theta}_{,j}) \delta H_j d\Omega dt$$

$$- \frac{1}{T_0} \int_0^t \int_{\Gamma_q} (\dot{H}_i n_i) \delta \theta d\Gamma dt + \frac{1}{T_0} \int_0^t \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta \theta d\Gamma dt$$

$$+ \int_0^t \int_{\Gamma_\tau} (\dot{J}_{ij} - \beta_{ij} \dot{\theta}) n_j \delta u_i d\Gamma dt - \int_0^t \int_{\Gamma_\tau} \bar{\tau}_i \delta u_i d\Gamma dt$$

$$+ \int_{\Omega} (\epsilon_{kl} - A_{ijkl} \dot{J}_{ij}) \delta J_{kl} \Big|_0^t d\Omega$$

$$- \int_{\Omega} p_i \delta u_i \Big|_0^t d\Omega + \int_{\Omega} \bar{p}_i \delta u_i \Big|_0^t d\Omega$$

$$- \frac{1}{T_0} \int_{\Omega} \tau_0 d_{ij} \dot{H}_i \delta H_j \Big|_0^t d\Omega - \frac{1}{T_0} \int_{\Omega} (d_{ij} \bar{H}_i + \bar{\theta}_{,j}) \delta \bar{H}_j \Big|_0^t d\Omega$$

$$- \frac{1}{T_0} \int_{\Omega} (\rho c \dot{\theta} + \beta_{ij} \epsilon_{ij} + H_{i,i}) \delta \theta \Big|_0^t d\Omega + \frac{1}{T_0} \int_{\Omega} \bar{\psi} \delta \bar{\theta} \Big|_0^t d\Omega$$

$$+ \frac{1}{T_0} \int_{\Gamma_q} H_i n_i \delta \theta \Big|_0^t d\Gamma - \frac{1}{T_0} \int_{\Gamma_q} \bar{Q} \delta \bar{\theta} \Big|_0^t d\Gamma$$

식 (21)의 유도과정에는 다음의 경계조건이 고려되었으며

$$\delta \theta(x_i, \tau) = 0 \quad x_i \in \Gamma_T, \tau \in (0, t) \quad (22a)$$

$$\delta u_i(x_i, \tau) = 0 \quad x_i \in \Gamma_u, \tau \in (0, t) \quad (22b)$$

경계표면 Γ 는 아래와 같다.

$$\Gamma_T \cup \Gamma_q = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau = \Gamma \quad (23a)$$

$$\Gamma_T \cap \Gamma_q = \Gamma_u \cap \Gamma_\tau = \emptyset \quad (23b)$$

식 (22)에서 각 변분은 공간과 시간의 함수이며, 이를 (x_i, τ) 로 표현하였고 이후에는 이를 생략하였음에 유의한다.

식 (21)의 첫 번째-네 번째 줄로부터 시간간격 $(0, t)$ 내에 임의로 변하는 변분값 δu_i , δJ_{kl} , $\delta \theta$, δH_j 를 고려하면, Ω 영역에 대해 다음의 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\rho \ddot{u}_i - (\dot{J}_{ij,j} - \beta_{ij} \dot{\theta}_{,j}) - \bar{f}_i = 0 \quad (24a)$$

$$A_{ijkl} \ddot{J}_{ij} - \epsilon_{kl} = 0 \quad (24b)$$

$$\frac{\rho c}{T_0} \ddot{\theta} + \frac{1}{T_0} \dot{H}_{i,i} + \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{T_0} \bar{\psi} = 0 \quad (24c)$$

$$\frac{1}{T_0} (\tau_0 d_{ij} \ddot{H}_i + d_{ij} \dot{H}_i + \dot{\theta}_{,j}) = 0 \quad (24d)$$

이 식은 온도와 변위로 표현되는 아래의 열 탄성의 편미분 방정식인 동적 평형 방정식(dynamic equilibrium), 탄성체의 재료구성 방정식(rate-compatibility equation), 에너지 평형 방정식(energy balance equation) 및 Maxwell-Chester 모델의 유한한 속도의 열 전달(the extended Fourier's law of heat conduction) 방정식과 정확히 대응된다.

$$\rho \ddot{u}_i - (\sigma_{ij,j} - \beta_{ij} T_{,j}) = \bar{f}_i \quad (25a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (25b)$$

$$\frac{\rho c}{T_0} \dot{T} + \frac{1}{T_0} q_{i,i} + \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{T_0} \bar{\psi} \quad (25c)$$

$$\frac{1}{T_0} (\tau_0 d_{ij} \dot{q}_i + d_{ij} q_i + T_{,j}) = 0 \quad (25d)$$

곧, 확장 해밀턴 이론은 동적 거동과 열전도의 복합거동을 나타내는 편미분 방정식을 혼합변수로 표현함을 확인할 수 있다.

또한, 식 (21)의 다섯 번째-여섯 번째 줄에서 아래와 같이 적절한 경계조건을 얻을 수 있으며,

$$\dot{H}_i n_i = \bar{q} \quad x_i \in \Gamma_q, \tau \in (0, t) \quad (26a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad x_i \in \Gamma_\sigma, \tau \in (0, t) \quad (26b)$$

일곱 번째 줄로부터는 다음과 같이 초기 시간과 마지막 시간에서의 탄성재료 구성 방정식(compatibility equation)을 얻을 수 있다.

$$\epsilon_{kl} = A_{ijkl} \dot{J}_{ij} \quad x_i \in \Omega \text{ at } \tau = 0 \text{ and } \tau = t \quad (26c)$$

더욱 중요한 점은 확장 해밀턴 이론은 초기조건을 제대로 반영한다는 것이다. 곧, 식 (21)의 여덟 번째에서 열한번째 줄은 식 (8)에서 $\bar{\cdot}$ 로 표현되는 항은 선형 탄성 매개체가 미지의 초기값($\bar{u}_i(0)$, $\bar{p}_i(0)$, $\bar{\theta}(0)$, $\bar{H}_i(0)$)부터 미지의 마지막 값($\bar{u}_i(t)$, $\bar{p}_i(t)$, $\bar{\theta}(t)$, $\bar{H}_i(t)$)으로 변화토록 제한하는 역할을 하며, 이는 다음을 의미한다.

$$\delta u_i(0) = \delta \bar{u}_i(0); \quad \delta u_i(t) = \delta \bar{u}_i(t) \quad x_i \in \Omega \quad (27a)$$

$$\delta H_j(0) = \delta \bar{H}_j(0); \quad \delta H_j(t) = \delta \bar{H}_j(t) \quad x_i \in \Omega \quad (27b)$$

$$\delta \theta(0) = \delta \bar{\theta}(0); \quad \delta \theta(t) = \delta \bar{\theta}(t) \quad x_i \in \Omega \quad (27c)$$

$$\delta \theta(0) = \delta \bar{\theta}(0); \quad \delta \theta(t) = \delta \bar{\theta}(t) \quad x_i \in \Gamma_q \quad (27d)$$

따라서, 식 (21)의 마지막 부분은 다음과 같이 표현된다.

$$- \int_{\Omega} (p_i - \bar{p}_i) \delta \bar{u}_{i0}^t d\Omega \quad (28a)$$

$$- \frac{1}{T_0} \int_{\Omega} (\tau_0 d_{ij} \dot{H}_i + d_{ij} \bar{H}_i + \bar{\theta}_{,j}) \delta \bar{H}_{j0}^t d\Omega \quad (28b)$$

$$- \frac{1}{T_0} \int_{\Omega} (\rho c \dot{\theta} + \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \bar{H}_{i,i} - \bar{\psi}) \delta \bar{\theta}_0^t d\Omega \quad (28c)$$

$$\frac{1}{T_0} \int_{\Gamma_q} (H_i n_i - \bar{Q}) \delta \bar{\theta}_0^t d\Gamma \quad (28d)$$

식 (28c)에서 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 와 $\bar{H}_{i,i}$ 로 나타낸 것은 초기 시간과 마지막 시간의 $\bar{\cdot}$ 로 표현되는 $\bar{u}_i(0)$, $\bar{H}_i(0)$, $\bar{u}_i(t)$, $\bar{H}_i(t)$ 때문임에 유념하여야 한다. 또한, 식 (28c)와 (28d)에 나타난 $\bar{\psi}(0)$ 와 $\bar{Q}(0)$ 는 초기 시간으로 고려되는 시간 이전의 열속(normal heat flux)과 단위 체적당 열원 속도(heat source rate)의 충격량으로 아래의 식으로 표현되며

$$\bar{\psi}(0) = \int_{-\infty}^0 \psi(t) dt; \quad \bar{Q}(0) = \int_{-\infty}^0 q(t) dt \quad (29)$$

여기서, $-\infty$ 는 초기 시간으로 고려하는 시간 이전의 시간을 나타낸다.

확장 해밀턴 이론에서는 일반적인 열 탄성문제에서 주어지는 초기값(u_{i0} , p_{i0} , T_0 , q_{i0})은 식 (28)에 나타난 초기값에 다음과 같이 식 (30a) 그리고 식 (30b)로 순차적으로 부가함으로 제대로 반영하게 된다.

$$\bar{p}_i(0) = p_{i0}; \quad \dot{H}_i(0) = q_{i0}; \quad \dot{\theta}(0) = T_0 \quad (30a)$$

$$\delta \bar{u}_i(0) = 0 (\because \bar{u}_i(0) = u_{i0}); \quad \delta \bar{\theta}(0) = 0 (\because \bar{\theta}(0) = \theta_0) \quad (30b)$$

덧붙여, $\bar{\cdot}$ 로 표현되는 식 (28)의 다른 초기값인 $\bar{\theta}(0)$ 및 $\bar{H}_i(0)$ 은 다음 식으로부터 산정될 수 있다.

$$\tau_0 d_{ij} \dot{H}_i(0) + d_{ij} \bar{H}_i(0) + \bar{\theta}_{,j}(0) = 0 \quad (31a)$$

$$\rho c \dot{\theta}(0) + \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}(0) + \bar{H}_{i,i}(0) - \bar{\psi}(0) = 0 \quad (31b)$$

곧, 확장 해밀턴 이론은 열 탄성에 제대로 된 초기치 고려와 함께 그 적용이 가능하다.

확장 해밀턴 이론에서 이끌어낸 혼합 변수의 편미분 방정식인 식 (24)를 푸리에 파수 해석을(fourier wave number space)하면 에너지 보존계와 수학적으로 곧잘 모델링되는 에너지 비보존계에 대해 흥미로운 점을 발견할 수 있다. 곧, 식 (24)를 속도 변수(rate variables)로 표현하고 이를 푸리에 파수 공간 변환을 하면 다음의 결과를 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{klmn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_0 \bar{d}_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{p}}_j \\ \dot{\hat{\sigma}}_{mn} \\ \dot{\hat{T}} \\ \dot{\hat{q}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_j \\ 0 \\ \hat{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & i\hat{B}_{mni} - i\hat{B}_{pqi}\beta_{pq} & 0 \\ i\hat{B}_{klj} & 0 & 0 \\ -i\hat{B}_{pqj}\beta_{pq} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\hat{D}_r & -\bar{d}_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_j \\ \hat{\sigma}_{mn} \\ \hat{T} \\ \hat{q}_s \end{bmatrix} \quad (32)$$

여기서, $\hat{\cdot}$ 표현은 푸리에 파수 공간 변환을 의미하고, 상수 $\bar{c}$ 및 $\bar{d}_{rs}$ 를 비롯한 여타 기호는 각각 다음을 나타내며

$$\bar{c} = \frac{c}{T_0} \quad ; \quad \bar{d}_{rs} = \frac{d_{rs}}{T_0} \quad (33a)$$

$$\hat{D}_i = \frac{k_i}{T_0} \quad ; \quad \hat{B}_{ijk} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}k_j + \delta_{jk}k_i) \quad (33b)$$

k_i 는 푸리에 파수 벡터(fourier wave number vector)를 δ_{ij} 는 크로네커 델타를 의미한다.

식 (32)에서 응력을 Voigt notation을 도입해 벡터로 표현하고 이산화하면(discretization), 다음과 같은 선형대수 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \bar{c} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_0 \bar{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{p}}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \\ \dot{\hat{\mathbf{T}}} \\ \dot{\hat{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ 0 \\ \hat{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & i\hat{\mathbf{B}}^T - i\beta\hat{\mathbf{B}} & 0 \\ i\hat{\mathbf{B}} & 0 & 0 \\ -i\hat{\mathbf{B}}^T\beta^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\hat{\mathbf{D}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (34)$$

식 (34)의 우측항을 살펴보면, 먼저, 첫줄의 벡터와 행렬은 에너지 비보존계의 특성을 나타낸다. 곧, 벡터는 체적력 $\hat{f}$ 과 단위 체적당 열원 속도 $\hat{\psi}$ 의 영향을 행렬은 음의 정부호 에르미트 행렬로(negative definite Hermitian matrix) 에너지 소산을(energy dissipation) 나타낸다. 또한, 두 번째 줄의 행렬은 에너지 보존계의 특성을 보여주는 반 에르미트 행렬로(skew-Hermitian matrix) 표현된다.

2.2 공극 탄성으로의 적용

고체와 유체로 구성된 다공질매체의 공극 탄성 편미분 방정식과(Biot, 1956; 1962a; 1962b) 열 탄성의 편미분

방정식은 수학적으로 똑같이 표현되어 확장 해밀턴 이론의 적용이 가능하며(두 방정식의 동일성은 Predeleanu(1984), Manolis와 Beskos(1989), Apostolakis와 Dargush(2013) 등 많은 문헌에서 찾을 수 있다), 이를 위해 다음의 혼합변수 충격량을 정의한다.

$$u_i(t) = \int_0^t v_i(\tau) d\tau \quad ; \quad \dot{u}_i = v_i \quad (35)$$

$$J_{ij}(t) = \int_0^t {}^c\sigma_{ij}(\tau) d\tau = \int_0^t C_{ijkl}\epsilon_{kl}(\tau) d\tau \quad ; \quad \dot{J}_{ij} = \sigma_{ij} \quad (36)$$

$$\pi(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau \quad ; \quad \dot{\pi} = p \quad (37)$$

$$w_i(t) = \int_0^t q_i(\tau) d\tau \quad ; \quad \dot{w}_i = q_i \quad (38)$$

식 (35)~(38)에서 v_i , ${}^c\sigma_{ij}$, ϵ_{kl} 는 고체의 속도, 유효 응력과 변형률을 의미하며, p 와 q_i 는 공극 압력과 공극 내 유체의 평균 속도를 나타낸다. 곧, 앞의 열 탄성식 식 (1)~(3)과 비교해 혼합변수 충격량 π 와 w_i 는 각각 θ 및 H_i 에 대응됨을 알 수 있다.

확장 해밀턴 이론은 공극 탄성에 대해 상기의 혼합 변수들로 Lagrangian density l , Rayleigh's dissipation ϕ , 퍼텐셜 V 의 세 함수를 다음과 같이 정의하며

$$l = \frac{1}{2}(1-n)\rho_s \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{2}A_{ijkl}\dot{J}_{ij}\dot{J}_{kl} - (\dot{J}_{ij} - \beta_{ij}\dot{\pi})\epsilon_{ij} \quad (39)$$

$$+ \frac{1}{2Q}\dot{\pi}^2 + \frac{n\rho_f}{2}\left(\dot{u}_k + \frac{\dot{w}_k}{n}\right)\left(\dot{u}_k + \frac{\dot{w}_k}{n}\right) - \dot{\pi}_{,i}w_i$$

$$\phi = \frac{1}{2}\lambda_{ij}\dot{w}_i\dot{w}_j \quad (40)$$

$$V = \int_{\Omega} (\bar{f}_i u_i + \bar{\gamma} \pi) d\Omega + \int_{\Gamma_r} \bar{\tau}_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \pi d\Gamma \quad (41)$$

식 (39)과 식 (41)로 이뤄진 범함수 A 를 식 (7)과 같이 또 그의 정상성을 나타내는 $\delta A = 0$ 의 변분 δA 를 다음과 같이 새롭게 정의한다.

$$\delta A = - \int_0^t \int_{\Omega} \delta l d\Omega dt - \int_0^t \delta V dt \quad (42)$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial w_j} \delta w_j d\Omega dt + \int_{\Omega} (\bar{J}_{kj,j} - \beta_{kj} \bar{\pi}_{,j} + \bar{j}_k) \delta \bar{u}_{k0}^t d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \bar{\Gamma} \delta \bar{\pi}_0^t d\Omega - \int_{\Omega} (\lambda_{jk} \bar{w}_j + \bar{\pi}_{,k}) \delta \bar{w}_{k0}^t d\Omega$$

$$- \int_{\Gamma_q} \bar{w} \delta \bar{\pi}_0^t d\Gamma$$

식 (40), (41)에서 ρ_s 와 ρ_f 는 각각 고체와 유체의 질량

밀도를 n 과 Q 는 각각 공극률(porosity)과 Biot 상수를 나타내고 $\bar{f}_i$ 및 $\bar{\tau}_i$ 는 고체의 체적력 밀도(body force density)와 표면 장력(surface traction)을 $\bar{\gamma}$ 및 $\bar{q}$ 는 체적에 유입되는 유체 속도(volumetric body source rate)와 표면에서 수직방향으로 유출되는 유체의 체적(normal relative fluid volume discharge)을 나타내며 λ_{ij} 는 투과율(permeability) κ_{ij} 의 역수를 의미한다.

상기의 혼합 변수를 통해 공극 탄성의 운동방정식, 탄성 재료의 구성 방정식(rate-compatibility equation), 공극 유체의 흐름 방정식(pore fluid balance equation)과 다르시 법칙(extended Darcy's law)을 표현하면 아래와 같다.

$$\rho_0 \ddot{u}_k + \rho_f \ddot{w}_k - (\dot{J}_{kj,j} - \beta_{kj} \dot{\pi}_{,j}) = \bar{f}_k \quad (43a)$$

$$A_{ijkl} \ddot{J}_{kl} - \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad (43b)$$

$$\frac{1}{Q} \ddot{\pi} + \dot{w}_{i,i} + \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \bar{\gamma} \quad (43c)$$

$$\frac{\rho_f}{n} \ddot{w}_j + \rho_f \ddot{u}_j + \lambda_{ij} \dot{w}_i + \dot{\pi}_{,j} = 0 \quad (43d)$$

ρ_0 는 각각 고체와 유체로 이뤄진 혼합 매체의 질량 밀도를

$$\rho_0 = (1-n)\rho_s + n\rho_f \quad (44)$$

β_{ij} 는 혼합 매체간의 완전 연동 효과를 나타내며(fully coupled effects- 유체 압력의 변화는 고체 변형을 변화시키고, 고체의 응력 변화는 유체 압력을 변화시킨다) 고체 내 총 응력 σ_{ij} 는 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\sigma_{ij} = {}^e\sigma_{ij} - \beta_{ij}p \quad (45)$$

앞서 식 (10)~(19)의 열 탄성 유도과정처럼 시간과 공간에 대한 부분적분을 적용하고 $\bar{}$ 로 표현된 항에 의한 공극 시스템의 유일무이한 변화를 고려하면 식 (42)는 다음과 같다.

$$\delta A = \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} [\rho_0 \ddot{u}_k + \rho_f \ddot{w}_k - (\dot{J}_{kj,j} - \beta_{kj} \dot{\pi}_{,j}) - \bar{f}_k] \delta u_k d\Omega dt + \\ & \int_0^t \int_{\Omega} [A_{ijkl} \ddot{J}_{kl} - \dot{\epsilon}_{ij}] \delta J_{kl} d\Omega dt + \\ & \int_0^t \int_{\Omega} \left[\frac{1}{Q} \ddot{\pi} + \dot{w}_{i,i} + \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \bar{\gamma} \right] \delta \pi d\Omega dt + \\ & \int_0^t \int_{\Omega} \left[\rho_f \ddot{u}_k + \frac{\rho_f}{n} \ddot{w}_k + \lambda_{jk} \dot{w}_j + \dot{\pi}_{,k} \right] \delta w_k d\Omega dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma_r} [-\bar{\tau}_i + (\dot{J}_{ij} - \beta_{ij} \dot{\pi}) n_j] \delta u_i d\Gamma dt + \\ & \int_0^t \int_{\Gamma_q} [\bar{q} - \dot{w}_i n_i] \delta \pi d\Gamma dt + \\ & \int_{\Omega} \{ [\epsilon_{ij} - A_{ijkl} \dot{J}_{kl}] \delta J_{kl} \}_0^t d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \{ [-\rho_0 \dot{u}_k - \rho_f \dot{w}_k + (\bar{J}_{kj,j} - \beta_{kj} \bar{\pi}_{,j} + \bar{j}_k)] \delta \bar{u}_k \}_0^t d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \left\{ \left[-\frac{1}{Q} \dot{\pi} - w_{i,i} - \beta_{ij} \epsilon_{ij} + \bar{\xi} \right] \delta \bar{\pi} \right\}_0^t d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \left\{ \left[-\rho_f \dot{u}_k - \frac{\rho_f}{n} \dot{w}_k - \lambda_{jk} \bar{w}_j - \bar{\pi}_{,k} \right] \delta \bar{w}_k \right\}_0^t d\Omega + \\ & \int_{\Gamma_q} \{ [w_i n_i - \bar{w}] \delta \bar{\pi} \}_0^t d\Gamma \end{aligned}$$

식 (46)의 $\bar{j}_k$ 와 $\bar{\xi}$ 는 앞의 식 (9)에서와 같이, 체적력 밀도 및 체적 유입 유체 속도의 충격량으로 다음과 같이 표현되며 이는 보통 공극 탄성에 주어진 값이다.

$$\bar{j}_k = \int_0^t \bar{f}_k(t) dt; \quad \bar{\xi} = \int_0^t \bar{\gamma}(t) dt \quad (47)$$

곧, 확장 해밀턴 이론은 식 (46)의 첫 번째-네 번째 줄에서 보듯이, 공극 탄성을 나타내는 편미분 방정식과 다섯 번째-여섯 번째 줄에 나타난 경계조건 및 일곱 번째 줄에 나타나듯 탄성 재료의 구성방정식을(식 (26)과 같은) 올바르게 나타내며, 더불어, 중괄호로 표현된 나머지 항은 식 (30)~(31)에서처럼 초기치를 순차적으로 적용함으로써 제대로 안정함을 알 수 있다.

또한, 확장 해밀턴 이론에서 이끌어낸 편미분 방정식인 식 (43)을 식 (32)~(34)과 같이 푸리에 파수 해석 및 이산화 과정을 통해 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (1-n)\rho_s \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Q} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n\rho_f \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^e \\ \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \\ & \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ 0 \\ \hat{\gamma} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -n^2 \lambda & 0 & 0 & n^2 \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n^2 \lambda & 0 & 0 & -n^2 \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^e \\ \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & i\bar{\mathbf{B}}^T - i\beta\bar{\mathbf{B}} & 0 \\ i\bar{\mathbf{B}} & 0 & 0 \\ -i\bar{\mathbf{B}}^T \beta^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\bar{\mathbf{D}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^e \\ \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

여기서, $\hat{\cdot}$ 표현은 푸리에 파수 공간 변환을 의미하고, $\hat{\mathbf{B}}$ 는 식 (33b)의 푸리에 파수 공간 변환을 행렬로 나타낸 것이며 $\hat{\mathbf{D}}$ 는 다음 식의 푸리에 파수 공간 변환을 행렬로 표현한 것을 나타낸다.

$$\hat{D}_i = nk_i \quad (49)$$

앞서 열 탄성의 경우와 같이, 식 (48)의 우변 첫 줄은 수학적으로 모델링되는 에너지 비보존계를 두 번째 줄은 에너지 보존계를 각 행렬의 특징인 음의 준정부호 에르미트 행렬(negative semi-definite Hermitian matrix) 반 에르미트 행렬(skew-Hermitian matrix) 표현할 수 있음을 확인하였다.

3. 결 론

본 연구에서는 기존의 동역학과 순수 열전도에 대한 확장 해밀턴 이론의 적용을 바탕으로, 이 이론을 열 탄성과 공극 탄성에까지 적용하여 일반화하는 것에 초점을 맞추었다. 곧, 새롭게 정의한 범함수의 변분 그리고 순차적인 초기치 적용을 통해 본 이론을 통한 범함수의 정상성은 제대로 된 초기치 반영은 물론 각 경우에 대해 올바른 편미분 방정식 모두를 이끌어낼 수 있었다. 또한, 푸리에 파수 변환과 이산화과정을 통해 에너지보존계와 비보존계의 특징을 행렬의 특성으로 표현할 수 있음을 확인하였다.

본 연구에서 제시한 새롭게 정의된 범함수의 변분인 식 (8)과 식 (42)는 열 탄성과 공극 탄성에 대해 시·공간 통합 유한요소 해석법 개발에 이론적 토대를 제공하는 것으로써, 현재, 식 (8)을 활용한 열 탄성에 대한 시공간 통합 유한요소 해석법이 개발 중에 있다.

감사의 글

이 논문은 2015년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구입니다(No. 2015R1A5A1037548).

References

- Apostolakis, G., Dargush, G.F. (2013) Mixed Variational Principles for Dynamic Response of Thermoelastic and Poroelastic Continua, *Int. J. Solids & Struct.*, 50, pp.642~650.
- Biot, M.A. (1956) Theory of Propagation of Elastic Waves in Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low Frequency Range, *J. Acoust. Soc. Am.*, 28, pp.168~178.
- Biot, M.A. (1962a) Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media, *J. Appl. Phys.*, 33, pp.1482~1498.
- Biot, M.A. (1962b) Generalized Theory of Acoustic Propagation in Porous Dissipative Media, *J. Acoust. Soc. Am.*, 34, pp.1254~1264.
- Chester, M. (1963) Second Sound in Solids, *Phys. Rev.*, 131, pp.2013~2015.
- Hamilton, W.R. (1834) On a General Method in Dynamics, *Philos. Trans. Royal Soc. London*, 124, pp.247~308.
- Hamilton, W.R. (1835) Second Essay on a General Method in Dynamics, *Philos. Trans. Royal Soc. London*, 125, pp.95~144.
- Kim, J., Dargush, G.F., Ju, Y.K. (2013) Extended Framework of Hamilton's Principle for Continuum Dynamics, *Int. J. Solids & Struct.*, 50, pp.3418~3429.
- Kim, J. (2014a) A Variational Numerical Method of Linear Elasticity through the Extended Framework of Hamilton's Principle, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 27(1), pp.37~43.
- Kim, J. (2014b) Higher order Temporal Finite Element Methods through Mixed Formalisms, *SpringerPlus*, 3, pp.1~25.
- Kim, J., Kim, D. (2015) A Quadratic Temporal Finite Element Method for Linear Elastic Structural Dynamics, *Math. & Comput. Simul.*, 117, pp.68~88.
- Kim, J., Kim, D. (2016) Temporal Finite Element Methods through the Extended Framework of Hamilton's Principle, *J. Mech. Eng. Sci.*, in press, DOI: 10.1177/0954406216642481.
- Kim, J., Dargush, G.F., Lee, H. S. (2016) Extended Framework of Hamilton's Principle in Heat Diffusion, *Int. J. Mech. Sci.*, 114, pp.166~176.
- Manolis, G.D., Beskos, D.E. (1989) Integral Formulation and Fundamental Solutions of Dynamic Poroelasticity and Thermoelasticity, *ACTA Mechanica*, 76, pp.89~104.
- Maxwell, C. (1867) On the Dynamical Theory of Gases, *Philos. Trans. Royal Soc. London*, 157, pp.49~88.
- Predeleanu, M. (1984) Development of Boundary Element Method to Dynamic Problems for Porous

Media, *Appl. Math. Modeling*, 8, pp.378~382.

New York.

Rayleigh, J.W.S. (1877) *The Theory of Sound*, Dover,

요 지

본 논문은 동역학의 새로운 변분이론인 확장 해밀턴 이론을 열 탄성과 공극 탄성에 적용하여 더욱 일반화하는 것에 그 주요 목적이 있다. 이를 위해 열 탄성학에 대한 이론 적용이 우선적으로 검토되었고, 열 탄성-공극 탄성의 유사성을 바탕으로 공극 탄성에까지 그 이론이 확장되었으며, 각 경우에 대한 푸리에 변환을 통해 그 적정성을 확인하였다.

핵심용어 : 확장 해밀턴 이론, 열 탄성, 공극 탄성